

УДК 532.526

О ПАКЕТАХ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОТОКА БЛАЗИУСА

ЗЕЛЬМАН М. Б., СМОРОДСКИЙ Б. В.

Асимптотическими методами проводится исследование развития квазигармонических возмущений в линейной и слабонелинейной задачах устойчивости локально-параллельного течения Блазиуса. В зависимости от исходного спектра и локальных чисел Рейнольдса R анализируется связь комплексных частот и волновых чисел, определяется закон распространения пакетов, строится и решается уравнение амплитуд их огибающих, выясняются условия возбуждения режимов регулярного и нерегулярного типов. Дается интерпретация наблюдаемых особенностей начальной стадии эволюции импульса в пограничном слое. Делается вывод об ограниченности модели для объяснения механизмов стохастизации.

В модельных ситуациях возмущения, инициирующие переход пограничного слоя в турбулентность, имеют дискретный волновой спектр. В условиях естественного процесса типичны флуктуации широкого спектра. Их развитие осуществляется в пространстве и времени и зависит как от свойств потока, так и от начального распределения [1]. Исследование эволюции возмущений упрощается при рассмотрении спектрально-узких волновых пакетов, набор которых с некоторой точностью может аппроксимировать развитие широкого спектра пульсаций на начальной стадии [1]. Изолированный пакет является элементарным и наиболее распространенным объектом исследований [2-7]. Для пограничного слоя было показано, что асимптотическое поведение линейных квазигармонических возмущений хорошо согласуется с наблюдаемым развитием импульса [2], причем последний смещается вниз по потоку по траектории распространения локального максимума инкремента возмущения. Однако природа такого поведения нуждается в объяснении. Расчеты, связанные с двумерными пакетами конечной интенсивности, проводились в [4, 6] и выявили качественное сходство с процессами в реальных условиях. Изучению режимов нелинейной эволюции и условий их формирования посвящена данная работа.

1. Рассмотрим двумерное течение Блазиуса. В приближении локальной параллельности его поле описывается безразмерной функцией тока

$$\psi_x = \Psi(y) + \varepsilon \psi(x, y, t) \tag{1.1}$$

где Ψ отвечает основному движению, а ψ — возмущениям. С точностью до нелинейных по ψ членов решение для возмущений представляется в виде [5, 8]

$$\psi = (2\pi)^{-2} \int \int_{L, F} d\alpha d\omega e^{i(\alpha x - \omega t)} \Phi(\alpha, \omega, y) \tag{1.2}$$

где пути (L, F) в комплексных плоскостях $(\omega = \omega_r + i\omega_i, \alpha = \alpha_r + i\alpha_i)$ выбираются из условий сходимости (1.2). Приходим к задаче линейной устойчивости

$$L(\omega, \alpha) \Phi = \left\{ -i\omega \Delta + \Psi' i\alpha \Delta - \Psi''' i\alpha - \frac{\Delta^2}{R} \right\} \Phi = -\Delta \Phi_0(\alpha, y) \tag{1.3}$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (y=0), \quad \left(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) < \infty \quad (y \rightarrow \infty)$$

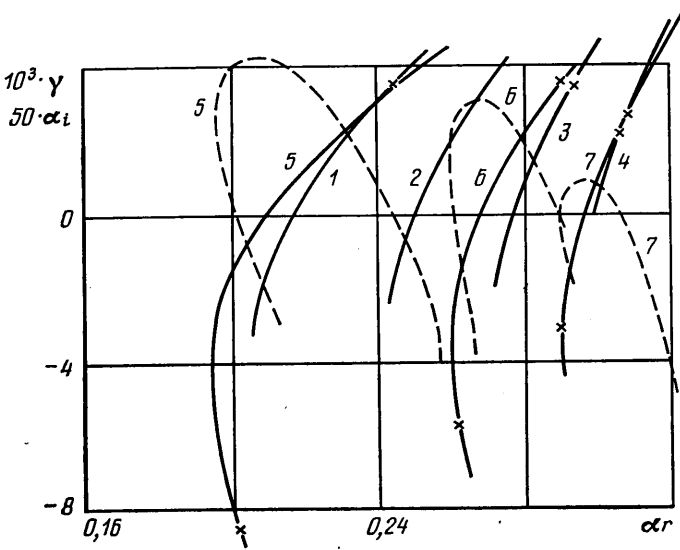
$$\Phi_0 = \Phi(\alpha, y) |_{t=0}$$

определяющей вид Φ и $\omega = \omega(\alpha, R)$. В потоке Блазиуса существует единственная неустойчивая мода дискретного спектра (ТШ-мода) $\{\omega_i = = \omega_i(\alpha, R) \geq 0, R \geq R_{cr}, \alpha = \alpha_r\}$. Очевидно, что ее вклад становится домини-

рующим при $\omega_r t > 1$ и $R > R_{cr}$, $\omega_i/\omega_r \ll 1$ и поведение возмущений дается асимптотикой интеграла (1.2), где $\omega = \omega(\alpha, R)$. Последнюю можно определить методом перевала, деформируя путь F так, чтобы он проходил через седловую точку $\alpha = \alpha^*$, $\partial\omega(\alpha^*)/\partial\alpha = x/t$. В сечении $R = \text{const}$ вид ψ определяется окрестностью α^* и $\alpha_m = \min \alpha$

$$\psi \approx \Phi(\alpha^*, \omega(\alpha^*), y) e^{i(\alpha x - \omega(\alpha^*)t)} \left[2\pi t \frac{\partial^2 \omega(\alpha^*)}{\partial \alpha^2} \right]^{-1/2} + \Phi(\alpha_m, \omega(\alpha_m), y) e^{i(\alpha_m x - \omega(\alpha_m)t)} \left[x - \frac{\partial \omega(\alpha_m)}{\partial \alpha} t \right]^{-1} \quad (1.4)$$

В силу стационарности основного движения несущая частота пакета $\omega_r = \text{const}$ и его поведение вниз по течению определяется зависимостью от R , задаваемой локальной дисперсионной связью $\alpha = \alpha(\omega_r, R)$. Расчеты показали, что в широком диапазоне α_r имеет место соотношение $\omega_r \approx \sigma(R)\alpha_r + f(\alpha_i)$. Вариации α_i приводят к аффинному смещению кривых $\alpha_r = \alpha_r(\omega_r)$ вдоль оси ω_r и практически не изменяют σ . Фазовая скорость

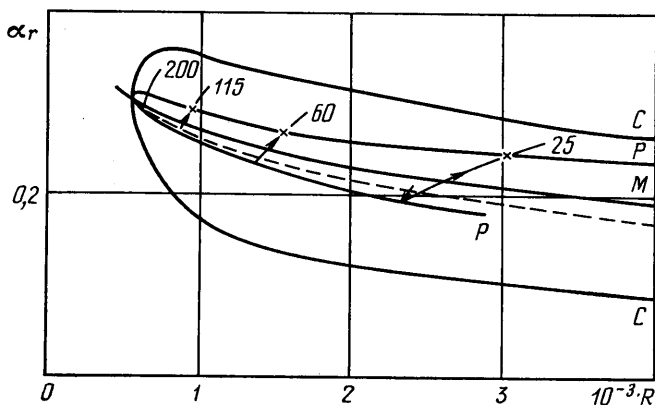


Фиг. 1

ω_r/α_r убывает с ростом α_i , а σ увеличивается вместе с R , сохраняя вид зависимости инвариантным.

Зависимость $\omega_i = \omega_i(\omega_r)$ имеет экстремумы $\omega_i''(\omega_{r1}) > 0$, $\omega_i''(\omega_{r2}) < 0$ ($\omega_{r1} < \omega_{r2}$). Максимум $\omega_i(\omega_{r2})$ убывает с ростом α_i , а смещение вниз по течению сдвигает положение ω_{r1} и ω_{r2} к нулю. Поведение седловых точек α^* на плоскости (α_r, α_i) при различных ω_r и R показано на фиг. 1 (сплошные линии 1-4 - $F=25, 60, 115, 200$; 5-7 - $R=3000, 1000, 600$). Оказалось, что в области $R < R_{cr}$ седловые точки существуют только для затухающих ($\gamma = \omega_i - \alpha_i \partial\omega(\alpha^*)/\partial\alpha < 0$) возмущений $\omega_r > \omega_{r cr}$, где $\omega_{r cr}$ - первая неустойчивая по классической теории частота $\omega_i(\omega_{r cr}, R_{cr}) = 0$. В результате вклад низкочастотной области $\omega_r(\alpha_m)$, связанный со вторым членом (1.4), оказывается доминирующим, что, по-видимому, соответствует наблюдениям [9-10]. При $R \geq R_{cr}$ появляется диапазон $\omega_r \leq \omega_{r cr}$, внутри которого существуют седловые точки с $\gamma > 0$. На линиях $R = \text{const}$ нарастание имеет место при параметрах, соответствующих отрезкам, выделенным крестами. Зависимость $\gamma = \gamma(\alpha_r)$ при тех же R показана на фиг. 1 штриховыми линиями 5-7. Групповая скорость $v = \partial\omega(\alpha^*)/\partial\alpha$ растет, переходя из нижней полуплоскости α_i в верхнюю, причем для данных ω_r, R обнаружива-

ется пара точек с различными α_r , ν , γ , α_i . Случаи, при которых $\gamma > 0$ в обеих точках, могут означать присутствие в потоке двух волновых пакетов с одинаковой несущей частотой ω_r , но распространяющихся и растущих с разной скоростью. Область изменения R , внутри которой $\gamma > 0$, для «медленного» пакета заметно короче, чем для «быстрого». Практически следует ожидать, что эволюция квазигармонического возмущения в потоке связана с распространением именно последнего. Значение R , при котором появляются особенности $\text{Im}(\partial\omega/\partial\alpha) = 0$ ($\omega_r = \text{const}$), можно идентифицировать с точкой формирования пакета указанной частоты. Для $\omega_r < \omega_{r,cr}$ такие точки обнаружены только во внутренней области классической кривой нейтральной устойчивости. Сказанное удобно проиллюстрировать на плоскости (α_r, R) (фиг. 2). Кривая PP ограничивает область, внутри которой возможны незатухающие квазигармонические возмущения, CC — классическая нейтральная кривая. Область неустойчи-



Фиг. 2

вости пакетов заметно уже и сосредоточена вокруг линии максимального инкремента M ($\gamma = \omega_i(\alpha)$, $\alpha_i = 0$). Для $\omega_r < \omega_{r,cr}$ седловые точки левее PP отсутствуют. Значения $\gamma = 0$ достигаются в положениях, отмеченных крестами. Нижняя ветвь PP не совпадает с нейтральной кривой пакетов (штрихованная линия). Интервал между этими линиями вдоль $\omega_r = \text{const}$ соответствует области усиления «медленного» пакета (стрелки на $\omega_r = \text{const}$ указывают направление роста групповой скорости). С ростом R верхние ветви PP и CC сближаются. Величина γ меняется вдоль M и, как известно из классической теории устойчивости, достигает максимума при частотном параметре $F \approx 60 \cdot 10^{-6}$. Тем не менее, согласно расчетам, наибольшее нарастание интенсивностей достигается при $F \approx (25-40) \cdot 10^{-6}$, что обусловлено расхождением ветвей PP , т. е. расширением области R с $\gamma > 0$. Именно в этом диапазоне F эксперименты [9-10] регистрируют выделение синусоидальных возмущений, ведущих к переходу. Причем область их формирования совпадает с окрестностью линии M .

Уже отмечалось, что, согласно [2], эволюция импульса в пограничном слое близка к развитию пакета, максимум интенсивности которого смещается вдоль M ($\omega_{r,m} = \omega_r(R)$). Причины такого поведения, по-видимому, также объясняются видом области PP . Для фиксированного сечения R ветви PP вырезают узкую полосу несущих ω_r в окрестности $\omega_{r,m}$. Тогда из набора элементарных пульсаций, аппроксимирующих спектр, доминировать будут пакеты с $\omega_r \approx \omega_{r,m}$, так как более высокочастотные пакеты сместились к зоне $\gamma < 0$, а низкочастотные еще не сформировались. Идет каскадный процесс возбуждения и затухания пакетов, в результате которого частотный параметр пика интенсивности уменьшается вместе со

смещением вниз по течению. Условием реализации этого процесса является гладкость спектрального распределения введенного импульса.

2. Особенности линейной эволюции сказываются и на последующих нелинейных стадиях. Для их исследования воспользуемся асимптотическим методом усреднений [11]. Следуя последнему, решение для пакета волновых возмущений локально-параллельного потока представим в виде

$$\psi = \sum_{n,m=0} \varepsilon^n \mu^m \psi_{nm}, \quad \psi_{00} = A_0(\varepsilon x, \varepsilon t, \mu x, \mu t) \varphi(y, \alpha)$$

$$\theta = \alpha x - \omega_r t, \quad \varepsilon = \max \left| \frac{\psi_0}{\Psi} \right| \ll 1, \quad \mu = \left| \frac{\Delta \alpha_r}{\alpha_r} \right| \ll 1 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} = \varepsilon F_{10} + \mu F_{01} + \sum_{n,m=1} \varepsilon^n \mu^m F_{nm}$$

где ψ_{00} — решение линейной задачи (2.1), F_{nm} — операторы, определяемые в процессе решения, ε и μ характеризуют интенсивность и спектральную ширину пакета. Подстановка (2.1) в уравнение для возмущений, усреднение и требование ограниченности решения на масштабах $(x, t) > > (\alpha_r, \omega_r)^{-1}$ приводят к выражению для функции тока

$$\psi = \psi_{00} + \varepsilon (A^2 e^{2i\theta} \varphi_{12} + |A|^2 \varphi_{10}) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu) \quad (2.2)$$

где амплитуда огибающей пакета $A = A_0 e^{\omega_r t}$, а $\varphi_{12}(y, \alpha)$ и $\varphi_{10}(y, \alpha)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{i}{2} \mu^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} - \gamma \right) A = \varepsilon^2 S |A|^2 A \quad (2.3)$$

$$A|_{t=0} = \int_{-\Delta \alpha/2}^{\Delta \alpha/2} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad \chi = x_1 + \mu x$$

$$L(2\alpha_r, 2\omega_r) \varphi_{12} = N(\varphi) \varphi$$

$$L(0, 0) \varphi_{10} = N(\varphi) \varphi^* + N(\varphi^*) \varphi$$

$$\varphi_{1j} = \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial y} = 0 \quad (y=0, \infty, j=0, 2) \quad (2.4)$$

$$N(f) = \frac{\partial \Delta}{\partial x} f \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \Delta}{\partial y} f \frac{\partial}{\partial x}$$

где S выражается через φ , φ_{10} , φ_{20} и решение сопряженного уравнения (1.3). Очевидно, что нелинейные эффекты впервые проявляются в окрестности максимума пакета, определяемого седловой точкой α^* на комплексной плоскости. Переход к комплексным α^* ($\alpha_i \neq 0$) эквивалентен замене

$$A \rightarrow A_0 e^{\omega_i(\alpha^*)t - \alpha_i^* x}, \quad \varphi(y, \alpha) \rightarrow \varphi(y, \alpha^*)$$

$$\theta \rightarrow \alpha_r^* x - \omega_r(\alpha^*) t$$

что было обосновано для линейной задачи в [7]. С учетом замены в условиях $\omega_i(\alpha^*) \ll \omega_r(\alpha^*)$, $\alpha_i^* \ll \alpha_r^*$ алгоритм нелинейного решения (2.2), (2.4) остается неизменным. В системе координат, связанной с центром пакета, из (2.3) находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \omega(\alpha^*)}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi_0^2} - \gamma_1 \right) B = \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} S_1 |B|^2 B \quad (2.5)$$

$$B = A_0 e^{\gamma_1 \tau}, \quad \gamma_1 = \mu^{-2} \left(\omega_i(\alpha^*) - \frac{\partial \omega(\alpha^*)}{\partial \alpha} \alpha_i^* \right)$$

$$\tau = \mu^2 t, \quad \chi_0 = \chi - \frac{\partial \omega(\alpha^*)}{\partial \alpha} \mu t$$

Уравнение этого типа описывает широкий класс нелинейных систем. Математические свойства его решений изучались в [12, 13]. В линейном приближении ($\epsilon \ll \mu$) решение (2.5) совпадает с (1.4). При $\epsilon \gtrsim \mu$ возможно как периодическое, в частности однородное, так и нерегулярное в пространстве и времени поведение [12, 13], которое в гидродинамических потоках можно связать с началом перехода к турбулентности. Соответствующие решения обнаружены при расчетах некоторых конкретных течений [14]. Представляют интерес условия их существования в потоке Блазиуса.

Ограничимся рассмотрением окрестности центра пакета, для которой вид решения и начально-краевые условия могут быть выбраны в виде

$$B(\chi_0, \tau) = \sum_{n=-N}^N b_n(\tau) e^{i\beta n \chi_0}, \quad B(\chi_0, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(0) e^{i\beta n \chi_0} \quad (2.6)$$

$$B(0, \tau) = B(l, \tau), \quad \frac{\partial B(0, \tau)}{\partial \chi_0} = \frac{\partial B(l, \tau)}{\partial \chi_0}$$

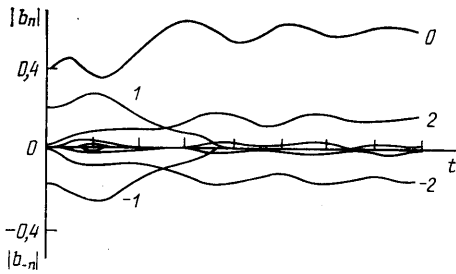
$$\beta = \frac{2\pi}{l} \leq \Delta\alpha, \quad \frac{\alpha_i}{\Delta\alpha} \leq 1$$

Система (2.5)–(2.6) интегрировалась численно на основе неявной конечно-разностной схемы второго порядка точности. Использовался метод циклической прогонки и итерации для учета нелинейности. Выбор алгоритма и размер шага сетки соответствовал требованиям, сформулированным в [12], и обеспечивал достаточную точность счета для гармоник с $|n| \leq 5$ ($N=5$). Смещение в комплексную плоскость α и переход к переменным τ, χ_0 позволили в широком диапазоне ω_r, R исключить из амплитудного уравнения (2.5) член, ответственный за неустойчивость счета. В [12–14] ограничивались рассмотрением точек, отвечающих кривой M (фиг. 2), где $\partial \omega_i(\alpha_r) / \partial \alpha = 0$.

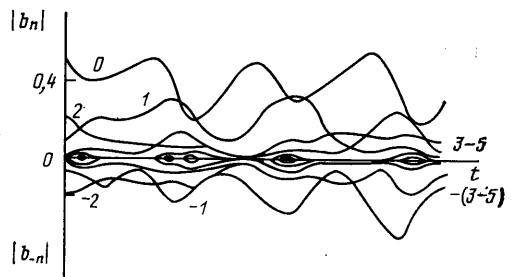
Поведение квазигармонического возмущения определяется шириной l^{-1} и видом $\{b_n(0)\}$ спектра, а также (через коэффициенты, рассчитанные для конкретного потока) несущей частотой ω_r и числом R .

Рассмотрим зависимость локальных по R режимов эволюции от указанных параметров (фиг. 3–5). Согласно расчетам, условия линейного развития сохраняются вплоть до $|B| = (0,7-1,2) \cdot 10^{-2}$. При достижении этого уровня амплитуда огибающей выходит на однородный, периодический или нерегулярный режим.

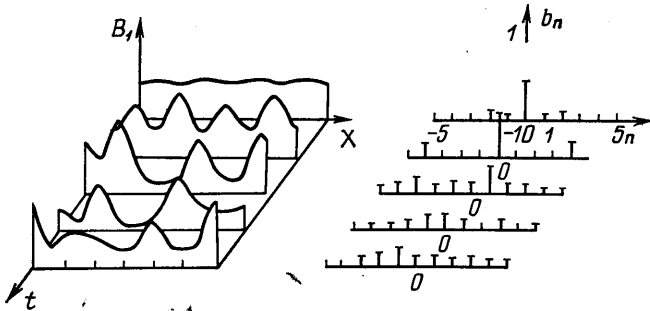
Вариации R во внутренней области PP (фиг. 2) с точностью до 10^{-2} не меняют коэффициентов уравнения (2.5) для пакетов с несущими частотными параметрами $F = (60-115) \cdot 10^{-6}$. Изменение при этом знака α_i и величины γ в окрестности $\omega_i = \max \gamma$ качественно сохраняет картину эволюции инвариантной. Более заметная перестройка возникает при переходе к другим ω_r . Понижение частоты пакета увеличивает время выхода на установившийся режим, снижает порог $|B(\chi_0, 0)|$ эффективного возбуждения высших гармоник ($|n| > 1$). Причину такого изменения естественно связать с ослаблением диссипативных механизмов. Понижение порога вместе с расширением области неустойчивости при убывании ω_r могут служить объяснением доминирующей роли низкочастотных пульсаций в естественном переходе.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Нелинейная эволюция существенно связана со спектральным параметром β . Так, при заданных ω_r , R , $|B(\chi_0, 0)| \approx 10^{-2}$ для $\beta=0,02$ в пакете реализуется маломодовый четный ($b_{2n+1}=0$) режим, выход на который осуществляется с произвольных начальных условий. Фигура 3 иллюстрирует формирование такого режима при $R=950$, $F=102 \cdot 10^{-2}$. Уменьшение β последовательно усложняет режим, приводя к возбуждению высших гармоник, проявлению пространственной и спектральной несимметрии и временной нерегулярности. Вначале вплоть до $\beta=0,01$ возрастает интенсивность и частота всплесков $b_n(\tau)$ ($|n| \geq 2$) с сохранением симметрии $b_n = b_{-n}$. Проявление последних заметно на фиг. 4. Далее такой синхронизм разрушается и в тех же условиях могут возникать состояния с пространственно-временной нерегулярностью (фиг. 5). Дальнейшее падение β (до $\beta=0,008$) способно трансформировать режим к состоянию диффузионного хаоса, которое характеризуется выположиванием спектра и пилообразным пространственным распределением [12, 13].

Уменьшение β делает эволюцию более чувствительной к виду исходного возмущения. Так, если в условиях фиг. 3 моды с $n \neq 0 \pm 2$ могут существовать только на этапе установления, то изменение $\{b_n(0)\}$ при $\beta < 0,02$ приводит к множеству разнообразных состояний.

Возникает диапазон значений $b_n(0)$, приводящих через модуляционную неустойчивость к выходу на устойчивые четные режимы с $n=0, \pm 2, \pm 4$ или $0, \pm 4$.

Расчеты показали, что уровень сложности нелинейной эволюции растет прежде всего вместе с интенсивностью низких гармоник $n=0, \pm 1$. Изменение интенсивности $|b_n(0)|$, $|n| > 2$ малозначимо при $|B| \lesssim 10^{-2}$. Еще менее заметными для качественной картины оказываются спектральная несимметрия исходного возмущения $b_n(0) \neq b_{-n}(0)$ и вариации $\{\arg b_n(0)\}$. Перечисленные условия воздействуют на детали режима установления, но не на вид конечного состояния. Возникновение хаоса становится возможным при $|B(\chi_0, 0)| \geq 2\%$ во всей области рассмотренных параметров. Проведенное рассмотрение определяет карту локальных состояний пакетов конечной интенсивности над полем параметров. В типичных условиях начального этапа перехода $\epsilon \sim 10^{-3}$, $\beta \sim 10^{-2}$, $R \sim 10^3$ в

пограничном слое характерные времена нелинейности τ_n , дисперсии τ_g и непараллельности слоя τ_r оказываются одного порядка

$$\tau_n = |\varepsilon^2 S_1|^{-1}, \quad \tau_g = \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \beta^2 \right|^{-1}, \quad \tau_r = \left| \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right|^{-1}$$

$$\tau_n \sim \tau_g \sim \tau_r \sim 10^4$$

Корректный анализ продольной эволюции должен включать поправки на неоднородность течения. Тем не менее можно ожидать [15], что их учет не нарушает закономерность локально-параллельного приближения. Более существенным недостатком модели является ее двумерность. Уровень амплитуд, при которых нелинейность приводит к сложным режимам, заметно выше порога наблюдаемого возбуждения трехмерности [2, 9, 10]. Взаимодействие плоских волн играет вторичную роль на этом этапе развития. Изученная модель позволяет определить степень ответственности двумерности и выявить физический механизм процесса, который, по-видимому, носит универсальный характер [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельман М. Б., Какоткин А. Ф. К пространственно-временному развитию возмущений в пограничном слое // ПМТФ. 1985. № 1. С. 42–47.
2. Gaster M. The development of a two-dimensional wave packet in a growing boundary layer // Proc. Roy. Soc. London, ser. A. 1982. V. 384. № 1787. P. 317–332.
3. Benney D. J., Maslowe S. A. The evolution in space and time of nonlinear waves in parallel shear flows // Stud. Appl. Math. 1975. V. 54. № 3. P. 181–205.
4. Smith F. T. Two-dimensional disturbance travel, growth and spreading in boundary layers // J. Fluid Mech. 1986. V. 169. P. 353–377.
5. Huerre P., Monkewitz P. A. Absolute and convective instabilities in free shear layers // J. Fluid Mech. 1985. V. 159. P. 151–168.
6. Fasel H. Numerical simulation of nonlinear growth of wave packets in boundary layer // Proc. Symp. on Turbulent and Chaotic Phenomena in Fluids. Kyoto. Japan. 1984. P. 31–38.
7. Itoh N. Linear stability theory for wave-packet disturbances in parallel and nearly parallel flows // Laminar-Turbulent Transition: IUTAM Sympos., Stuttgart, Germany, 1979. Berlin: Springer, 1980. P. 86–95.
8. Берс А. Пространственно-временная эволюция абсолютных и конвективных плазменных неустойчивостей // Основы физики плазмы. М.: Энергоиздат. 1984. Т. 2. С. 267–330.
9. Косорыгин В. С., Левченко В. Я., Поляков Н. Ф. К вопросу о возникновении волн в ламинарном пограничном слое // Неустойчивость до- и сверхзвуковых течений. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики. СО АН СССР, 1982. С. 44–52.
10. Kendall J. M. Study of the effect of the free-stream turbulence upon disturbances in the pre-transitional laminar boundary layer. Pt 1. Pasadena, Calif. Inst. of Technol., 1982. F/6 20/4.
11. Зельман М. Б. О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1974. Вып. 3. № 13. С. 16–21.
12. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Двухкомпонентные диссипативные системы в окрестности точки бифуркации // Математическое моделирование: Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. С. 7–59.
13. Елюхин В. А., Холпанов Л. П., Малюсов В. А. Возникновение многомодовой турбулентности в гидродинамических и химических реагирующих системах // Докл. АН СССР, 1984. Т. 278. № 5. С. 1188–1191.
14. Герценштейн С. Я., Сузороков А. Н., Шкадов В. Я. О нелинейных колебаниях в плоском следе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 3. С. 10–16.
15. Рубан А. И. Нелинейное уравнение для амплитуды волны Толлмина – Шлихтинга в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 60–67.

Новосибирск

Поступила в редакцию
2.II.1987