

УДК 533.6.011.55

**НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ВЯЗКИЙ УДАРНЫЙ СЛОЙ ОКОЛО
ПЕРЕДНЕЙ КРОМКИ КРЫЛА БЕСКОНЕЧНОГО РАЗМАХА**

МАРКОВ А. А.

Для расчета сверхзвукового обтекания тел потоком вязкого газа используются модели тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС), вязкого ударного слоя (ВУС), который не предполагается тонким, параболизованные уравнения Навье – Стокса (ПНС) (см. работы [1–9], в которых приведена библиография). Применение этих моделей позволяет существенно экономить ресурсы ЭВМ по сравнению с расчетом полной системы уравнений Навье – Стокса, при этом проводится одновременный расчет параметров потока как в невязкой, так и в вязкой его части с учетом вязко-невязкого взаимодействия в случаях ограниченной применимости теории классического пограничного слоя. В уравнениях ТВУС при определении изменения давления поперек ударного слоя учитываются лишь центробежные силы [4, 5]. Предельным случаем при $M_\infty \rightarrow \infty$ уравнений ТВУС являются уравнения гиперзвукового вязкого ударного слоя (см., например, [4]). Уравнения модели ВУС содержат все члены уравнений Эйлера невязкого течения и все члены уравнений пограничного слоя [1, 6]. Использование уравнений ПНС предполагает наличие в потоке направления, вдоль которого диффузия мала по сравнению с диффузией в поперечной плоскости. Модель ПНС успешно используется для расчета поперечного отрыва [9].

Влиянию вдува на параметры стационарного вязкого ударного слоя около крыла бесконечного размаха под углом скольжения посвящены работы [4, 7, 10].

В настоящей работе на основе модели ВУС исследуется влияние нестационарного вдува и изменения температуры стенки на параметры вязкого ударного слоя около критической линии крыла бесконечного размаха, обтекаемого под заданным углом скольжения. Получено аналитическое решение нестационарной задачи, справедливое вблизи поверхности крыла при сильном вдуве. Проведено численное исследование и представлены некоторые результаты расчетов уравнений нестационарного вязкого ударного слоя при различных зависимостях скорости вдува и температуры поверхности крыла от времени. В расчетах применен конечно-разностный метод второго порядка аппроксимации по пространственной переменной и первого порядка по времени, использующий дивергентную запись уравнений, линеаризации по Ньютону и векторные прогонки поперек ударного слоя. В стационарном случае результаты расчетов находятся в хорошем согласии с данными [7].

1. Рассмотрим обтекание крыла бесконечного размаха с затупленной передней кромкой сверхзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа под углом скольжения β_0 . Воспользуемся нестационарными уравнениями вязкого ударного слоя [6] в криволинейной системе координат $q = (x, y, z)$, связанной с поверхностью крыла. Предполагаем, что координатные линии x, y направлены вдоль профиля и вдоль образующей крыла соответственно; линии z ортогональны поверхности крыла. Обозначим через u^i контравариантные составляющие скорости в системе q ; $u(i) = u^i \sqrt{g_{ii}}$ (по i не суммировать). Приняты следующие безразмерные переменные (штрих относится к размерным величинам):

$$\begin{aligned} u^i(i) &= u(i) V_\infty', & \rho' &= \rho \rho_\infty', & p' &= p \rho_\infty' V_\infty'^2, & h' &= h V_\infty'^2 \\ \mu' &= \mu \mu_0', & T' &= T T_0', & \lambda' &= \lambda' / \text{Pr} = \mu \mu_0' / \text{Pr} \\ \mu &= h^0, & \lambda &= h^0 / \text{Pr}, & \mu_0' &= \mu'(T_0') \\ c_p T_0' &= \frac{1}{2} V_\infty'^2 + c_p T_\infty' = V_\infty'^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1) M_\infty^2} \right) \end{aligned}$$

Здесь ρ , p , h , T — плотность, давление, энтальпия и температура соответственно; μ , λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности. Индекс ноль относится к значениям в точке торможения крыла при нулевом угле скольжения.

Введем обозначения: α — угол между проекцией $V'_{N\infty}$ вектора V_{∞}' на плоскость π_N , нормальную к кромке крыла, и касательной к профилю; \mathbf{n}_b , \mathbf{n}_s — векторы нормалей к поверхности крыла и ударной волны; $K(x)$, $K_s(x)$ — зависимости кривизны профиля крыла и сечения S_N головной ударной волны S плоскостью π_N от координаты x ; $\alpha_s(x)$ — угол между касательной к S_N и вектором $V'_{N\infty}$; $v_{\infty}(1)$, $v_{\infty}(2)$ — касательные составляющие скорости перед ударной волной, $v_{\infty}(3)$ — нормальная составляющая скорости перед ударной волной по отношению к ее поверхности S , $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$ — соответствующие компоненты скорости за ударной волной.

На поверхности S ставятся модифицированные соотношения Рэнкина — Гюгонио, учитывающие эффекты вязкости в форме, приведенной в [8].

Параметры набегающего потока в данном случае имеют вид

$$\rho_{\infty}=1, \quad h_{\infty}=\frac{1}{(\gamma-1)M_{\infty}^2}, \quad p_{\infty}=\frac{1}{\gamma M_{\infty}^2}, \quad T_{\infty}^{-1}=\frac{1}{2}(\gamma-1)M_{\infty}^2+1$$

$$w_{\infty}(3)=v_{\infty}(3)-v_f, \quad v_{\infty}(1)=\cos \alpha_s(x) \sin \beta, \quad v_{\infty}(2)=\cos \beta$$

$$v_{\infty}(3)=-\sin \alpha_s(x) \sin \beta, \quad \beta=\frac{\pi}{2}-\beta_0$$

$$w(3)=v(3)-v_f, \quad v_f=\frac{\Phi_t}{\sqrt{1+\Phi_x^2}} \quad z=\Phi(t, x)$$

$$h=k_T T \quad k_T=\frac{1}{2}+\frac{1}{(\gamma-1)M_{\infty}^2}=\frac{c_p T_0'}{V_{\infty}'^2}$$

где v_f — скорость движения фронта волны; дифференцирование по ξ соответствует направлению внешней нормали к поверхности волны S .

Предполагаем, что на поверхности крыла $z=0$ задаются нестационарные температура и вдув газа

$$h=h_w(t), \quad u(i)=u_*(i) \quad (1.1)$$

В начальный момент времени $t=0$ заданы распределения

$$z=\Phi(0, x), \quad u(i)=u^{\circ}(i), \quad h=h^{\circ}(x, z), \quad \rho=\rho^{\circ}(x, z) \quad (1.2)$$

соответствующие стационарному режиму обтекания крыла при некоторых значениях M_{∞} , Re_0 , h_w , $u_*(i)$, $i=1, 2, 3$.

2. Ищем приближенное решение нестационарных уравнений вязкого ударного слоя [6] при условиях (1.1), (1.2) в окрестности критической линии передней кромки крыла $x=0$ в виде следующих разложений:

$$u(1)=xu_0(t, z)+\dots, \quad u(2)=v_0(t, z)+\dots, \quad u(3)=w_0(t, z)+\dots$$

$$\Phi(t, x)=\varphi(t)+\dots, \quad p=p_0(t, z)+\frac{x^2}{2}(p_1(t, z)+\dots) \quad (2.1)$$

$$\rho=\rho_0(t, z)+\dots, \quad h=h_0(t, z)+\dots$$

Точками отмечены величины, стремящиеся к нулю при $x \rightarrow 0$.

Для главных членов разложений соотношения на ударной волне в окрестности $x=0$ критической линии крыла приводятся к виду

$$\rho_0(w_0-\dot{\varphi})=-(\sin \beta+\dot{\varphi})=(w_{0\infty}-\dot{\varphi})=M \quad (2.2)$$

$$u_0 - \mu_0^* \frac{\partial u_0}{\partial z} = K_s - \kappa w_0, \quad v_0 - \mu_0^* \frac{\partial v_0}{\partial z} = \cos \beta$$

$$w_{0\infty} = \sin \beta, \quad p_{0\infty} = p_\infty, \quad h_{0\infty} = h_\infty, \quad \mu_0^* = \frac{4}{3} \frac{\mu_0}{\text{Re}_0}$$

$$p_0 + M(w_0 - \varphi) - \mu_0^* \frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + M^2$$

$$h_0 + \frac{(w_0 - \varphi)^2}{2} - \frac{\mu_0^*}{M} (w_0 - \varphi) \frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{\lambda_0^*}{M} \frac{\partial h_0}{\partial z} = h_{0\infty} + \frac{(w_{0\infty} - \varphi)^2}{2}$$

$$p = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \rho h, \quad \lambda^* = \frac{\mu}{\text{Re}_0 \text{Pr}}, \quad \mu^* = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\text{Re}_0}, \quad \text{Re}_0 = \text{Re}_\infty T_\infty^*$$

Граничное условие на волне для функции p_1 получается из соотношения

$$p = \mu^* \partial v(3) / \partial \xi + p_\infty + m^2 (1 - 1/\rho)$$

$$m = w_\infty(3) \rho_\infty$$

и имеет вид

$$p_1 = -\mu_0^* \kappa^2 \frac{\partial w_0}{\partial z} - 2\mu_0^* \kappa \frac{\partial u_0}{\partial z} + \left(1 - \frac{1}{\rho_0}\right) (K_s^2 \sin \beta + v_{2f}), \quad v_{2f} = \frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0. \quad (2.3)$$

Последнее условие есть условие эквидистантности отхода волны.

Уравнения вязкого ударного слоя для членов разложений (2.1) сводятся к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial E(g)}{\partial t} + \frac{\partial A(g)}{\partial z} + B(g) = \frac{\partial}{\partial z} C(g) \frac{\partial g}{\partial z} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = 2K\rho u^2, \quad p = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \rho h \quad (2.5)$$

Здесь g — искомая вектор-функция с компонентами $g = (u, v, w, \rho, h)^T$. Компоненты E_i, A_i, B_i, C_{ij} векторов A, B, E и матрицы C — известные функции от g

$$E_1 = \rho u, \quad E_2 = \rho v, \quad E_3 = \rho w \varepsilon_{TS}, \quad E_4 = \rho, \quad E_5 = \rho \left(\frac{h}{\gamma} + \varepsilon_{TS} \frac{w^2}{2} \right)$$

$$A_1 = \rho u w, \quad A_2 = \rho v w, \quad A_3 = p + \varepsilon_{TS} \rho w^2, \quad A_4 = \rho w \quad (2.6)$$

$$A_5 = \rho w H, \quad H = h + \frac{v^2}{2} + \varepsilon_{TS} \frac{w^2}{2}$$

$$B_1 = \rho u^2 + p_1, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \rho u w \varepsilon_{TS}, \quad B_4 = \rho u$$

$$B_5 = \rho u H - \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu}{\text{Re}_0} \left(\frac{4}{3} w \frac{\partial w}{\partial z} \varepsilon_{TS} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]$$

$$C_{ij} = 0, \quad i \neq j; \quad C_{22} = C_{11} = \frac{\mu}{\text{Re}_0}, \quad C_{44} = 0, \quad C_{55} = \frac{\mu}{\text{Re}_0 \text{Pr}},$$

$$C_{33} = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\text{Re}_0} \varepsilon_{TS}$$

Параметр $\varepsilon_{TS} = 0$ в случае модели ТВУС и $\varepsilon_{TS} = 1$ в общем случае. Для гиперзвуковых ударных слоев [1, 4, 5] модель ТВУС дает удовлетворительные результаты в областях большого сжатия, например в окрестности передней критической точки затупленного тела, в окрестности передней кромки крыла. В случае гиперзвукового обтекания наветренной части по-

верхности с малыми кривизнами [6] требуется более полная модель ($\varepsilon_{TS}=1$). В настоящей работе расчет нестационарных эффектов вдува и нагрева проведен при $\varepsilon_{TS}=1$.

3. При сильном вдуве между поверхностью тела и вязким слоем смешения образуется так называемая зона невязкого пограничного слоя. В [11] было найдено аналитическое решение уравнений невязкого пограничного слоя около крыла при стационарном течении. В [8] получено решение нестационарных уравнений в окрестности критической точки вращающегося тела. Данное решение уравнений невязкого пограничного слоя около критической линии крыла при нестационарном вдуве и нагреве получено по аналогии с [8].

Давление $p(t)$ и градиент давления $p_1(t)$ предполагаем заданными. Начальные условия (1.2) соответствуют решению стационарной задачи

$$\begin{aligned} \rho^\circ(z) &= \frac{\gamma p(0)}{(\gamma-1)h_w(0)}, & h^\circ(z) &= h_w(0), & v^\circ(z) &= v_*(0), & \frac{du^\circ}{dz} &= -c_1 w^\circ \\ \frac{d^2 u^\circ}{dz^2} &= c_1 u^\circ, & u^\circ(0) &= u_*(0), & \frac{du^\circ(0)}{dz} &= -c_1 w_*(0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$c_1 = (u_*(0)^2 + p_1(0)/\rho^\circ)/w_*(0)^2$$

Очевидно, что при любой величине c_1 функции $u^\circ(z)$, $w^\circ(z)$ находятся из (3.1) в явном виде.

Решение нестационарных уравнений невязкого пограничного слоя представляется в виде

$$\begin{aligned} v(t, z) &= v_*(\tau), & \rho(t, z) &= \rho_w(\tau) \left(\frac{p(t)}{p(\tau)} \right)^{1/\gamma} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{p(t)^{1/\gamma} p(\tau)^{1-1/\gamma}}{h_w(\tau)} \\ h(t, z) &= \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{p(\tau)}{\rho_w(\tau)} \left(\frac{p(t)}{p(\tau)} \right)^{1-1/\gamma} = h_w(\tau) \left(\frac{p(t)}{p(\tau)} \right)^{-1-1/\gamma} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Функция u является решением уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} + u^2 + A(s, \tau) &= 0 \\ A(s, \tau) &= B_1(\tau) B_2(s), & B_1(\tau) &= \frac{(\gamma-1)}{\gamma} h_w(\tau) p(\tau)^{(1/\gamma)-1} \\ B_2(s) &= p_1(s) p(s)^{-1/\gamma} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) интегрируется при условии

$$u|_{s=\tau} = u_*(\tau) \quad (3.4)$$

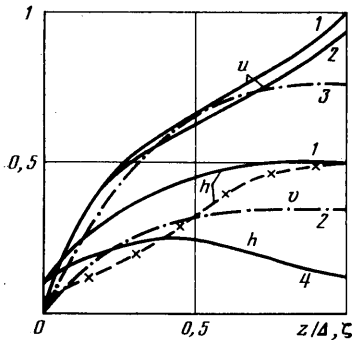
Решение задачи (3.3), (3.4) позволяет найти $u(t, z)$. При различных $B_2(s)$ функция u выражается через элементарные либо специальные функции (см. [12]). Для функции $z(t, \tau)$ получено

$$\begin{aligned} z(t, \tau) &= w_*(\tau) \int_{\tau}^t \exp \left[- \int_{\xi}^t (f(\eta) + u(\eta, \xi)) d\eta \right] d\xi \\ f(t) &= \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dt} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формулы (3.2), (3.5) позволяют найти решение в области около поверхности крыла $0 \leq z \leq z_0(t)$, которая ограничена характеристикой $z_0(t)$, проходящей через точку $(0, 0)$.

Решение в области $z > z_0(t)$ определяется начальными данными и находится аналогично.

4. Численное решение задачи (2.2)–(2.6) проводилось неявным конечно-разностным методом с использованием итераций. Сначала проводилось решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя (см. (2.5), (2.6)) при $t=0$ по методу, изложенному в [5]. Полученное решение использовалось в качестве начальных данных для расчетов ударного слоя при $\epsilon_{TS}=1$. Применялся конечно-разностный метод [8], основанный на дивергентной записи уравнений, линеаризации по Ньютону с итерациями на каждом временном слое. Вектор приращения на каждой итерации находился из решения линейной системы уравнений с блочной трехдиагональной матрицей, которая решалась методом векторной прогонки.



Фиг. 1

$h_w(t)$. Некоторые результаты представлены на фиг. 1–3.

На фиг. 1 показано влияние угла скольжения на зависимости $h(z)$, $u(z)$ (сплошные линии), $v(z)$ (штрихпунктир) в случае стационарного обтекания. Для сопоставления с данными работы [7] штриховой линией приведена зависимость

$h(\xi)$ от массовой координаты $\xi = \int_0^z \rho dz / \int_0^0 \rho dz$ в случае $h_w=0,05$; $\beta_0=0$. Данные

[7] при тех же значениях внешних параметров нанесены точками. Кривые 1–4 относятся соответственно к значениям $\beta_0=0,20, 50, 60^\circ$. Видно образование локального максимума $h(z)$ при увеличении угла скольжения, что соответствует результатам [7].

На фиг. 2, 3 представлены результаты расчетов ударного слоя около крыла под углом скольжения $\beta_0=30^\circ$, $Re_0=50$, $M_\infty=10$, $Pr=0,71$.

Фигура 2 иллюстрирует результаты сравнения расчетов на основе моделей ТВУС (сплошные линии) и ВУС в случае вдува при $u_*=v_*=w_*=0,01$. Наибольшее различие в профилях плотности (кривые 1, 2). Распределения $h(z)$ (кривые 3, 4) близки. Штриховая линия 5 – зависимость $h(z)$ для модели ТВУС в случае $u_*=v_*=w_*=0$. Сравнение распределений $h(z)$ (линии 3–5) показывает отнесение пограничного слоя от поверхности крыла, обусловленное вдувом.

По расчетным данным различие моделей ТВУС и ВУС в тепловом потоке C_H и в коэффициенте трения вдоль кромки крыла C_{FV} составляют для данного варианта соответственно 13 и 16%, где

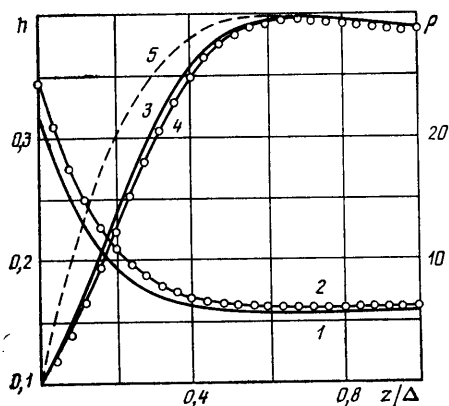
$$C_H(t) = \mu \partial h / \partial z |_{z=0} (\gamma - 1) M_\infty^2 / (\text{Pr} \sqrt{Re_0}),$$

$$C_{FV}(t) = \mu \partial v / \partial z |_{z=0} M_\infty^2 / \sqrt{Re_0}$$

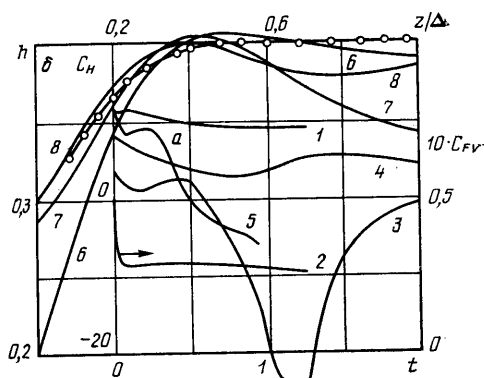
Проведены оценки времени выхода на стационарные режимы при изменении величины вдува. Например, при вдуве $u_*=v_*=w_*=0,03$, $t=0$ и $u_*=v_*=w_*=0,01$, $t>0$ установление теплового потока C_H с точностью около 4% происходит за время $t \approx 10$. Изменение $C_H(t)$ на отрезке времени $15 \leq t \leq 20$ составляет 0,3%.

Влияние различных нестационарных эффектов на течение приведено на фиг. 3. Зависимости от времени теплового потока $C_H(t)$ и составляющей коэффициента трения $C_{FV}(t)$ вдоль кромки крыла в случае включения вдува ($u_*=v_*=w_*=0$ при $t=0$, $u_*=v_*=w_*=0,01$ при $t>0$) показаны на фиг. 3, а кривыми 1, 2.

Влияние нестационарного охлаждения поверхности крыла иллюстрируется зависимостями $C_H(t)$ и $h(t, z)$. На фиг. 3, а кривая 3 соответствует $C_H(t)$ при изменении энтальпии поверхности по закону $h_w(t) = 0,2 + 0,1t$ ($0 \leq t \leq 1$), $h_w(t) = 0,3$ ($t > 1$). Кривые 4, 5 относятся к $C_H(t)$ при $h_w(t) = 0,1 + 0,2t$ ($0 \leq t \leq 1,1$), $h_w(t) = 0,31$ ($t > 1,1$) и $\beta_0 = 30,40^\circ$ соответственно. Кривые 6–8 на фиг. 3, б показывают эволюцию профилей $h(t_k, z)$, $t_1=0$, $t_2=0,86$, $t_3=1,36$. Данные для $t=1,86$ и $2,36$ нанесены штриховой линией и точками соответственно и близки друг к другу.



Фиг. 2



Фиг. 3

Проводилось сопоставление численного решения с приведенным выше аналитическим решением в случае сильного вдува, при этом градиент давления брался из численного решения. Результаты находятся в хорошем соответствии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головачев Б. П., Кузьмин А. М., Попов Ф. Д. О расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел с использованием полных и упрощенных уравнений Навье - Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13. № 4. С. 1021-1028.
2. Седов Л. И., Михайлова М. П., Черный Г. Г. О влиянии вязкости и теплопроводности на течение газа за сильно искривленной ударной волной // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1953. № 3. С. 95-100.
3. Афонина Н. Е., Власов А. Ю., Громов В. Г. Расчет течения в пространственном вязком ударном слое на удлиненных телах // Численные методы механики сплошной среды. 1983. Т. 14. № 3. С. 3-17.
4. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А. Гиперзвуковой вязкий ударный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 91-102.
5. Марков А. А. Исследование стационарного течения вязкого газа в тонком трехмерном ударном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 115-126.
6. Марков А. А. Режимы течения вязкого газа в тонком трехмерном ударном слое около поверхности с малыми кривизнами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 3. С. 161-164.
7. Гершбейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А. Численное исследование гиперзвукового вязкого ударного слоя на крыльях бесконечного размаха, обтекаемые под углами атаки и скольжения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 104-108.
8. Марков А. А. Вязкий ударный слой около критической точки вращающегося тела при нестационарном вдуве и охлаждении поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 114-122.
9. Ганнелл Дж. К., Венкатапати Э., Рэкич Дж. В. Расчет сверхзвукового вязкого обтекания затупленных треугольных крыльев // Ракетн. техника и космонавтика. 1982. Т. 20. № 3. С. 46-55.
10. Гершбейн Э. А., Щербак В. Г. К исследованию обтекания крыльев бесконечного размаха гиперзвуковым потоком разреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 150-154.
11. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пограничный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 27-39.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. С. 576.

Москва

Поступила в редакцию
23.XII.1985.