

УДК 532.526.2

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ВЫТЯНУТЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

РОЖКО С. Б., РУБАН А. И., ТИМОШИН С. Н.

Рассмотрен специальный вариант теории продольно-поперечного взаимодействия, в котором поле давления в возмущенной области течения формируется под действием центробежных сил, приводящих к изменению давления поперек пограничного слоя. Этот режим течения реализуется в потоке несжимаемой жидкости, когда двумерный пограничный слой, развивающийся вдоль гладкого участка контура твердого тела, вступает во взаимодействие с пространственной неровностью на обтекаемой поверхности — выступом или впадиной. В предположении, что высота неровности мала, построено решение линеаризованной задачи о взаимодействии. Показано, что свойства течения жидкости в области взаимодействия, в частности возможность проникновения возмущений в пограничный слой перед неровностью, зависят от знака кривизны контура тела.

1. Постановка задачи. Явление продольно-поперечного взаимодействия оказывает существенное влияние на течение жидкости в целом ряде физических ситуаций. К их числу относится, например, случай, когда первоначально двумерный пограничный слой набегает на пространственную неровность твердой поверхности, вытянутую в направлении невозмущенного потока, при этом в окрестности неровности образуется область взаимодействия, имеющая трехслойную структуру [1]. Ключевую роль в формировании потока в этой области играет, как обычно, вязкий пристеночный слой, где движение жидкости подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned}U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \\U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} &= -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0\end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь используется ортогональная криволинейная система координат, в которой X отсчитывается вдоль обтекаемой поверхности, каковой она была бы при отсутствии неровности, Y — по нормали к этой поверхности, а Z — перпендикулярно вектору скорости в невозмущенном пограничном слое. Составляющие вектора скорости в этой системе координат обозначены соответственно через U , V и W , а давление — через P . Все величины обезразмерены специальным образом так, чтобы в рассматриваемой области пространства они были соизмеримы с единицей.

Зададим поверхность неровности с помощью уравнения $Y=F(X, Z)$. Тогда в качестве краевых условий для системы уравнений (1.1) будем иметь: условия прилипания на твердой поверхности, условия срачивания с пристеночной частью невозмущенного пограничного слоя вверх по потоку от неровности, а также асимптотические разложения составляющих

вектора скорости на большом удалении от поверхности

$$Y=F(X, Z): U=V=W=0, X=-\infty: U=Y, W=0 \quad (1.2)$$

$$Y \rightarrow \infty: U=Y+A(X, Z)+\dots, W=D(X, Z)Y^{-1}+\dots$$

Неизвестные коэффициенты $A(X, Z)$ и $D(X, Z)$ подлежат определению в процессе решения задачи о взаимодействии в целом. Функция $A(X, Z)$ пропорциональна изменению толщины вытеснения пограничного слоя; она служит для определения возмущенного градиента давления

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \text{sign}(\kappa_0) \frac{\partial A}{\partial Z} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 A(X, \xi)}{\partial X^2} \frac{d\xi}{\xi - Z} \quad (1.3)$$

Здесь κ_0 — кривизна контура обтекаемого тела в точке расположения неровности. Первое слагаемое в правой части формулы (1.3) выражает собой результат действия центробежных сил в основной толще пограничного слоя, второе связано с реакцией внешнего потенциального потока на изменение толщины вытеснения вязкого пристеночного слоя. Если вытесняющее действие пограничного слоя на внешний поток является стандартным элементом асимптотической теории взаимодействия (см., например, [2]), то центробежный эффект составляет отличительную особенность рассматриваемой задачи. Можно усилить роль центробежных сил, перейдя к анализу более длинных препятствий по сравнению с тем, какими они предполагались в [1] при выводе соотношений (1.1)–(1.3). В самом деле, пусть $F(X, Z) = d^{1/2} F^\circ(X/d, Z/d^{1/2})$, где постоянная d , характеризующая продольный размер неровности, велика по сравнению с единицей. Тогда решение краевой задачи (1.1)–(1.3) представляется в форме

$$\begin{aligned} U &= d^{1/2} U^\circ, \quad V = d^{-1/2} V^\circ, \quad W = d^{1/2} W^\circ \\ P &= d^{1/2} P^\circ, \quad A = d^{1/2} A^\circ, \quad D = d^{1/2} D^\circ \\ X &= dX^\circ, \quad Y = d^{1/2} Y^\circ, \quad Z = d^{1/2} Z^\circ \end{aligned} \quad (1.4)$$

Легко убедиться, что уравнения (1.1) и краевые условия (1.2) инвариантны относительно аффинных преобразований (1.4). Изменение претерпевает лишь выражение (1.3) для возмущения давления, которое с точностью до членов порядка $d^{-1/2}$ может быть теперь записано как

$$P = \text{sign}(\kappa_0) A \quad (1.5)$$

Здесь и в дальнейшем для искомых функций и независимых переменных используются прежние обозначения, градус для простоты опущен.

Соотношения (1.1), (1.2), (1.5), составляющие в совокупности задачу о взаимодействии, можно получить и другим, более естественным способом, принимая в качестве исходных уравнений движения жидкости уравнения Навье — Стокса. Этот второй, несравненно более сложный путь приводит к тому же результату, что и изложенная выше процедура, если одновременно выполняются следующие условия: продольный размер неровности Δx , отнесенный к характерному размеру обтекаемого тела, превосходит по порядку величины $\text{Re}^{-3/4}$ и в то же время мал по сравнению с единицей, ее поперечный размер Δz имеет порядок $\text{Re}^{-1/2} (\Delta x)^{3/4}$, а высота оценивается как $\Delta y = O[\text{Re}^{-1/2} (\Delta x)^{1/4}]$.

2. Решение задачи о взаимодействии в линейном приближении. Наиболее простым для анализа является слабозмущенное течение жидкости в области взаимодействия. Оно реализуется тогда, когда высота неровности на поверхности обтекаемого тела мала по сравнению с толщиной вязкого пристеночного слоя, т. е. $F(X, Z) = hF'(X, Z)$, где h — малый параметр, а $F'(X, Z)$ — функция, принимающая конечные значения при условии,

что ее аргументы одновременно являются величинами порядка единицы. В этом случае искомые гидродинамические функции могут быть представлены в виде разложений по степеням параметра h

$$\begin{aligned} U &= Y + hu'(X, Y, Z) + \dots, \quad V = hv'(X, Y, Z) + \dots \\ W &= hw'(X, Y, Z) + \dots, \quad P = hp'(X, Z) + \dots \\ A &= hA'(X, Z) + \dots, \quad D = hD'(X, Z) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.1), (1.2), (1.5), приходим к линеаризованной задаче о взаимодействии

$$\begin{aligned} Y \frac{\partial u'}{\partial X} + v' &= \frac{\partial^2 u'}{\partial Y^2}, \quad Y \frac{\partial w'}{\partial X} = -\frac{\partial p'}{\partial Z} + \frac{\partial^2 w'}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial u'}{\partial X} + \frac{\partial v'}{\partial Y} + \frac{\partial w'}{\partial Z} &= 0, \quad p' = \text{sign}(\kappa_0) A' \\ Y=0: u' &= -F'(X, Z), \quad v' = w' = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$Y \rightarrow \infty: u' = A'(X, Z) + \dots, \quad w' = D'(X, Z) Y^{-1} + \dots, \quad X = -\infty: u' = w' = 0$$

Для ее решения воспользуемся классическим методом преобразований Фурье. Положим

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} u'(X, Y, Z) e^{-ikX - ilZ} dZ$$

и обозначим фурье-изображения функций v' , w' , p' ; A' и D' , определенные аналогичным образом, через v^* , w^* , p^* , A^* и D^* соответственно.

Применив преобразование Фурье к уравнениям (2.2) и краевым условиям при $Y=0$ и $Y \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} ikY u^* + v^* &= \frac{d^2 u^*}{dY^2}, \quad ikY w^* = -ilp^* + \frac{d^2 w^*}{dY^2} \\ iku^* + \frac{dv^*}{dY} + ilw^* &= 0, \quad p^* = \text{sign}(\kappa_0) A^* \\ Y=0: u^* &= -F^*, \quad v^* = w^* = 0 \\ Y \rightarrow \infty: u^* &= A^* + \dots, \quad w^* = D^* Y^{-1} + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение краевой задачи (2.3) можно построить с помощью метода, изложенного в [3] (см. также [4]). Умножим первое уравнение системы (2.3) на k и сложим со вторым уравнением, умноженным на l . Проинтегрировав результат по Y , приходим к уравнению Эйри

$$\frac{d^3 f}{dz^3} - z \frac{df}{dz} = 0 \quad (2.4)$$

для производной функции $f = ku^* + lw^*$. Ее аргумент z определяется стандартным образом $z = (ik)^{1/3} Y$ через регулярную ветвь функции $(ik)^{1/3}$, которая выделяется в комплексной плоскости переменного k с разрезом вдоль мнимой положительной полуоси: $|\arg(ik)^{1/3}| < \pi/3$.

Краевыми условиями для уравнения (2.4) являются

$$z=0: f = -kF^*, \quad \frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{il^2}{(ik)^{2/3}} p^*; \quad z=\infty: f = kA^* \quad (2.5)$$

Только одно из двух линейно независимых решений уравнения Эйри — функция $\text{Ai}(z)$ — обладает ограниченной при $z \rightarrow \infty$ первообразной [5], как

того требует последнее из условий (2.5). Поэтому

$$\frac{df}{dz} = c \operatorname{Ai}(z) \quad (2.6)$$

Определим постоянную c из второго краевого условия (2.5) при $z=0$ и, учитывая первое условие, проинтегрируем (2.6) по z

$$f(z) = -kF^* + \frac{il^2 p^*}{(ik)^{3/2} \operatorname{Ai}'(0)} \int_0^z \operatorname{Ai}(\xi) d\xi \quad (2.7)$$

Если теперь перейти в (2.7) к пределу при $z \rightarrow \infty$ и воспользоваться третьим из условий (2.5), рассматривая его совместно с условием взаимодействия $p^* = \operatorname{sign}(\kappa_0) A^*$, то в результате получим формулу, которая определяет p^* через фурье-изображение формы неровности F^*

$$p^* = -\operatorname{sign}(\kappa_0) \frac{(ik)^{3/2} F^*(k, l)}{Q(k, l)}, \quad Q = (ik)^{3/2} - \operatorname{sign}(\kappa_0) \frac{l^2}{a^2}, \quad a = \sqrt{3} |\operatorname{Ai}'(0)| \quad (2.8)$$

При заданном p^* решение уравнения (2.3) для w^* с однородными краевыми условиями при $z=0$ и $z \rightarrow \infty$ записывается в виде

$$w^* = \frac{il}{(ik)^{3/2}} p^* \operatorname{Ai}(z) \int_0^z \frac{d\xi}{\operatorname{Ai}^2(\xi)} \int_{\infty}^{\xi} \operatorname{Ai}(s) ds \quad (2.9)$$

Составляя линейную комбинацию из формул (2.7) и (2.9), найдем функцию u^* .

Поле вектора скорости вблизи твердой поверхности удобно характеризовать составляющими τ_x и τ_z поверхностного трения. Как следует из (2.1)

$$\tau_x = 1 + h\tau_x'(X, Z) + \dots, \quad \tau_z = h\tau_z'(X, Z) + \dots$$

$$\tau_x' = \frac{\partial u'}{\partial Y}, \quad \tau_z' = \frac{\partial w'}{\partial Y} \quad (Y=0)$$

Обозначив фурье-изображения функций $\tau_x'(X, Z)$, $\tau_z'(X, Z)$ через τ_x^* , τ_z^* , получим после дифференцирования (2.7), (2.9) по Y

$$\tau_x^* = -d' \frac{l^2}{(ik)^{3/2}} p^*, \quad \tau_z^* = -\frac{ilp^*}{(ik)^{3/2} 3 \operatorname{Ai}(0)}, \quad d' = \frac{\operatorname{Ai}(0)}{\operatorname{Ai}'(0)} + \frac{1}{3 \operatorname{Ai}(0)} \quad (2.10)$$

3. Дальнее поле течения. Закон затухания возмущений на больших расстояниях от центра неровности зависит от ее формы, причем эта зависимость проявляется двояким образом — локально, через местную высоту неровности, и интегрально, посредством передачи возмущений по пограничному слою. Этот второй эффект представляет особый интерес, поскольку он отсутствует в обычном пограничном слое и всецело связан с процессом взаимодействия. Чтобы выделить его в чистом виде, будем в дальнейшем считать, что неровность имеет конечные размеры и занимает по оси X интервал от X_- до X_+ , а по оси Z — от Z_- до Z_+ .

Предположим сначала, что поверхность обтекаемого тела вогнутая: $\kappa_0 > 0$. Тогда, как следует из (2.8)

$$p'(X, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa X} d\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^{3/2} F^*(k, l)}{l^2/a^2 - (ik)^{3/2}} e^{i\kappa Z} dl \quad (3.1)$$

Поскольку при всех $Z \geq Z_+$ функция $F'(X, Z)$ принимает нулевые значения, ее фурье-изображение можно представить в виде

$$F^*(k, l) = e^{-ilZ} F_+(k, l) \quad (3.2)$$

где $F_+(k, l)$ — функция, которая при всех действительных k определена в любой точке верхней полуплоскости комплексного переменного l , включая и действительную ось. Известно также, что $F_+(k, l)$ аналитическая при $\text{Im } l > 0$ и ограничена по модулю.

Подставив (3.2) в (3.1), легко убедиться, что подынтегральное выражение удовлетворяет условиям леммы Жордана (см., например, [6]). Поэтому интегрирование вдоль действительной оси в плоскости комплексного переменного l может быть заменено интегрированием вдоль замкнутого контура, который состоит из отрезка $[-R, R]$ действительной оси и полуокружности достаточно большого радиуса R , лежащей в верхней полуплоскости. Используя для вычисления этого интеграла теорему о вычетах, приходим к выражению

$$p'(X, Z) = i \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^{5/6} \text{sign}(k) F^*(k, l_0) e^{ikX + il_0 Z} dk \quad (3.3)$$

$$l_0(k) = a (ik)^{5/6} \text{sign}(k)$$

Здесь $l_0(k)$ — принадлежащий верхней полуплоскости корень уравнения $l^2/a^2 = (ik)^{5/3}$.

Как при положительных, так и при отрицательных значениях переменной k показатель экспоненты под знаком интеграла в (3.3) имеет отрицательную действительную часть

$$\text{Re}[ikX + il_0 Z] = -a \cos(\pi/12) |k|^{5/6} Z$$

которая монотонно возрастает по абсолютной величине по мере возрастания $|k|$. Асимптотическое поведение таких интегралов при больших значениях параметра Z можно определить с помощью метода Лапласа [7]. Его применение в данном случае сводится к рассмотрению малой окрестности точки $k=0$ протяженностью $|k| = O(Z^{-5/6})$, где действительная часть показателя экспоненты является величиной порядка единицы. За пределами этой окрестности подынтегральная функция экспоненциально мала и не вносит заметного вклада в результат интегрирования.

Запишем функцию $F^*[k, l_0(k)]$ в виде разложения в ряд Тейлора при $k \rightarrow 0$. Подставляя это разложение в (3.3) и производя замену переменной интегрирования $|k| = (t/Z)^{5/6}$, получим (в главном приближении) формулу

$$p' = \frac{F^*(0, 0)}{Z^{11/6}} S(\xi) + \dots, \quad \xi = XZ^{-5/6} \quad (3.4)$$

$$S(\xi) = \frac{6}{5} a \int_0^{\infty} t^{5/6} e^{-at \cos(\pi/12)} \cos\left(at \sin \frac{\pi}{12} + \xi t^{5/6} + \frac{11}{12} \pi\right) dt$$

Соотношение (3.4) выражает собой искомое асимптотическое представление возмущенного давления $p'(X, Z)$ при $\xi = O(1)$, $Z \rightarrow +\infty$. Аналогичным образом определяются асимптотические представления и других

гидродинамических функций. В частности

$$\tau_x' = \frac{F^*(0, 0)}{Z^{3/5}} G(\xi) + \dots, \quad \tau_z' = \frac{F^*(0, 0)}{Z^{4/5}} Q(\xi) + \dots \quad (3.5)$$

$$G(\xi) = \frac{6}{5} a^3 d' \int_0^\infty t^{3/5} e^{-at \cos(\pi/12)} \cos\left(at \sin \frac{\pi}{12} + \xi t^{5/5} + \frac{\pi}{12}\right) dt$$

$$Q(\xi) = \frac{2a^2}{5 \text{Ai}(0)} \int_0^\infty t^{3/5} e^{-at \cos(\pi/12)} \cos\left(at \sin \frac{\pi}{12} + \xi t^{5/5} + \frac{2}{3}\pi\right) dt$$

Использованный при выводе соотношений (3.4), (3.5) предельный переход $\xi = XZ^{-5/5} = O(1)$, $Z \rightarrow +\infty$ связан со специальным выбором пути, по которому точка плоскости X, Z удаляется в бесконечность. Этот выбор опирается на принцип наименьшего вырождения [8], а более конкретно — на стремление сохранить оба слагаемых в показателе экспоненты под знаком интеграла (3.3). Поскольку основной вклад в результат интегрирования при больших Z вносит малая окрестность точки $k=0$, где $|k|^{5/5}Z$ является величиной порядка единицы, то необходимо потребовать, чтобы в этой окрестности конечным оставалось и произведение kX . Последнее возможно лишь тогда, когда одновременно с увеличением Z увеличивается и продольная координата рассматриваемой точки в плоскости X, Z , причем происходит это так, что $X = O(Z^{5/5})$. Область пространства, в которой выполняется это условие, будем в дальнейшем называть основной областью дальнего поля течения.

Принцип наименьшего вырождения позволяет максимально расширить область применимости получаемых в результате предельного перехода асимптотических разложений. Вместе с тем его применение не обеспечивает равномерной пригодности выражений (3.4), (3.5) во всем дальнем поле течения — след за неровностью должен быть подвергнут отдельному анализу.

Рассмотрим, например, продольную составляющую поверхностного трения $\tau_x'(X, Z)$. Как следует из (2.8), (2.10)

$$\tau_x'(X, Z) = \frac{d'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} l^2 e^{ilz} dl \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^{1/5} F^*(k, l)}{(ik)^{3/5} - l^2/a^2} e^{ikh} dk \quad (3.6)$$

Внутренний интеграл в этом выражении обозначим через $I(l, X)$ и представим в виде суммы двух интегралов по отрицательной и положительной полуосям отдельно. Поскольку неровность ограничена в продольном направлении, можно при всех $X > X_+$ в первом интеграле перейти к интегрированию вдоль левого берега разреза в плоскости комплексного переменного k , а во втором — к интегрированию вдоль правого берега. Используя далее лемму Ватсона [7], получим, что при $l = O(1)$ и $X \rightarrow +\infty$

$$I(l, X) = \sqrt[3]{3} a^2 \Gamma(4/3) l^{-2} F^*(0, l) X^{-4/3} + \dots \quad (3.7)$$

Подстановка (3.7) в (3.6) дает в результате асимптотическое представление продольной составляющей поверхностного трения, которое справедливо в следе за неровностью: $Z = O(1)$, $X \rightarrow +\infty$

$$\tau_x' = \frac{\sqrt[3]{3}}{2\pi} d' a^2 \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \frac{H(Z)}{X^{4/3}} + \dots, \quad H(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} F'(X, Z) dX \quad (3.8)$$

После небольших изменений описанная выше процедура может быть также применена к производным $\partial\tau_z'/\partial Z$ и $\partial^2 p'/\partial Z^2$. Результат выражается следующими асимптотическими формулами:

$$\frac{\partial\tau_z'}{\partial Z} = \frac{\sqrt{3}a^2}{6\pi \text{Ai}(0)} \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \frac{H(Z)}{X^{7/3}} + \dots, \quad \frac{\partial^2 p'}{\partial Z^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} a^2 \Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \frac{H(Z)}{X^{8/3}} \quad (3.9)$$

Чтобы получить возможность для восстановления функций $\tau_z'(X, Z)$ и $p'(X, Z)$ по их производным, необходимо дополнить выражения (3.9) соответствующими краевыми условиями. Сделать это позволяет принцип сращения асимптотических разложений. Переходя в (3.4), (3.5) к пределу при $\xi \rightarrow +\infty$, получим, что на внешней границе следа ($Z \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \tau_x' &= -\frac{\sqrt{3}}{2} d'a^3 \Gamma\left(\frac{13}{6}\right) \frac{F^*(0, 0)}{X^{13/6}} + \dots, \\ \tau_z' &= \frac{\sqrt{3}a^2}{6 \text{Ai}(0)} \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \frac{F^*(0, 0)}{X^{7/3}} + \dots \\ p' &= \frac{\sqrt{3}}{2} a \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \frac{F^*(0, 0)}{X^{11/6}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Как легко видеть, след наиболее отчетливо проявляется в поведении функции $\tau_x'(X, Z)$, гораздо быстрее затухающей за его пределами, чем в нем самом. Функция $\tau_z'(X, Z)$ обладает одинаковой скоростью затухания вне следа и внутри него. Однако и для нее след остается неотъемлемой частью дальнего поля течения. При отсутствии следа функция $\tau_z'(X, Z)$ всюду определялась бы выражением (3.5). Но тогда, как следует из (3.10), в пределе при $\xi \rightarrow +\infty$ она не стремилась бы к нулю. Этот результат находится в очевидном противоречии с условием непротекания жидкости через поверхность $Z=0$, которое должно выполняться всякий раз, когда речь заходит о течении около симметричных препятствий. Указанное противоречие снимается лишь за счет следа, в котором происходит быстрое изменение τ_z' от нуля на оси симметрии течения до значения, предписываемого формулой (3.10) на внешней границе следа.

Замечательное свойство течений в режиме продольно-поперечного взаимодействия — формирование вниз по потоку от неровности следа с четко выраженными границами — сохраняется неизменным и при переходе к выпуклой поверхности. Более того, при $\kappa_0 < 0$ остаются в силе асимптотические формулы (3.8), (3.9), описывающие движение жидкости в следе. Главное же отличие течения на выпуклой поверхности — полное отсутствие возмущений во всем пограничном слое перед неровностью. Доказательство справедливости высказанного утверждения проведем на примере функции $p'(X, Z)$. Если $\kappa_0 < 0$, то

$$p'(X, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i1z} dl \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^{5/2} F^*(k, l)}{l^2/a^2 + (ik)^{5/2}} e^{ikx} dk \quad (3.11)$$

Так как при всех $X \leq X_-$ функция $F'(X, Z)$ принимает нулевые значения, ее фурье-изображение может быть записано через аналитическую в нижней полуплоскости комплексного переменного k функцию $F_-(k, l)$: $F^*(k, l) = \exp(-ikX_-) F_-(k, l)$. Знаменатель подинтегрального выражения в (3.11) не имеет корней в нижней полуплоскости переменного k . Поэтому, опираясь на лемму Жордана, можно утверждать, что при всех $X < X_-$ внутренний интеграл в (3.11), а вместе с ним и возмущение давления $p'(X, Z)$ тождественно равны нулю.

Отсутствие возмущений вверх по потоку от линии $X=X_-$ свидетельствует о существенном изменении поля течения по сравнению с тем, каким оно было на вогнутой поверхности. Поэтому, переходя к изучению поведения гидродинамических функций на больших расстояниях от неровности, будем особое внимание уделять процессу затухания возмущений при приближении к границе $X=X_-$ с невозмущенным пограничным слоем. Поменяем в выражении (3.11) порядок интегрирования и применим к нему те же рассуждения, что и при выводе формулы (3.4). Тогда, сохранив в разложении Тейлора для функции $F^*[k, l_0(k)]$ первые два члена при $k \rightarrow 0$, будем для основной области дальнего поля течения иметь

$$p' = \frac{F^*(0, 0)}{Z^{1/5}} S_0(\xi) + \frac{F_1^*(0, 0)}{Z^{16/5}} S_1(\xi) + \dots \quad (3.12)$$

$$S_0(\xi) = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (it)^{5/6} \exp[i\xi t - a(it)^{5/6}] dt$$

$$S_1(\xi) = \frac{ia^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (it)^{5/3} \exp[i\xi t - a(it)^{5/6}] dt$$

Асимптотическое представление функций $S_0(\xi)$ и $S_1(\xi)$ вблизи границы с невозмущенным пограничным слоем, т. е. при $\xi \rightarrow +0$, можно найти с помощью метода перевала

$$S_0(\xi) = a\sqrt{3\pi} \gamma^{4/3} \xi^{-1/2} \exp(-\gamma \xi^{-5/5})$$

$$S_1(\xi) = ia^2 \sqrt{3\pi} \gamma^{19/6} \xi^{-27/2} \exp(-\gamma \xi^{-5/5})$$

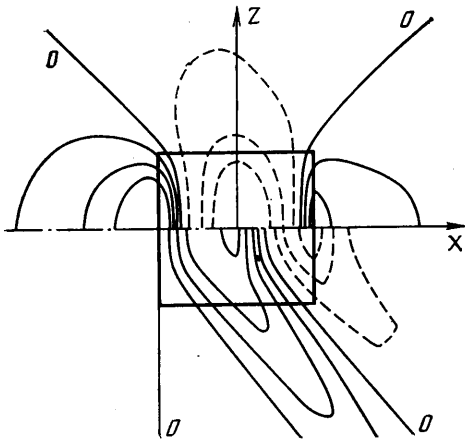
$$\gamma = (5a/6)^6 = \text{const}$$

Неравномерное стремление коэффициентов разложения (3.12) к нулю приводит в конечном итоге к нарушению основного принципа построения асимптотических разложений. Согласно определению асимптотического разложения, каждый последующий его член должен быть по порядку величины меньше предыдущего. Однако при $\xi = O(Z^{-1/5})$ оба выписанных члена в (3.12) становятся величинами одного порядка малости. Это означает, что при $x_0 < 0$ дальнее поле течения включает в себя кроме рассмотренных выше еще одну область, лежащую между невозмущенным пограничным слоем и возмущенной частью потока. Асимптотический анализ поведения гидродинамических функций в этой области — назовем ее фронтальной областью дальнего поля течения — связан с предельным переходом $\zeta = XZ^{-1} = O(1)$, $X \rightarrow +\infty$. Применяя его (в совокупности с методом перевала) к выражению (3.11), приходим к выводу, что во фронтальной области возмущение давления экспоненциально мало и определяется по формуле

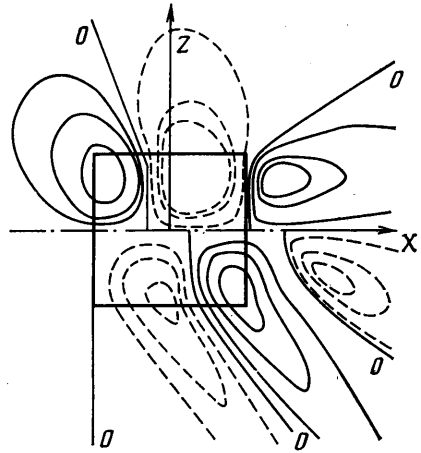
$$p' = a\sqrt{3\pi} \gamma^{4/3} \zeta^{-17/2} F^* Z^{-1/5} \exp(-\gamma Z \zeta^{-5/5})$$

в которой фурье-изображение формы неровности $F^*(k, l)$ должно вычисляться при следующих значениях аргументов: $k = -i\gamma \zeta^{-6}$, $l = ia\gamma^{5/6} \zeta^{-5}$.

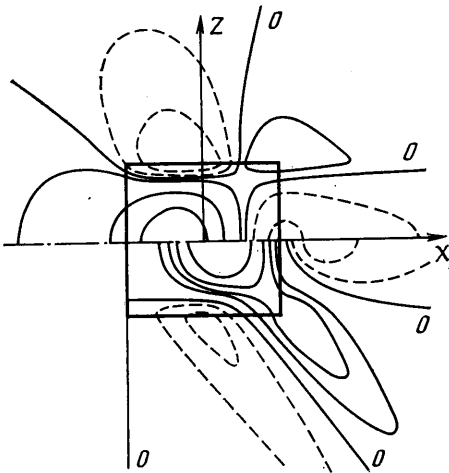
4. Численные результаты. Поле течения в непосредственной близости от неровности определялось в результате применения обратного преобразования Фурье к выражениям (2.8), (2.10). При этом интегрирование по l выполнялось аналитически с помощью теоремы о вычетах, а интегрирование по k — численно с помощью метода трапеций. Число узлов расчетной сетки варьировалось в зависимости от положения точки на плоскости X, Z в пределах 2000—5000.



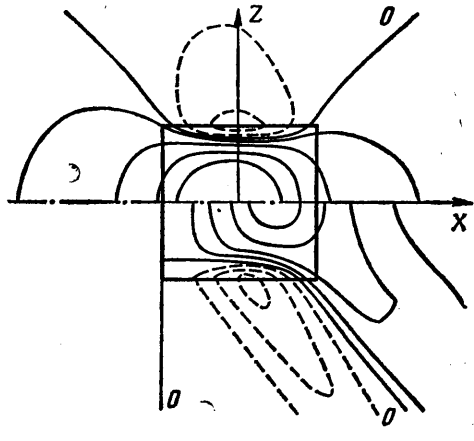
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Расчет был проведен для симметричной неровности, имеющей форму

$$F'(X, Z) = g(X)(1 - Z^2)$$

$$g(X) = 1 + X, \quad X \leq 0; \quad g(X) = 1 - X, \quad X \geq 0$$

Неровность занимает на плоскости X, Z квадрат $-1 \leq X \leq 1, -1 \leq Z \leq 1$, выделенный на фиг. 1–4 толстой сплошной линией. Результаты расчета представлены в виде линий постоянного уровня функций течения: давления p' (фиг. 1), поперечной составляющей поверхностного трения τ_z' (фиг. 2), продольной составляющей поверхностного трения τ_x' (фиг. 3) и функции $\Delta' = A' + F'$ (фиг. 4), которая с точностью до знака совпадает с приращением толщины вытеснения пограничного слоя. Сплошные линии соответствуют положительным значениям этих функций, а штриховые — отрицательным. Линии нулевого уровня обозначены 0. С учетом симметрии течения каждый рисунок разделен на две части: верхняя полуплоскость отведена для течения на вогнутой поверхности ($\kappa_0 > 0$), а нижняя — на выпуклой ($\kappa_0 < 0$).

Представленные результаты свидетельствуют о повышенной чувствительности пространственного пограничного слоя к поперечному перепаду давления. Так, в случае обтекания вогнутой поверхности перед неровностью наблюдается увеличение давления, особенно интенсивное на оси симметрии течения (фиг. 1). Образующийся при этом поперечный перепад давления вызывает растекание жидкости от оси симметрии, которое проявляется в повышении поперечной составляющей поверхностного трения (фиг. 2). Одновременно происходит изменение траекторий жидких частиц в толще пограничного слоя за счет их «притяжения» к обтекаемой поверхности. В результате продольная составляющая поверхностного трения увеличивается (фиг. 3), а толщина вытеснения пограничного слоя уменьшается (фиг. 4). В свою очередь уменьшение толщины вытеснения приводит, как следует из (1.5),

к увеличению давления, что и указывает на самосогласованность описанного процесса. Отсутствие же этой самосогласованности в потоке на выпуклой поверхности служит препятствием для проникновения возмущений в набегающий на неровность пограничный слой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рожко С. Б., Рубан А. И. Продольно-поперечное взаимодействие в трехмерном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 42–50.
2. Асимптотическая теория отрывных течений/Под ред. Сычева В. В. М.: Наука, 1987. 255 с.
3. Жук В. И., Рыжов О. С. Об устойчивости свободно взаимодействующего пограничного слоя // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 552–563.
4. Smith F. T., Sykes R. I., Brighton P. W. M. A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump // J. Fluid Mech. 1977. V. 83. Pt 1. P. 163–176.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
6. Лаурентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
7. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
8. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.1.1987