

УДК 532.5.013.4:532.135

ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ ЖИДКОСТИ ОЛДРОЙДА

КИРЕЙКО Г. В., КОРНЕВ А. Л.

Применение жидкостей с вязкоупругими свойствами в различных технологических процессах и возможность существенного снижения турбулентного трения при течении слабых растворов полимеров привлекает значительное внимание исследователей к вопросу о переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения вязкоупругих жидкостей. Большое число теоретических работ по исследованию устойчивости плоского течения Пуазейля различных вязкоупругих жидкостей указывает на дестабилизирующее влияние упругости. Этот вывод находится в противоречии с некоторыми экспериментами, в которых отмечалось затягивание перехода, и с эффектом снижения турбулентного сопротивления трения, в котором вязкоупругие свойства растворов полимеров приводят к подавлению турбулентности [1, 2]. В [3] это противоречие объясняется тем, что теоретические исследования ограничивались малой окрестностью критического числа Рейнольдса, где преобладающую роль играют дестабилизирующие релаксационные свойства жидкости, тогда как увеличение продольной вязкости с увеличением числа Рейнольдса может привести к повышению устойчивости по сравнению с течением ньютоновской жидкости и даже к замыканию нейтральной кривой, ограничивающей область неустойчивости.

Необходимо отметить, что в [3] при выводе уравнения типа Орра — Зоммерфельда для вязкоупругой жидкости Максвелла была допущена ошибка, поэтому необходимо провести детальное исследование того, как ошибка сказалась на основных качественных выводах работы [3]. С другой стороны, жидкость Максвелла является частным случаем вязкоупругой жидкости Олдройда, которая описывает поведение раствора гантелей с линейной упругой связью [4, 5]. В [6] была исследована линейная устойчивость течения Пуазейля жидкости Олдройда при малых числах упругости, что привело к заключению о дестабилизирующем влиянии упругости. Проведенное в [7] такое же исследование показало, что при больших числах упругости возможно значительное увеличение устойчивости по сравнению с течением ньютоновской жидкости. Но в [6, 7] расчеты проведены при малом изменении числа Рейнольдса и к тому же параметр упругости, при котором строились нейтральные кривые, был выбран не совсем удачно.

Ниже исследована линейная устойчивость плоского течения Пуазейля вязкоупругой жидкости Олдройда в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса и параметров вязкоупругости. Показано, что, несмотря на ошибку, основные выводы работы [3] остаются верными. Соответствие уравнения состояния Олдройда раствору гантелей с линейной упругой связью позволило связать устойчивость потока со степенью растяжения упругих гантелей. Получено, что при достижении некоторой пороговой степени растяжения подавляется дестабилизирующее воздействие упругости и происходит резкое повышение устойчивости.

1. Уравнение состояния вязкоупругой жидкости Олдройда имеет вид

$$\sigma_{ij} + \gamma_1 \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} = 2\mu \left(e_{ij} + \gamma_2 \frac{De_{ij}}{Dt} \right) \quad (1.1)$$

где σ_{ij} и e_{ij} — компоненты тензора избыточных напряжений и тензора скоростей деформаций, μ — коэффициент вязкости, γ_1 и γ_2 — времена релаксации и ретардации. При $\gamma_2 = 0$ из (1.1) получаем жидкость Максвелла.

Контравариантная и ковариантная производные Олдройда по времени компонент некоторого тензора B_{ij} в декартовой системе координат имеют

ВИД СООТВЕТСТВЕННО

$$\frac{DB_{ij}}{Dt} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k} - B_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - B_{kj} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (1.2)$$

$$\frac{DB_{ij}}{Dt} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k} + B_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + B_{kj} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (1.3)$$

В [4, 5] установлено соответствие уравнения состояния (1.1) с производной (1.2) полимерному раствору, в котором макромолекулы моделируются гантелями с линейной упругой связью. Тензор избыточных напряжений в жидкости с добавками имеет вид

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \left(\frac{3I_{ij}}{a^2} - \delta_{ij} \right) \frac{\mu \Phi[\eta]}{\gamma_1} \quad (1.4)$$

где I_{ij} — тензор, характеризующий среднеквадратичные размеры макромолекулы, δ_{ij} — символ Кронекера, Φ — объемная концентрация раствора, $[\eta]$ — характеристическая вязкость, a^2 — среднеквадратичные размеры макромолекулы в равновесном состоянии, $\gamma_2 = \gamma_1 / (1 + \Phi[\eta])$. Из зависимости γ_2 от параметров раствора следует, что жидкость Максвелла ($\gamma_2 = 0$) соответствует раствору бесконечной концентрации.

Соотношение (1.4) позволяет проанализировать влияние параметров раствора и степени растяжения макромолекул на устойчивость течения.

2. Рассмотрим линейную устойчивость плоского течения Пуазейля в канале вязкоупругой жидкости Олдройда. Уравнения (1.1)–(1.3) замыкаются уравнениями движения и неразрывности. Можно показать, что использование производных Олдройда (1.2) и (1.3) приводит к одному и тому же уравнению типа Орра — Зоммерфельда для амплитуды функции тока малых возмущений течения. Эта же особенность отмечалась и в [8] при исследовании устойчивости плоского течения Пуазейля жидкости с короткой памятью Уолтерса. Отличие производных Олдройда проявляется только в трехмерных течениях.

Уравнение типа Орра — Зоммерфельда имеет вид [6]

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^4}{dy^4} + b_3 \frac{d^3}{dy^3} + b_2 \frac{d^2}{dy^2} + b_1 \frac{d}{dy} + b_0 \right) \Psi = \\ & = i\alpha R \frac{\chi_1}{\chi_2} \left[(U-c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \right] \Psi \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\chi_1 = 1 + i\alpha R E_1 (U-c), \quad \chi_2 = 1 + i\alpha R E_2 (U-c)$$

$$R = U_0 h / \nu, \quad E_1 = \gamma_1 \nu / h^2, \quad E_2 = \gamma_2 \nu / h^2$$

Здесь $U(y) = 1,5(1-y^2)$ — скорость основного течения, h — полуширина канала, y — координата, перпендикулярная стенке, U_0 — средняя скорость, α — волновое число, $c = X + iY$, X — фазовая скорость возмущений, ν — коэффициент кинематической вязкости, b_i — функции α , χ_1 , χ_2 .

Амплитуда функции тока удовлетворяет краевым условиям на стенке канала.

$$\Psi = \Psi d/dy = 0, \quad y = \pm 1 \quad (2.2)$$

Собственные числа с однородной краевой задачи (2.1), (2.2) определялись численно по методу дифференциальной прогонки [9], при этом исследовались только симметричные, наиболее неустойчивые моды. Устойчивость определялась знаком мнимой части собственного числа. Если $Y < 0$ — течение устойчиво, $Y = 0$ — течение нейтрально-устойчиво, $Y > 0$ — течение неустойчиво.

3. Рассмотрим результаты расчетов, полученных для жидкости Максвелла ($\gamma_2 = 0$ в (1.1)). В [3] была исследована устойчивость плоского те-

чения Пуазейля жидкости Максвелла с ковариантной производной (1.3). Но при этом уравнение типа Орра — Зоммерфельда отличается от уравнения, полученного в [10] при использовании контравариантной производной (1.2). Это следствие алгебраической ошибки, допущенной при выводе уравнения в [3]. Поэтому с целью выяснить как допущенная ошибка сказывается на качественных выводах работы [3], было предпринято детальное исследование на большом интервале изменения волновых чисел α и чисел Рейнольдса, так как результаты [10] ограничены малой окрестностью критического числа Рейнольдса.

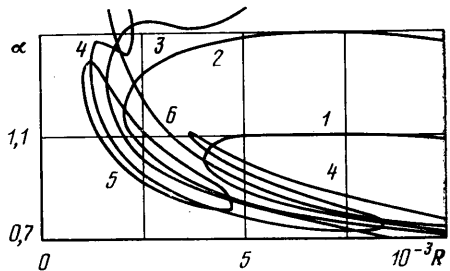
На фиг. 1 приведены рассчитанные нейтральные кривые, для которых $Y=0$: 1 — $E_1=0$ (ньютоновская жидкость), 2 — $5 \cdot 10^{-4}$, 3 — 10^{-3} , 4 — $2 \cdot 10^{-3}$, 5 и 6 — $2,5 \cdot 10^{-3}$. Полученные нейтральные кривые находятся в полном согласии с результатами [10]. Из фиг. 1 видно, что релаксационные свойства, так же как и в [3], приводят к дестабилизации при малых числах Рейнольдса в окрестности критического значения, а стабилизирующее воздействие увеличенной при больших числах Рейнольдса продольной вязкости также ведет к образованию ограниченной области неустойчивости, которая с увеличением упругости стягивается в точку. При образовании замкнутой кривой 5 появляется еще одна нейтральная кривая 6 при том же значении параметра $E_1=2,5 \cdot 10^{-3}$, и, так как эти нейтральные кривые образовались из одной кривой, естественно их отнести к одной и той же первой моде. Но, как показывают расчеты, нельзя перейти от кривой 5 к нейтральной кривой 6 непрерывным изменением параметра R при фиксированном α , например $\alpha=1,1$, двигаясь по поверхности $Y=Y(\alpha, R)$, в области устойчивости $Y < 0$. Поэтому нейтральные кривые 5 и 6 принадлежат уже разным поверхностям $Y(\alpha, R)$, т. е. разным модам. Похожая картина наблюдается при исследовании устойчивости осесимметричных течений [9], когда происходит взаимодействие вязкой неустойчивости с тейлоровской.

В [11] были получены спектры собственных значений уравнения (2.1) при $R \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow 0$. Эти спектры можно использовать для нумерации собственных значений по возрастанию Y_n . Было показано, что для жидкости Максвелла спектр при $R \rightarrow 0$ разбивается на две части при фиксированном E_1 : первая часть с малыми номерами имеет X_n , стремящиеся к постоянным значениям, как в ньютоновской жидкости; вторая часть имеет $X_n \rightarrow \pm \infty$ при $R \rightarrow 0$. Физически это означает следующее: при возбуждении мод из первой группы в покоящейся жидкости они затухают монотонно; если же возбудить моды из второй группы, они затухают в виде бегущей волны, т. е. проявляют упругие свойства. Исходя из этого, назовем моды первой группы вязкими, а второй — упругими. При этом с увеличением E_1 число вязких мод уменьшается. Для определения номеров собственных значений, которым соответствуют нейтральные кривые 5 и 6 на фиг. 1, были рассчитаны для $E_1=2,5 \cdot 10^{-3}$ собственные значения при фиксированном значении α и изменении R от нейтральной кривой до малых значений. Полученные значения при малых R сравнивались с асимптотическими зависимостями из [11]. Оказалось, что нейтральная кривая 5 соответствует первой вязкой моде, которая неустойчива и в ньютоновской жидкости. В то же время кривая 6 соответствует упругой моде под номером 23 с фазовой скоростью $X \rightarrow -\infty$ при $R \rightarrow 0$.

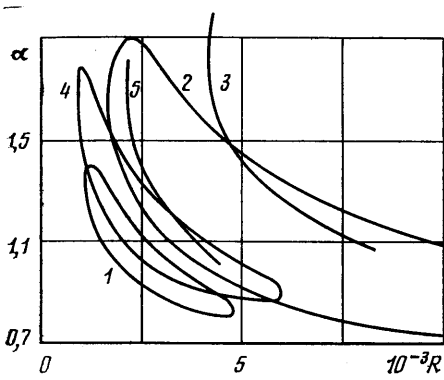
Следовательно, образование двух неустойчивых мод с нейтральными кривыми 5 и 6 на фиг. 1 получается в результате взаимодействия вязкой неустойчивости с упругой, при этом дальнейшее увеличение упругости жидкости (увеличение E_1) приводит к стягиванию нейтральной кривой 5 в точку, т. е. к полному подавлению вязкой неустойчивости.

Появившаяся неустойчивая упругая мода была исследована более детально при больших значениях волновых чисел и числа Рейнольдса. На фиг. 2 приведены полученные кривые: 1, 2, 3 соответствуют $E_1=2,5 \cdot 10^{-3}$, 4, 5 — $E_1=5 \cdot 10^{-3}$. Кривые 1 и 2 совпадают с 5 и 6 на фиг. 1, кривая 3 соответствует новой неустойчивой упругой моде с $X \rightarrow -\infty$ при $R \rightarrow 0$. Кривые 2 и 3 переходят в 4 и 5 при $E_1=5 \cdot 10^{-3}$ и, как уже отмечалось выше, кривая 1 стягивается в точку.

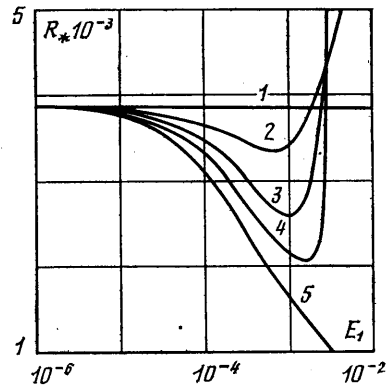
Из фиг. 2 видно, что появляющиеся новые неустойчивые моды увеличивают верхнюю границу неустойчивых волновых чисел. При увеличении параметра E_1 , так же как и для вязкой неустойчивой моды, область неустойчивости (кривые 2, 4) сдвигаются в сторону меньших чисел Рейнольдса и происходит замыкание нейтральной кривой при малых числах α с дальнейшим стягиванием области неустойчивости



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

в точку. При этом появляется новая неустойчивая упругая мода и все повторяется снова. Механизм этого явления был рассмотрен в [3]. Дестабилизирующие релаксационные свойства упругости приводят к движению передней части нейтральной кривой в области малых R , а стабилизирующее воздействие продольной вязкости ответственно за движение задней части и замыкание кривой при больших числах Рейнольдса. Следовательно, ошибка, допущенная при выводе уравнения в [3], приводила к тому, что не появлялись неустойчивые упругие моды, основные же качественные выводы работы [3] остаются верными.

Обнаруженное сильно выраженное влияние упругости на устойчивость объясняется тем, что жидкость Максвелла соответствует раствору бесконечной концентрации. Поэтому полученные результаты качественно описывают поведение концентрированных растворов полимеров.

4. Рассмотрим результаты расчетов для вязкоупругой жидкости Олдройда. На фиг. 3 показано влияние числа упругости E_1 на критическое число Рейнольдса R_* (при $R < R_*$ течение устойчиво при всех волновых числах α) для разных значений параметра $\theta = E_2/E_1$: 1 — $\theta = 1$ (ньютоновская жидкость); 2 — 0,8; 3 — 0,5; 4 — 0,3; 5 — 0 (жидкость Максвелла). Видно, что при всех значениях θ между нулем и единицей сначала при увеличении E_1 происходит уменьшение критического числа R_* , когда же E_1 достигает некоторого критического значения E_* , уменьшение R_* (дестабилизация течения) подавляется и при дальнейшем росте E_1 наблюдается значительное увеличение R_* (стабилизация течения). С уменьшением параметра θ эффекты дестабилизации и стабилизации более выражены.

Зависимость (1.4) позволяет проанализировать влияние различных параметров полимерного раствора на R_* . Из выражения для γ_2 следует, что изменение θ от единицы до нуля соответствует изменению концентрации частиц от нуля до бесконечности. Таким образом, увеличение концентрации приводит к большему воздействию, как дестабилизирующему, так и стабилизирующему.

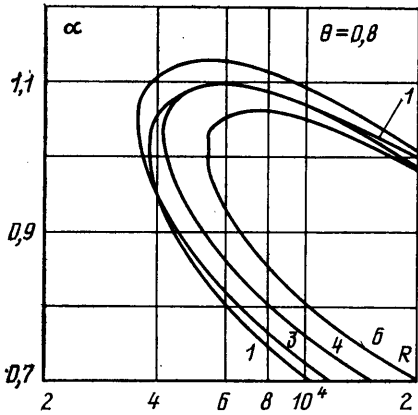
Выражение (1.4) позволяет также исследовать поведение макромолекулы в потоке. Выполнив операцию осреднения (1.4) по времени получим в безразмерном виде

$$\frac{3 \langle I_{ij} \rangle}{a^2} = \frac{(R \langle \sigma_{ij} \rangle - 2 \langle e_{ij} \rangle) E_1 \theta R}{1 - \theta} + \delta_{ij}$$

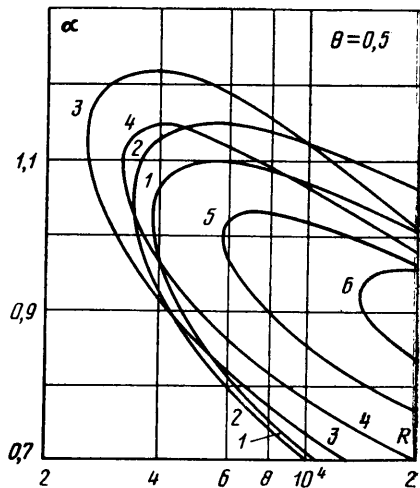
Для основного течения Пуазейля имеем $\langle \sigma_{11} \rangle = 2E_1(1 - \theta) (dU/dy)^2$, и среднеквадратичная степень растяжения макромолекулы вдоль потока равна

$$\frac{3 \langle I_{11} \rangle}{a^2} = 2E_1^2 R^2 \theta \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + 1 \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что степень растяжения макромолекулы растет с увеличением E_1 , R , уменьшением концентрации (увеличение θ) и увеличением градиента скорости (наибольшее растяжение — на стенке, а на оси



Фиг. 4



Фиг. 5

растяжение отсутствует). При этом растяжение растет с увеличением числа Рейнольдса неограниченно, что является следствием линейной упругой связи в гантеле.

Как отмечалось выше, присутствие в потоке макромолекул приводит к двоякому воздействию на устойчивость: упругие свойства макромолекул приводят к дестабилизации, а продольная вязкость, увеличивающаяся с увеличением степени вытянутости частиц, стабилизирует течение. Соотношением этих двух эффектов можно объяснить поведение R_* на фиг. 3. При малых значениях E_1 степень вытянутости частиц мала и проявляется дестабилизирующее воздействие упругости. Увеличение E_1 ведет к увеличению степени вытянутости макромолекул, влияние упругости подавляется и наблюдается повышение устойчивости.

Выражение (4.1) позволяет определить критическое значение степени вытянутости частиц, подставляя значения параметров, соответствующих минимуму кривых на фиг. 3. Расчеты показывают, что для всех кривых $\langle I_{11} \rangle / a^2 \approx 17$.

Из (4.1) следует, что даже при постоянных значениях E_1 и θ увеличение числа Рейнольдса приводит к значительному увеличению степени вытянутости частиц, т. е. если даже критическое значение числа Рейнольдса меньше ньютоновского, увеличение R должно приводить к подавлению дестабилизирующего воздействия упругости и к повышению устойчивости. Отмеченная особенность на самом деле имеет место, как видно из фиг. 4, 5. Здесь приведены нейтральные кривые для разных значений θ и E_1 . Фиг. 4, 5 соответствуют значениям параметра $\theta=0,8$ и $0,5$; нейтральные кривые получены при следующих значениях числа E_1 : 1 — $E_1=0$ (ньютоновская жидкость), 2 — 10^{-4} , 3 — 10^{-3} , 4 — $2 \cdot 10^{-3}$, 5 — $3 \cdot 10^{-3}$, 6 — $4 \cdot 10^{-3}$. При малых значениях E_1 и R влияние упругости приводит к уменьшению критического числа Рейнольдса и нейтральные кривые расположены левее ньютоновской кривой. С увеличением числа R при постоянном E_1 степень вытянутости частиц растет, нейтральные кривые пересекают ньютоновскую (кривые 3 и 4) и устойчивость повышается по сравнению с ньютоновской жидкостью. При больших значениях E_1 область неустойчивости (кривые 5 и 6) полностью лежит внутри ньютоновской, т. е. устойчивость повышается при всех волновых числах α . Полученные результаты подтверждают основные качественные выводы работы [3] и правильно отражают особенности влияния макромолекул на устойчивость течения слабых полимерных растворов.

В [6, 7] также была исследована линейная устойчивость жидкости Олдройда, но в качестве параметра упругости, при постоянном значении которого строились нейтральные кривые, был взят параметр $A = \gamma_1 U_0 / h$, зависящий от скорости основного течения. Если вдоль нейтральной кривой, построенной при постоянном A , увеличивать число Рейнольдса за счет скорости U_0 , то при этом должно уменьшаться γ_1 , т. е. изменяться упругие свойства раствора, и если $U_0 \rightarrow \infty$, то $\gamma_1 \rightarrow 0$. Кроме того, так как $A = E_1 R$, то из (4.1) следует, что

$$\frac{3 \langle I_{11} \rangle}{a^2} = 2A^2 \theta \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + 1$$

и если вдоль нейтральной кривой A постоянно, то при увеличении числа Рейнольдса не будет изменяться степень вытянутости макромолекулы. Более естественнее выбирать параметры упругости не зависящие от скорости течения, как это делается в большинстве работ по устойчивости течений. Так же поступают и при исследовании эффекта снижения турбулентного сопротивления трения, строя кривые сопротивления только за счет изменения скорости течения при постоянных значениях других параметров. В [6, 7] выбор параметра A не очень сильно сказался на результатах, потому что расчеты выполнены при малых изменениях числа Рейнольдса.

В заключение необходимо отметить, что сильная стабилизация потока, обнаруженная при больших значениях параметра E_1 и числа Рейнольдса, связана с бесконечной растяжимостью гантелей с линейной упругой связью. Опытные данные свидетельствуют о конечной степени удлинения макромолекул полимера, поэтому для более реалистичной картины необходимо использовать уравнение состояния, учитывающее конечную степень растяжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoyt J. W. The effect of additives on fluid friction // Trans. ASME Ser. D. J. Basic Eng. 1972. V. 94. № 2. P. 258–285.
2. Пилипенко В. Н. Влияние добавок на пристенные турбулентные течения // Итоги науки и техники: Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 15. С. 156–257.
3. Кирейко Г. В., Пилипенко В. Н. Устойчивость течения вязкоупругой жидкости в канале // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 3. С. 569–573.
4. Lumley J. L. Applicability of the Oldroyd constitutive equation to flow of dilute polymer solutions // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 11. P. 2282–2284.
5. Giesekus H. Die Elastizität von Flüssigkeiten // Rheol. Acta. 1966. V. 5. № 1. P. 29–35.
6. Kundu P. K. Small disturbance stability of plane poiseuille flow of Oldroyd fluid // Phys. Fluids. 1972. V. 15. № 7. P. 1207–1212.
7. Заметалин В. В., Корсаков А. Н. Устойчивость течения вязкоупругой жидкости в канале // Устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР. 1985. С. 23–27.
8. Chan Man Fong C. F., Walters K. The solution of flow problems in the case of materials with memory. Pt 2. // J. méс. 1965. V. 4. № 4. P. 439–453.
9. Гольдшиг М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. 1977. 366 с.
10. Porteous K. C., Denn M. M. Linear stability of plane poiseuille flow of viscoelastic liquids // Trans. Soc. Rheol. 1972. V. 16. № 12. P. 295–308.
11. Кирейко Г. В. О спектре малых возмущений плоскопараллельных течений вязкоупругих жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 164–167.

Макеевка

Поступила в редакцию
13.VI.1986