

УДК 532.546

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ ПРИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

АМЕТОВ А. М., АМЕТОВ И. М.

Теория многофазной фильтрации (см., например, [1–3]) основывается на концепции фазовых проницаемостей, которые определяют сопротивление движению каждой из фаз в зависимости от соотношения насыщенностей фазами порового пространства. При заданных соотношениях насыщенностей их равновесное распределение обуславливается действием капиллярных сил. При быстро протекающих процессах оказывается необходимым учитывать неравновесный характер перераспределения насыщенностей фаз при изменении внешних условий [4].

Рассматриваются три задачи двухфазных фильтрационных течений. В первых двух исследуются течения в области насыщенностей вблизи критического значения. Поскольку в этих условиях активная насыщенность и соответственно фазовая проницаемость одной из фаз малы, то учет запаздывания при перераспределении фаз оказывается существенным — становятся возможными такие типы течений, как нелинейные волны и локализованные структуры. В третьей задаче предполагается, что капиллярный скачок незначителен по сравнению с фазовыми давлениями. Показывается, что в этом случае также могут возникнуть локализованные структуры.

1. Система уравнений изотермической фильтрации двух взаимонерастворимых несжимаемых жидкостей имеет вид [1]

$$\mathbf{u}_i = - \frac{k k_i(s)}{\mu_i} \nabla p_i, \quad p_1 - p_2 = p_c(s) \quad (i=1, 2) \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = m \frac{\partial s}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = -m \frac{\partial s}{\partial t}$$

Здесь \mathbf{u}_i , $k_i(s)$, p_i — скорости фильтрации, относительные фазовые проницаемости и давления фаз; $p_c(s)$ — капиллярное давление, s — насыщенность порового пространства смачивающей фазой; индекс 1 относится к несмачивающей фазе.

Фазовая проницаемость $k_2(s)$ обращается в нуль при $s \leq s_*$, где s_* — критическая насыщенность, которая, вообще говоря, может быть различной при пропитке и вытеснении. Исследование фильтрации двух жидкостей проводится в предположении, что $(s - s_*)/s_* \ll 1$, т. е. вблизи критической насыщенности смачивающей фазы. В этих условиях можно принять, что все характеристики движения несмачивающей фазы остаются постоянными. Ограничиваясь одномерным случаем, положим $\partial p_1 / \partial x = -\gamma = \text{const} < 0$. Тогда система (1.1) сводится к уравнению

$$\frac{m \mu_2}{k} \frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[k_2(y) \left(\gamma + \frac{d p_c}{d y} \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right], \quad y = s - s_* \quad (1.2)$$

Следуя [4], учтем в уравнении (1.2) запаздывание в перераспределении фаз, переписав его в виде

$$\frac{m \mu_2}{k} \frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[k_2(y) \left(\gamma + \frac{d p_c}{d y} \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right) \right) \right] \quad (1.3)$$

где τ — некоторая постоянная, имеющая размерность времени.

Заметим, что относительная фазовая проницаемость зависит также от скорости изменения насыщенности, однако учет этого обстоятельства лишь осложняет рассмотрение, не изменяя существа дела.

Из свойств зависимости капиллярного давления от насыщенности следует $p_c \rightarrow \infty$, $dp_c/dy \rightarrow -\infty$ при $y \rightarrow 0$. Аппроксимируем $k_2(y)$ и dp_c/dy степенными функциями переменной y

$$k_2(y) = y^n, \quad dp_c/dy = -ay^{-r}; \quad n, r > 1, \quad a > 0 \quad (1.4)$$

С учетом (1.4) уравнение (1.3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial y^n}{\partial \xi} - a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(y^{n-r} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) - a_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(y^{n-r} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \theta} \right) = 0 \quad (1.5)$$

$$\theta = \frac{k\gamma}{lm\mu_2} t, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad a_1 = \frac{a}{l\gamma}, \quad a_2 = \frac{a\tau k}{l^2 m\mu_2}$$

где l — характерный пространственный масштаб. В дальнейшем будем предполагать справедливыми условие $n=r$ или $n-r \geq 1$. При этом уравнение (1.5) не содержит сингулярностей и описывает нелинейные волновые движения с диссипацией. Отметим, что при $n=r=2$ свойства этого уравнения в некотором смысле аналогичны свойствам уравнения Бюргерса — Кортевега — де Вриза.

Используя уравнение (1.5), рассмотрим процессы вытеснения и пропитки. При этом возможны некоторые упрощения. Если исследуется процесс вытеснения, то третьим слагаемым в уравнении (1.5), описывающим диссипацию, можно пренебречь по сравнению со вторым, так как вблизи критического значения насыщенности давление в вытесняемой фазе намного превышает капиллярное. Поэтому в данном случае получается

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial y^n}{\partial \xi} - a_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(y^{n-r} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \theta} \right) = 0 \quad (1.6)$$

Для пропитки неравенство будет иметь обратный вид и вместо (1.5) запишем

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} - a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(y^{n-r} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) - a_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(y^{n-r} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \theta} \right) = 0 \quad (1.7)$$

2. Рассмотрим случай вытеснения (уравнение (1.6)). При $n=r=2$ стационарное решение уравнения (1.6), зависящее от переменной $\xi - V\theta$ (V — скорость волны), имеет вид [5]

$$y = y_2 - (y_1 - y_2) \operatorname{cn}^2 [(\xi - V\theta)R, q] \quad (2.1)$$

$$R = [(y_1 - y_3)/6a_2 V]^{1/2}, \quad q^2 = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)^{-1}$$

$$V = {}^{2/3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

при условии, что полином $y^3 + {}^{3/2}Vy^2 + c_1y + c_2$ (c_1, c_2 — константы интегрирования) имеет три разных корня, связанных соотношением $0 < y_3 < y_2 < y_1$. Эллиптическая функция $\operatorname{cn}^2(u, q)$ колеблется между нулем и единицей с периодом $2K(q)$, где $K(q)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Следовательно, $y(\xi - V\theta)$ колеблется между y_2 и y_1 с периодом $2R^{-1}K(q)$. При $y_2 = y_3$ решение приобретает вид уединенной волны (солитона)

$$y = y_2 + (y_1 - y_2) \operatorname{sech}^2 [R(\xi - V\theta)] \quad (2.2)$$

Солитон (2.2) имеет ширину $\sim R^{-1}$, скорость распространения $V = {}^{2/3}(y_1 + 2y_2)$ и амплитуду $y_1 - y_2$. Таким образом, при вытеснении жидкости в пористой среде в области малых отклонений от критического значения

изменение насыщенности вытесняемой фазы может иметь характер как периодической, так и уединенной волны.

Рассмотрим случай произвольных n и r . Вновь будем искать решение в виде

$$y(\theta, \xi) = y(\zeta), \quad \zeta = \xi - V\theta \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (1.6), получим

$$-Vy' + (y^n)' + a_2 V (y^{n-r} y'')' = 0 \quad (2.4)$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\frac{a_2 V}{2} (y')^2 = \frac{V}{r+2-n} y^{r+2-n} - \frac{1}{r+1} y^{r+1} + \frac{c_1}{r+1-n} y^{r+1-n} + c_2, \quad n-r \neq 1, 2 \quad (2.5)$$

$$\frac{a_2 V}{2} (y')^2 = Vy - \frac{1}{n} y^n + c_1 \ln y + c_2, \quad n-r=1 \quad (2.6)$$

$$\frac{a_2 V}{2} (y')^2 = V \ln y - \frac{1}{n-1} y^{n-1} - c_1 y^{-1} + c_2, \quad n-r=2 \quad (2.7)$$

Непосредственный анализ показывает, что уравнения (2.5)–(2.7) также имеют решения в виде уединенных волн и периодических функций. Можно получить оценку для скорости распространения волны. Полагая, например, в (2.5) $c_1 = c_2 = 0$, что соответствует нулевым условиям на бесконечности, получим $V = (r+2-n)/(r+1) y_{\max}^{n-1}$.

Уравнение (1.6) может быть записано в виде законов сохранения. Для этого перепишем его, преобразовав последний член. В линеаризованном уравнении без учета дисперсии ($a_2 = 0$) скорость волны $V_0 = n y_0^{n-1}$, где y_0 – характерный масштаб. Переходя в систему координат, движущуюся со скоростью V_0 , и используя приближенное соотношение $\partial/\partial\theta \approx -V_0 \partial/\partial\xi$, означающее, что рассматривается слабдеформируемая волна, преобразуем (1.6) к виду

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial y^n}{\partial \xi} + a_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(y^{n-r} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta \partial \xi} \right) = 0, \quad a_0 = a_2 V_0 \quad (2.8)$$

Выпишем для уравнения (2.8) два первых закона сохранения. Первая форма следует непосредственно из (2.8)

$$-\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial y}{\partial \theta} d\xi = \left(y^n + a_2 y^{n-r} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\xi_1}^{\xi_2}$$

Для получения второго закона сохранения умножим (2.8) на y^{r+1-n} . Опуская выкладки, находим

$$-\frac{1}{r+2-n} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial y^{r+2-n}}{\partial \theta} d\xi = \left[\frac{n}{r+1} y^{r+1} + a_0 y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - a_0 \frac{r+1-n}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] \Big|_{\xi_1}^{\xi_2}$$

При некоторых значениях n и r можно получить решение уравнений (2.5) или (2.6) в замкнутой форме. Так, например, при $n=r=3$ и условии $c_1 = c_2 = 0$ решение имеет вид

$$Y = \frac{4V \exp(\xi/\sqrt{a_2 V})}{2V \exp(2\xi/\sqrt{a_2 V}) + 1}$$

где скорость движения волны связана с ее амплитудой y_m соотношением $V = \frac{1}{2} y_m^2$.

При $n=2$, $r=1$, $c_1=c_2=0$ решение имеет периодический характер: $y = V [1 + \sin(\xi/\sqrt{a_2 V})]$, $V = 0,5 y_m$, где y_m — амплитуда колебаний.

На основе полученных решений можно произвести некоторые оценки. Пусть $y_1 \sim 10^{-1}$, $y_2 = y_3 = 0$. Для периода волны имеем

$$T \sim \frac{l m \mu_2}{V k \gamma} \sim \frac{10 m \mu_2}{s_* k \gamma} \left(\frac{\tau \sigma}{\mu_2} \sqrt{\frac{k}{m}} \right)^{1/2}$$

Полагая $m \sim 10^{-1}$, $\mu_2 \sim 10^{-3}$ Па·с, $\sigma \sim 10^{-2}$ Н/м, $s_* \sim 10^{-1}$, $k \sim 10^{-13}$ м², $\gamma \sim 10^{-1}$ МПа/м, получаем $T \sim 10^3 \sqrt{\tau}$ с.

Для ширины солитона при тех же условиях находим

$$\lambda \sim l \sqrt{\frac{6 a_2 V}{y_1 - y_2}} \sim \left(\frac{\tau \sigma}{\mu_2} \sqrt{\frac{k}{m}} \right)^{1/2} \sim 10^{-2} \sqrt{\tau} \text{ см}$$

Из общих свойств уравнения Бюргерса — Кортевега — де Вриза следует, что существует некоторая критическая величина a_* , такая, что при $a_2 < a_*$ решение имеет солитонный характер, а при выполнении обратного неравенства — характер волновых пакетов. Если решение имеет солитонный характер, то начальный профиль распадается на систему солитонов, число которых $N \sim a_2^{-1}$.

Решение уравнения (1.5) при $n=r=2$ в виде ударной волны, распространяющейся со скоростью V , имеет при $V < V^* = 0,5 (a m \mu_2 / \gamma \tau k)^{1/2}$ монотонный характер, а при $V > V^*$ осциллирующий.

3. Рассмотрим теперь пропитку (уравнение (1.7)). При отсутствии релаксации, т. е. при $a_2 = 0$ и условии $n > r + 1$, скорость распространения возмущений конечна. Различные решения такого типа приведены в [6]. Отличительным свойством уравнений типа (1.7) является то, что они обладают решениями в виде диссипативных локализованных структур [7]. При $a_2 = 0$ такие решения возможны при определенном характере граничных условий — в «граничном режиме с обострением» [7, 8], когда за конечный промежуток времени граничные значения решения стремятся к бесконечности, а само решение остается постоянным вне некоторой области, примыкающей к границе. В случае полного уравнения (1.7) такие решения возникают при конечных значениях граничных функций, но при этом режим с обострением реализуется для временной производной. Эти решения можно назвать режимами слабого обострения.

Рассмотрим решение уравнения (1.7) в виде $y = T(\theta) X(\xi)$. Подстановка в (1.7) и разделение переменных дает

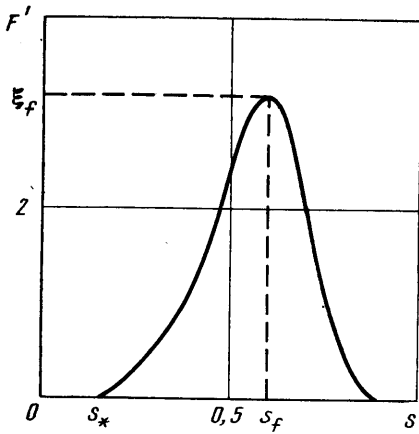
$$\frac{T'}{a_1 T^{n-r+1} + a_2 T^{n-r} T'} = \frac{(X^{n-r} X')'}{X'} = \alpha = \text{const} \quad (3.1)$$

Решения уравнений (3.1) имеют вид

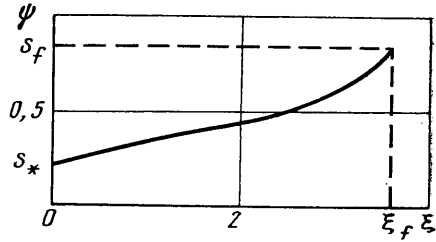
$$X(\xi) = \begin{cases} (1 - \xi/\xi_0)^{2/(n-r)}, & 0 \leq \xi \leq \xi_0 \\ 0, & \xi_0 < \xi \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\xi_0 = \frac{2}{n-r} \sqrt{\frac{n-r+2}{2\alpha}}, \quad \frac{T^{r-n}}{a_1 \alpha (n-r)} + \frac{a_2}{a_1} \ln T = -\theta$$

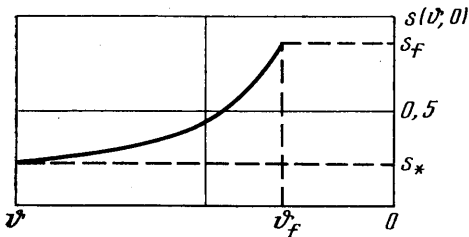
Из второго соотношения (3.2) следует, что $\alpha > 0$. В силу условий $n > r$, $\alpha > 0$ имеем начальное условие $T(-\infty) = 0$.



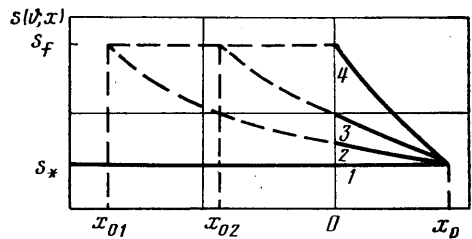
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Можно убедиться, что функция $T(\theta)$ как решение уравнения (3.1) существует до момента времени

$$\theta_* = \frac{a_2}{a_1(n-r)} (-1 + \ln a_2\alpha)$$

При $\theta \rightarrow \theta_*$ имеем $T' \rightarrow \infty$, $T \rightarrow T_{\max} = (a_2\alpha)^{1/(r-n)} < \infty$. Соответственно $\theta_* < 0$ при $\ln a_2\alpha < 1$; $\theta_* = 0$ при $\ln a_2\alpha = 1$; $\theta_* > 0$ при $\ln a_2\alpha > 1$. Очевидно, что $T' > 0$ при $\theta < \theta_*$. Константа α определяется из граничного режима $y(\theta, 0) = T(\theta)$ по максимальному значению $\alpha = a_2^{-1} T_{\max}^{r-n}$. Таким образом, вид граничной функции $T(\theta)$ определяет размер зоны ξ_0 , в которой локализовано решение.

4. Рассмотрим вытеснение при крупномасштабном описании. В одномерном случае оно описывается уравнением Баклея — Леверетта [6]

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + v(t) F'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad F(s) = \frac{\mu_2 k_1(s)}{\mu_2 k_1(s) + \mu_1 k_2(s)} \quad (4.1)$$

Здесь $v(t)$ — суммарная скорость фильтрации обеих фаз, $F(s)$ — функция Баклея — Леверетта, выражающая долю несмачивающей фазы в общем потоке. На фиг. 1 показан общий вид функции $F'(s)$, исходя из которого можно построить локализованное решение уравнения (4.1). Перепишем (4.1) в виде

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} + \mp' (s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \theta = - \int_0^s v(\alpha) d\alpha \quad (4.2)$$

Построим функцию $\psi(\xi)$, обратную левой ветви $F'(s)$ (фиг. 2). Можно проверить, что функция $s(\theta, x) = \psi(-(x_0 - x)/\theta)$ будет решением уравнения (4.2) до момента времени $\theta_f = -x_0/\xi_f$. На фиг. 3, 4 приведены граничный режим изменения насыщенности $s(\theta, 0)$ (фиг. 3) и распределения

насыщенности $s(\theta, x)$ (фиг. 4) в моменты времени $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_f$ (кривые 1-4), где $-\infty < \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_f$; $x_{0i} = x_0 - \xi_f(-\theta_i)$, $i=1, 2$. Видно, что насыщенность на границе растет в режиме слабого обострения:

$$s(\theta, 0) \rightarrow s_f, \quad \partial s(\theta, 0)/\partial \theta \rightarrow \infty \quad \text{при } \theta \rightarrow \theta_f.$$

Отметим, что если $n > 2$ (см. формулу (1.4)), то при приближении к правому концу зоны локализации неограниченно возрастает модуль градиента насыщенности: $\partial s(\theta, x)/\partial x \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow x_0$. Можно показать (аналогично исследованию при мелкомасштабном описании переходной зоны, соответствующей скачку насыщенности в задаче Баклея — Леверетта [6]), что в окрестности точки x_0 находится узкая область с быстро меняющейся насыщенностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат. 1963. 396 с.
2. Розенберг М. Д., Кундин С. А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. М.: Недра. 1976. 335 с.
3. Хейфец Л. И., Неймарк А. В. Многофазные процессы в пористых средах. М.: Химия, 1982. 319 с.
4. Баренблатт Г. И. Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 144—151.
5. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
6. Баренблатт Г. И., Енгов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
7. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1344—1347.
8. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982. С. 317—343.

Москва
Ухта

Поступила в редакцию
6.VIII.1986