

УДК 532.546

МЕТОД ЛОКАЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ РАСЧЕТА ОДНОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

ЗАВОВСКИЙ А. Ф., МУСИНОВ И. В.

Рассматриваются процессы вытеснения одной жидкостью другой в пористой среде, для которых соответствующие решения задачи Баклея — Леверетта [1] оказываются неавтомодельными из-за неоднородности начальных и (или) граничных условий [2]. Традиционный подход к решению таких задач заключается в использовании конечно-разностных методов или метода характеристик в различных модификациях. Однако конечно-разностные методы искажают решения вследствие «размазывания» скачков, а метод характеристик (в аналитическом варианте — для задач с кусочно-постоянными начальными и граничными условиями или в численном варианте — для задач с условиями общего вида) становится труднореализуемым, если число выделяемых фронтов (волн) оказывается велико.

Ниже предлагается свободный от указанных недостатков приближенный метод решения таких задач, сочетающий в себе автоматическое выделение фронтов с простотой реализации вычислительной процедуры на ЭВМ. Метод основан на кусочно-линейной аппроксимации функции распределения потоков $F(s)$ (функции Баклея — Леверетта) [3] и кусочно-постоянной аппроксимации начальных и граничных условий соответственно по координате и по времени. При этом все решения строятся из конечного набора «элементов» двух типов — участков постоянства насыщенности s , принимающей дискретные значения, и скачков, распространяющихся с постоянными скоростями. Алгоритм расчета сводится к дискретному по времени перемещению скачков и учету их взаимодействий. Результат каждого взаимодействия определяется локально автомодельным решением соответствующей задачи Баклея — Леверетта, которое находится путем элементарных легко формализуемых графических построений в плоскости (s, F) . Приводятся примеры, иллюстрирующие возможности метода. Методика расчета обобщается на случай вытеснения нефти водой из слоистых пластов без учета перетоков и площадных элементов разработки методом жестких трубок тока. Развитый подход, по существу, представляет собой одномерный вариант метода зональной линеаризации для решения двумерных задач двухфазной фильтрации [4], в котором кусочно-постоянная аппроксимация поля насыщенности используется для упрощения расчета давления.

1. Задача Баклея-Леверетта. Рассмотрим вытеснение нефти водой из пласта в виде укрупненной трубки тока площадью поперечного сечения $A(x)$, $0 \leq x \leq L$. Уравнения движения и неразрывности для воды и нефти имеют вид

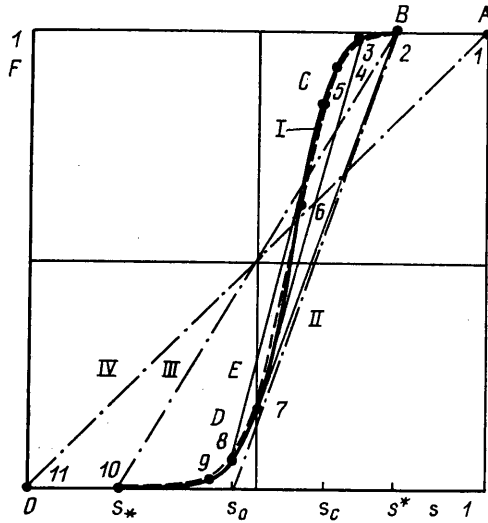
$$v_i = -k \frac{f_i(s)}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (i=1, 2) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (msA) + \frac{\partial}{\partial x} (Av_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} [m(1-s)A] + \frac{\partial}{\partial x} (Av_2) = 0$$

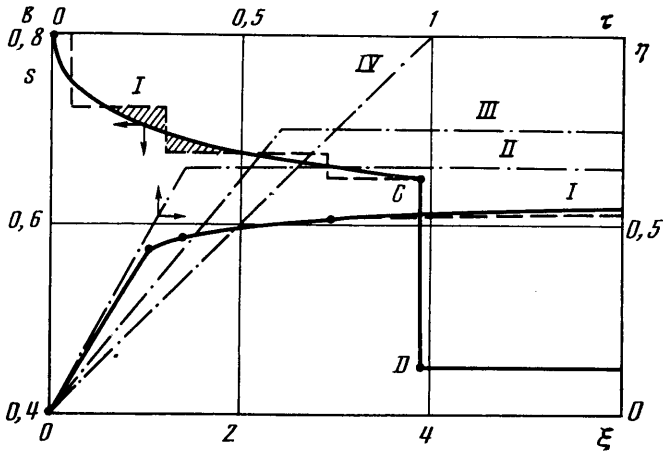
Здесь s — водонасыщенность; m — пористость; k — проницаемость; p — давление; v_i , f_i и μ_i — скорость, относительная фазовая проницаемость и вязкость воды ($i=1$) и нефти ($i=2$); t — время.

Исключая из (1.1) обычным образом давление и скорости и переходя к безразмерным переменным, получим уравнение Баклея — Леверетта

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial F(s)}{\partial X} = 0 \quad (0 \leq X \leq 1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$X = \frac{1}{V_p} \int_0^x m A(x') dx', \quad \tau = \frac{1}{V_p} \int_0^t Q(t') dt', \quad V_p = \int_0^L m A(x) dx \quad (1.2)$$

$$Q(t) = U(t, x) A(x), \quad U = v_1 + v_2, \quad F(s) = \frac{f_1(s)}{\mu_1} \left[\frac{f_1(s)}{\mu_1} + \frac{f_2(s)}{\mu_2} \right]^{-1}$$

Здесь $F(s)$ — функция Баклея — Леверетта, равная объемной доле воды в потоке; Q — расход жидкости, закачиваемой в пласт; U — суммарная скорость фильтрации воды и нефти; V_p — поровый объем пласта. Безразмерные переменные X и τ имеют смысл объема пласта от его входного сечения $x=0$ до текущего значения координаты x и объема закачанной в пласт жидкости, отнесенных к V_p .

Процессу вытеснения нефти водой соответствует решение уравнения (1.2) при начальных и граничных условиях

$$s(X, 0) = s_0, \quad s(0, \tau) = s^0 \quad (1.3)$$

где s_0 — начальная водонасыщенность пласта, а $s^0 = 1$.

Задача (1.2), (1.3) имеет автомодельное решение

$$\begin{aligned} s &= s(\xi), \quad \xi = X/\tau \\ \xi &= dF/ds = F'(s), \quad s_c \leq s \leq 1 \\ s &= s_0, \quad \xi > \xi_c = F'(s_c) = [F(s_c) - F(s_0)] / (s_c - s_0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

типичный вид и процедура построения которого в плоскости (s, F) показаны на фиг. 1, 2 (сплошными линиями). В точке C ($s = s_c$) отрезок CD , отвечающий скачку насыщенности, касается кривой $F(s)$.

Сходным образом строятся решения задачи (1.2), (1.3) при произвольных значениях s_0 и s° из диапазона изменения насыщенности ($0 \leq s \leq 1$). Они «склеиваются» из элементов трех типов: участков непрерывного изменения s (для краткости — волн), участков постоянства s (вырожденных волн) и скачков. Процедура построения решения $s(\xi)$ сводится к построению его образа в плоскости (s, F) — «пути» [5] или кривой $F = W(s)$, соединяющей точки $M^\circ = (s^\circ, F(s^\circ))$ и $M_0 = (s_0, F(s_0))$ и удовлетворяющей следующим требованиям: 1) путь может состоять из участков кривой $F(s)$, отвечающих волнам, и прямолинейных отрезков, соответствующих скачкам; 2) прямолинейные отрезки не должны пересекать кривой $F(s)$ в промежуточных точках, они могут находиться над кривой $F(s)$ при $s^\circ > s_0$ либо под ней при $s^\circ < s_0$; 3) угловой коэффициент $\beta(s) = dW(s)/ds$ вдоль пути должен возрастать от точки M° к точке M_0 .

Если путь, удовлетворяющий этим требованиям, построен, то зависимость $s(\xi)$ восстанавливается из соотношения $\xi = \beta(s)$. Таким образом, скорость переноса фиксированного значения насыщенности $s = s^*$ в волне равна $F'(s^*)$, т. е. угловому коэффициенту касательной к кривой $F(s)$ в точке $s = s^*$, а скорость скачка совпадает с угловым коэффициентом соответствующего ему отрезка прямой. Последнее непосредственно следует из условия материального баланса на скачке для уравнения (1.2)

$$V = \frac{dX_j}{d\tau} = \frac{F(s^+) - F(s^-)}{s^+ - s^-}, \quad s^\pm = s(X_j \pm 0, \tau) \quad (1.5)$$

Здесь X_j и V — координата и скорость скачка, а s^- и s^+ — значения насыщенности за и перед скачком.

Угловым точкам пути соответствуют вырожденные волны: $s(\xi) = s' = \text{const}$, где ξ изменяется от $\beta(s' - 0)$ до $\beta(s' + 0)$.

Автомодельность решений, рассмотренных выше, обусловлена постоянством s_0 по координате и s° по времени. Если $s_0 = s_0(X)$ и (или) $s^\circ = s^\circ(\tau)$, то решение уже не является автомодельным. При этом скачки могут распространяться с переменными скоростями, а структура решения, под которой здесь понимается последовательность чередования волн, вырожденных волн и скачков, может изменяться со временем. Процедура построения решений методом характеристик при большом числе взаимодействующих скачков и волн становится чрезвычайно трудно формализуемой.

2. Переход к дискретной задаче. Заменяем гладкую S-образную кривую $F(s)$ кусочно-линейной, угловые точки которой $s = s_j$ ($j = 1, \dots, N$) находятся на кривой $F(s)$. Обозначим их ординаты через $F_j = F(s_j)$.

Пусть сначала $s_0 = \text{const}$ и $s^\circ = \text{const}$, а точки C , B и D на фиг. 1 принадлежат множеству $\{s_j, F_j\}$. Решение соответствующей задаче Баклея — Леверетта показано штриховой линией на фиг. 2. Автомодельная координата каждого скачка ξ_j (или его скорость V_j) определяется формулой (1.5), где $s^- = s_j$, $s^+ = s_{j+1}$, $F(s^-) = F_j$, $F(s^+) = F_{j+1}$.

Построенное для новой функции $F(s)$ автомодельное решение называется далее приближенным. Оно обладает следующим замечательным свойством: участки непрерывного изменения насыщенности $s(\xi)$ аппроксимируются кусочно-постоянными распределениями, сохраняющими неизмен-

ными средние значения насыщенности. Действительно, рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\xi^-}^{\xi^+} s(\xi) d\xi, \quad \xi^\pm = F'(s^\pm) \quad (2.1)$$

где s^+ и s^- принимают соседние дискретные значения из диапазона $s_0 \leq s \leq s_B$ (см. фиг. 1, а).

Для непрерывного на участке $0 < \xi < \xi_c$ решения, интегрируя в (2.1) по частям, находим

$$I = s(\xi) \xi \Big|_{\xi^-}^{\xi^+} - \int_{s^-}^{s^+} F'(s) ds = s^+ F'(s^+) - s^- F'(s^-) - F(s^+) + F(s^-) \quad (2.2)$$

Для разрывного решения имеем

$$I = \int_{\xi^-}^{\xi_j} s^- d\xi + \int_{\xi_j}^{\xi^+} s^+ d\xi = s^-(\xi_j - \xi^-) + s^+(\xi^+ - \xi_j) \quad (2.3)$$

Подставляя в (2.3) $\xi^\pm = F'(s^\pm)$ и $\xi_j = (F^+ - F^-)/(s^+ - s^-)$, получаем выражение, стоящее в правой части (2.2). Таким образом, величины I одинаковы для точного и приближенного решений и потому одинаковы средние значения насыщенности $s^* = I(\xi^+ - \xi^-)^{-1}$ на каждом отрезке $[\xi^-, \xi^+]$. Геометрически это свойство приближенного решения задачи Баклея — Леверетта выражается в том, что площади двух заштрихованных криволинейных треугольников на фиг. 2, примыкающих к каждому скачку, равны между собой. Отсюда следует важный вывод: зависимость коэффициента вытеснения нефти от объема закачки

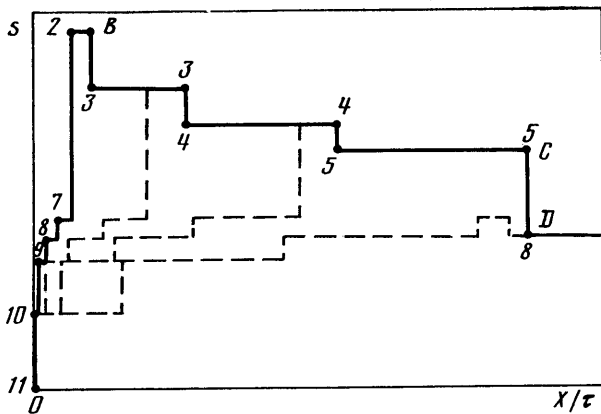
$$\eta(\tau) = \frac{S - s_0}{1 - s_0}, \quad S = \int_0^{\xi_L} s(\xi) d\xi, \quad \xi_L = \frac{1}{\tau} \quad (2.4)$$

для приближенного решения будет кусочно-линейной аппроксимацией точной зависимости $\eta(\tau)$, совпадающей с ней в узлах $\tau_j = 1/F'(s_j)$ ($j=1, \dots, N'$). На фиг. 2 этим зависимостям соответствуют сплошная и штриховая кривые I .

Рассмотрим теперь другую задачу. Пусть по-прежнему $s_0 = \text{const}$, а s° , начиная с некоторого момента времени $\tau = \tau^\circ$, скачком изменяется от 1 до 0. Это соответствует, например, закачке в пласт оторочки воды с последующим непрерывным нагнетанием нефти.

В момент времени $\tau = \tau^\circ - 0$ распределение насыщенности в пласте описывается автомодельным решением (1.4). При $\tau = \tau^\circ + 0$ на границе пласта возникает скачок насыщенности интенсивностью $[s] = s^+ - s^- = s_B - 0$. Его распад определяется автомодельным решением задачи (1.2), (1.3) где $s_0 = s_B$, $s^\circ = 0$. Соответствующий этому решению путь в плоскости (s, F) имеет вид кривой $ODEB$ (фиг. 1), причем в точке E отрезок BE касается ломаной, аппроксимирующей функцию $F(s)$. До тех пор, пока возмущения распространяются в области постоянства насыщенности $s = s_B$, распределение $s(X, \tau)$ в пласте имеет вид, показанный сплошными линиями на фиг. 3.

При этом в прилегающей к входному сечению $X=0$ части пласта распределение насыщенности является локально автомодельным относительно переменной $\xi' = X/(\tau - \tau^\circ)$. Все скачки по-прежнему распространяются с постоянными скоростями. Однако скорость скачка ($7 \rightarrow 2$) больше скорости скачка ($2 \rightarrow 3$), поэтому в некоторый момент времени первый догонит второй. Результат взаимодействия будет определяться решением задачи



Фиг. 3

Баклея — Леверетта с условиями $s_0 = s_3$, $s^\circ = s_7$ (фиг. 1). Новый скачок ($7 \rightarrow 3$) будет распространяться с еще большей скоростью, чем скачок ($7 \rightarrow 2$), и со временем догонит скачок ($3 \rightarrow 4$); а образовавшийся при этом скачок ($7 \rightarrow 4$) догонит скачок ($4 \rightarrow 5$) и т. д. Эволюция распределения $s(X, \tau)$ показана штриховыми линиями на фиг. 3.

Таким образом, можно было бы проследить весь дальнейший ход вытеснения. Однако определяющим обстоятельством является не возможность его предсказания в данном конкретном случае, а достигаемая при этом универсальность описания приближенного решения.

Отметим, что теперь достаточно «помнить» лишь координаты всех скачков и значения насыщенности на них; все скачки распространяются с постоянными скоростями; моменты времени, отвечающие взаимодействиям скачков, находятся из элементарных соотношений; результат взаимодействия (или распада) скачков определяется путем простых графических построений в плоскости (s, F) . Все это позволяет полностью автоматизировать процедуру построения решений для произвольных начальных и граничных условий.

3. Алгоритм построения решений. Пусть зависимости $s_0(X)$ и $s^\circ(\tau)$ произвольны. Заменим их кусочно-постоянными функциями соответственно координаты и времени. Затем аппроксимируем функцию $F(s)$ кусочно-линейной кривой, включив в число узлов $\{s_j, F_j\}$ ($j=1, 2, \dots, N$) дискретные значения s_0 и s° . В каждый момент времени будем характеризовать распределение водонасыщенности в пласте координатами скачков $X_i(\tau)$ ($i=1, 2, \dots, M(\tau)$) в порядке их убывания и значениями насыщенности на них $s_i^\pm(\tau)$. При этом будем считать, что $X_1=1$ соответствует выходному сечению пласта, а $X_M=0$ — его входному сечению. Скорости скачков V_i определяются по формулам

$$V_1 = V_M = 0, \quad V_i = \frac{F_i^+ - F_i^-}{s_i^+ - s_i^-} \quad (i=2, \dots, M-1) \quad (3.1)$$

Расчет сводится к следующей последовательности действий.

1. В каждый момент времени $\tau = \tau'$ определяются два временных шага $\Delta\tau_1$ и $\Delta\tau_2$ таких, что $\tau' + \Delta\tau_1$ соответствует моменту времени, в который должно произойти изменение граничных условий, а $\tau' + \Delta\tau_2$ — ближайшему моменту времени взаимодействия двух скачков. Будем считать, что $\Delta\tau_1 = \infty$, если граничные условия не меняются. Значение $\Delta\tau_2$ находится по формуле

$$\Delta\tau_2 = \min_{\substack{i=1, \dots, M-2 \\ \{V_i < V_{i+1}\}}} \left(\frac{X_i - X_{i+1}}{V_{i+1} - V_i} \right) \quad (3.2)$$

Заметим, что множество $\{V_i < V_{i+1}\}$ во всех нетривиальных случаях пусто, так как $V_1 = 0$.

2. Далее находится максимальный шаг $\Delta\tau = \min(\Delta\tau_1, \Delta\tau_2)$, при котором насыщенности на скачках s_i^\pm не меняются, а координаты скачков вычисляются по формулам

$$X_i(\tau) = X_i(\tau') + V_i(\tau')(\tau - \tau'), \quad \tau' < \tau < \tau' + \Delta\tau$$

3. В момент времени $\tau = \tau' + \Delta\tau$ осуществляется перестройка решения. Для этого решается задача Баклея — Леверетта с соответствующими постоянными значениями s_0 и s° . Если при $\tau = \tau' + \Delta\tau$ происходит взаимодействие i -го и $(i+1)$ -го скачков, то $s_0 = s_i^+$ и $s^\circ = s_{i+1}^-$; если же происходит изменение граничных условий, то $s_0 = s_M^+$ и $s^\circ = s^\circ(\tau' + \Delta\tau)$. После этого вносятся коррективы в массивы $\{X_i\}$ и $\{s_i^\pm\}$ и делается переход к п. 1.

Расчет продолжается до тех пор, пока τ' меньше некоторого заданного безразмерного объема нагнетания τ^* .

Таким образом, алгоритм построения решения сводится к пошаговому изменению координат скачков и корректировке структуры решения при их взаимодействиях, обусловленных либо изменениями граничных условий, либо различием скоростей распространения скачков.

При программной реализации алгоритма удобным оказалось использование специальной конструкции, позволяющей избежать многократных построений пути в плоскости (s, F) при различных дискретных значениях s_0 и s° . Введем матрицу J_{ij} размерности $N \times N$, где N — число точек аппроксимации кривой $F(s)$. Будем считать, что индексы i и j определяют величины s_0 и s° : $s_0 = s_i$, $s^\circ = s_j$, где $i, j = 1, \dots, N$ и $i \neq j$. Заполним матрицу J_{ij} по следующему правилу. Предположим, что для каждой пары значений s_i и s_j известны решения задачи Баклея — Леверетта и соответствующие им пути в плоскости (s, F) , соединяющие точки (s_j, F_j) и (s_i, F_i) . Если путь состоит из одного прямолинейного отрезка, то положим $J_{ij} = j$. Если же он состоит из ломаной с числом звеньев большим или равным двум, то положим $J_{ij} = l$, где l — номер узла (s_l, F_l) , принадлежащего последнему звену пути, т. е. узла, непосредственно соединенного с концевой точкой пути (s_i, F_i) . После заполнения матрицы J_{ij} функция $F(s)$ в дальнейших расчетах больше не используется.

Матрица J_{ij} позволяет быстро устанавливать структуру решения соответствующей задачи Баклея — Леверетта для любых значений $s_i = s_0$ и $s_j = s^\circ$. Действительно, при $J_{ij} = j$ искомое решение — «ступенька», отвечающая скачкообразному изменению s от s_j до s_i . Если X_k — координата этого скачка, то $s = s_j$ при $X < X_k$ и $s = s_i$ при $X > X_k$. При $J_{ij} = l \neq j$ структура автомодельного решения устанавливается путем рекурсивного обращения к матрице J_{ij}

$$J_{ij} = l_1, \quad J_{l_1 j} = l_2, \dots, \quad J_{l_{k-1} j} = j \quad (3.3)$$

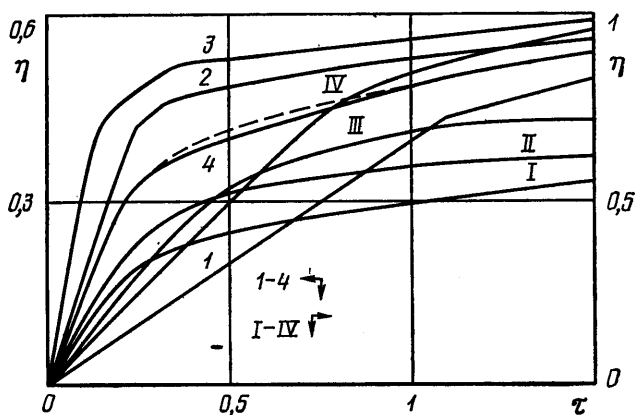
Полученная таким образом последовательность узлов с номерами $j, l_k, l_{k-1}, \dots, l_2, l_1, i$ определяет искомый путь в плоскости (s, F) .

Заполнение матрицы J_{ij} производится однократно для заданной функции $F(s)$ и выбранного способа ее кусочно-линейной аппроксимации, после чего процедура построения автомодельных и неавтомодельных решений задачи Баклея — Леверетта может быть полностью автоматизирована.

4. Результаты расчетов. Описанный метод был использован для модельных расчетов вытеснения легкой нефти (конденсата) водой из слоистого пласта методом жестких трубок тока. Относительные фазовые проницаемости для воды и нефти выбирались в виде

$$f_1 = \left(\frac{s-0,2}{0,8} \right)^3, \quad f_2 = \left(\frac{0,8-s}{0,8} \right)^3$$

где s — водонасыщенность.



Фиг. 4

Отношение вязкостей фаз μ_2/μ_1 принималось равным 0,1. Сжимаемостью фаз и влиянием изменения давления на вязкости пренебрегалось. Соответствующая функция распределения потоков (доля воды в двухфазном потоке) показана на фиг. 1. Она смещена вправо за счет малости отношения μ_2/μ_1 . Рассматривались четыре способа ее аппроксимации (фиг. 1): I — ломаной из десяти звеньев, II и III — ломаными из трех звеньев (модель псевдопоршневого вытеснения с остаточными насыщенностями), IV — отрезком прямой (модель поршневого вытеснения). В вариантах I—III остаточная конденсатонасыщенность $1-s_*=0,2$; в вариантах I и III остаточная водонасыщенность $s_*=0,2$, а в II $s_*=0,45$; в IV $1-s^*=s_*=0$.

На фиг. 2 показаны зависимости коэффициента вытеснения η от безразмерного объема закачки τ при вытеснении конденсата водой из однородного пласта. Видно, что моделям поршневого и псевдопоршневого вытеснения (кривые II—IV) соответствуют сильные завышения η , особенно после прорыва воды к выходному сечению пласта, а аппроксимация кривой распределения потоков $F(s)$ на ее «рабочем» участке BC ломаной, состоящей всего лишь из трех звеньев, приводит к очень точному воспроизведению зависимости $\eta(\tau)$ (сплошная и штриховая кривые I на фиг. 2).

На фиг. 4 приведены результаты расчета вытеснения конденсата водой из трехслойного пласта с изолированными пропластками равной толщины при отношении проницаемостей $k_1:k_2:k_3=1:5:10$. При этом использовалась аппроксимация I кривой $F(s)$ (см. фиг. 1). Кривые I—3 соответствуют зависимостям $\eta(\tau)$ для отдельных слоев, кривая 4 отвечает слоистому пласту (здесь τ — безразмерный объем закачки в поровых объемах всего пласта). Видно, что после прорыва воды по более проницаемым слоям темпы роста коэффициента вытеснения падают, однако для всего пласта медленнее, чем для 2-го и 3-го пропластков. При этом ход вытеснения в 1-м пропластке практически не зависит от вытеснения в двух других. Это означает, что перераспределение потоков между слоями за счет изменения их фильтрационных сопротивлений оказывается незначительным.

Этот вывод подтверждается расчетом показателей вытеснения (штриховая линия) при циклической закачке воды и вытесняющего агента, имеющего вязкость конденсата, порциями по 0,15 объема пор всего пласта. Различие между штриховой и сплошной кривыми наблюдается лишь на некоторой промежуточной стадии вытеснения ($0,3 < \tau < 1$) и не превышает 0,02.

Здесь же показаны зависимости $\eta(\tau)$ для слоистого пласта, отвечающие вариантам I—IV аппроксимации кривой $F(s)$. Они аналогичны полученным для однородного пласта (фиг. 2).

Отметим, что применительно к схеме жестких трубок тока преимущество предложенного метода расчета по точности и быстрдействию при реализации на ЭВМ по сравнению с традиционными методами возрастают. Так, в случае трехслойного пласта время расчета оказывается примерно на два порядка меньше, чем при использовании стандартных конечно-разностных методов. При проведении расчетов пересчет фильтрационного сопротивления каждого пропластка осуществляется после закачки в него фиксированного объема жидкости. В данном случае этот объем составлял 0,05 порового объема пропластка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
2. Филинов М. В., Лебедева Л. Н., Лурье М. В., Максимов В. М. Об одном способе расчета циклического замещения воды газом в пористой среде // Изв. вузов. Нефть и газ. 1983. № 11. С. 55—62.
3. Dougherty E. L., Sheldon J. W. The use of fluid-fluid interfaces to predict the behavior of oil recovery processes // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1964. V. 4. № 2. P. 171—182.
4. Данилов В. Л., Кац Р. М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкости в пористой среде. М.: Недра, 1980. 264 с.
5. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.XI.1986