МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1988

УДК 532.516.013.12:537.84

О ДЕФОРМАЦИИ ВНЕШНИМ ПОТОКОМ ПОВЕРХНОСТИ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ, ПОКРЫВАЮЩЕЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР

КРАКОВ М. С.

В качестве одного из методов управления отрывом потока и уменьшения гидродинамического сопротивления при обтекании тел в [1] предлагается покрытие поверхности обтекаемого тела слоем магнитной жидкости, удерживаемой неоднородным полем. Эффективность метода изучена на примере обтекания кругового цилиндра, покрытого равномерным слоем магнитной жидкости, поверхность которой считается также цилиндрической и не зависящей от внешнего потока. При этом сопротивление цилиндра падает (если вязкость магнитной жидкости не слишком велика) и может быть значительно уменьшено. Представляет интерес определить характер деформации поверхности магнитной жидкости внешним потоком, так как степень деформируемости границы определяет возможность практической реализации предложенного метода. Кроме того, величина деформации, по-видимому, влияет на силу сопротивления цилиндра и определяет границы применимости принятого в [1] приближения недеформируемости поверхности.

Причиной деформации границы раздела магнитной и немагнитной жидкостей является противоположное направление градиентов давления в рассматриваемых областях. Действительно, во внешней области давление уменьшается по потоку. В слое магнитной жидкости, удерживаемой магнитным полем на поверхности тела, должно реализовываться циркуляционное течение, представляющее собой суперпозицию безнапорного сдвигового течения, вызываемого внешним потоком, и напорного возвратного течения. Последнее же может быть реализовано лишь при наличии в слое градиента давления, направленного по потоку. Таким образом, во внешнем течении давление по потоку падает, а во внутреннем — возрастает. Это приводит к утолщению слоя магнитной жидкости по потоку.

Отклонение границы раздела от равновесной приводит к перераспределению на ней гидростатического давления, создаваемого магнитным полем. Так как для удержания магнитной жидкости создается магнитное поле с градиентом напряженности, направленным к твердой поверхности, то гидростатическое давление на поверхности слоя выше там, где толщина слоя меньше. Таким образом, гидростатическое давление, создаваемое магнитным полем, может компенсировать разницу гидродинамических давлений во внешнем потоке и в слое магнитной жидкости. Условие компенсации нормальных напряжений и определяет форму деформируемой поверхности.

Рассмотрим цилиндр радиуса R, покрытый слоем магнитной жидкости, толщиной при отсутствии течения равной $a-R$. Поток деформирует границу раздела магнитной жидкости и потока и она приобретает форму $r=\zeta(\theta)=a[1+f(\theta)]$, заранее неизвестную. Форма поверхности определяется, исходя из предположения, что величина деформации существенно меньше толщины слоя, т. е. $|f(\theta)|\ll 1-\delta$, где $\delta=R/a$. В этом случае можно считать, что деформация слабо влияет на поля скорости и давления и последние можно задать в виде $v_i=v_i^{(0)}+v_i^{(1)}$, $p_i=p_i^{(0)}+p_i^{(1)}$, $v_i^{(1)}\ll v_i^{(0)}$, $p_i^{(1)}\ll p_i^{(0)}$, а $v_i^{(0)}$ и $p_i^{(0)}$ — поля скорости и давления, полученные в приближении недеформируемой поверхности [1], $i=1$, 2, индекс 1 относится к магнитной, индекс 2 — к немагнитной жидкости.

Условие равенства нормальных напряжений имеет вид

$$\left\{-p_1+\frac{2\eta_1}{1+(\zeta'/\zeta)^2}\left[\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}-\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial v_{1r}}{\partial\theta}+\frac{\partial v_{1\theta}}{\partial r}-\frac{v_{1\theta}}{\zeta}\right)\right]\right\}=$$
$$=\left\{\frac{2\eta_2}{1+(\zeta'/\zeta)^2}\left[\frac{\partial v_{2r}}{\partial r}-\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial v_{2r}}{\partial\theta}+\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial r}-\frac{v_{2\theta}}{\zeta}\right)\right]-p_2\right\}\quad(r=\zeta(\theta))\qquad(1)$$

где η — динамическая вязкость, $\zeta'=d\zeta/d\theta$. В приближении малости возмущений полей скорости и давления, а также деформации $|f(\theta)|$ условие (1) запишется на границе $r=a$ следующим образом (учитываются первые члены разложения в ряд по величине деформации, а также то, что $\partial v_{ir}^{(0)}/\partial\theta=0$):

$$-p_1^{(0)}(a)+2\eta_1\frac{\partial v_{1r}^{(0)}}{\partial r}+f\left[-\frac{\partial p_1^{(0)}}{\partial r}a+2\eta_1\frac{\partial^2 v_{1r}^{(0)}}{\partial r^2}a\right]-f'\left[\frac{\partial v_{1\theta}^{(0)}}{\partial r}-\frac{v_{1\theta}^{(0)}}{a}\right]=$$
$$=-p_2^{(0)}(a)+2\eta_2\frac{\partial v_{2r}^{(0)}}{\partial r}+f\left[-\frac{\partial p_2^{(0)}}{\partial r}a+2\eta_2\frac{\partial^2 v_{2r}^{(0)}}{\partial r^2}a\right]-$$
$$-f'\left[\frac{\partial v_{2\theta}^{(0)}}{\partial r}-\frac{v_{2\theta}^{(0)}}{a}\right]\quad(r=a)\qquad(2)$$

где $v_{ir}^{(0)}$, $v_{i\theta}^{(0)}$, $p_i^{(0)}$ — решения для скорости и давления, полученные в [1] в приближении Озеена для недеформируемой поверхности. В [1] было опущено выражение для $p_1^{(0)}$, которое имеет вид

$$p_1^{(0)}=\eta_2UR\left\{-\frac{R}{r}(1-\delta^2+2\ln\delta)-7\frac{r}{R}(1-\delta^2+2\delta^2\ln\delta)+4\frac{r}{R}\ln\frac{r}{R}(\delta^2-1)-\right.$$
$$\left.-8\frac{r}{R}\delta^2\ln\frac{r}{R}\ln\delta\right\}\frac{\cos\theta}{a^2D}+p_0+[p_M(r)-p_M(a)]$$
$$D=\frac{1}{2}\frac{\eta_2}{\eta_1}\left[\ln\left(\frac{\gamma R_2}{4}\right)-1\right]F+\left[\ln\left(\frac{\gamma \mathrm{Re}_2}{4}\right)-\frac{1}{2}\right]A\qquad(3)$$

$$F=(1-\delta^2)^2-4\delta^2\ln^2\delta,\ A=1-\delta^2[1-2\ln\delta(1-\ln\delta)],$$
$$\mathrm{Re}_2=\rho_2Ua/\eta_2$$

где $p_M(r)$ — гидростатическое давление в магнитной жидкости, создаваемое магнитным полем, $\gamma=1{,}7811\ldots$ — постоянная Маскерони.

Условие (2) представляет собой дифференциальное уравнение вида

$$C_1\cos\theta+(C_2+C_3\cos\theta)f-f'C_4\sin\theta=0\qquad(4)$$

решение которого определяет форму свободной поверхности. При этом параметры C_1, C_3, C_4, определяемые гидродинамическими величинами, есть величины одного порядка, а параметр C_2 определяется гидростатическим градиентом давления dp_M/dr.

Так как цилиндрическая поверхность границы раздела формируется градиентом магнитного гидростатического давления, то условие ее недеформируемости есть $dp_M/dr\to\infty$, т. е. $C_2\to\infty$. Источником деформации является внешний поток, влияние которого описывается параметрами C_1, C_3, C_4. Естественно предположить, что в случае малых деформаций поверхности справедливо соотношение $C_2\gg C_1$, C_3, C_4. Численные оценки выполнимости этого соотношения сделаем ниже, исходя из полученного решения и явного вида dp_M/dr для различных способов создания магнитного поля. Тогда уравнение (4) редуцируется к виду $f(\theta)=C_1\cos\theta/C_2$, т. е. деформированная поверхность описывается выражением

$$f(\theta)=-\frac{1}{a}\left[p_1^{(0)}-p_2^{(0)}+2\eta_2\frac{\partial v_{2r}{}^0}{\partial r}-2\eta_1\frac{\partial v_{1r}{}^0}{\partial r}\right]\left(\frac{dp_M}{dr}\right)^{-1}\quad (r=a)\qquad(5)$$

С учетом явного вида выражений для скорости и давления можно записать

$$f(\theta)=\frac{\eta_2 U}{a^2}\left(-\frac{dp_M}{dr}\right)_{r=a}f_0(\delta)\cos\theta$$

$$f_0(\delta)=\frac{\delta^4-12\delta^2-13-4\delta^2\ln\delta(7-4\ln\delta)}{[\ln({}^1/_4\gamma\,\mathrm{Re}_2)-1](F/2\mu)+{}^1/_2A[2\ln({}^1/_4\gamma\,\mathrm{Re}_2)-1]}\qquad(6)$$

$$\mu=\eta_1/\eta_2$$

Из (6) следует, что деформированная поверхность представляет собой в первом приближении круговой цилиндр, сдвинутый относительно твердого цилиндра вдоль потока. Величина деформации в приближении Озеена пропорциональна вязкости внешнего потока и обратно пропорциональна неоднородности магнитного поля.

Можно выделить два случая магнитного поля, величина которого не зависит от угла θ и которое является точным решением уравнений Максвелла: магнитное поле создается током I, протекающим по цилиндру, и цилиндр представляет собой магнит, однородно намагниченный поперек оси, например вдоль потока. В первом случае магнитное поле вне проводника $\mathbf{H}=\{0;\ I/2\pi r;\ 0\}$, как правило, не слишком велико и для магнитной жидкости можно использовать линейный закон намагничивания $M=\chi H$. Тогда

$$\left(-\frac{dp_M}{dr}\right)_{r=a}=-\frac{1}{2}\frac{d\mu_0\chi H^2}{dr}=4\mu_0\chi\pi^2I^2\left(\frac{\delta}{R}\right)^3$$

Если же источник магнитного поля — цилиндрический магнит с намагниченностью M_I, то его магнитное поле без учета влияния на него магнитной жидкости есть $\mathbf{H}=\{M_IR^2\cos\theta/2r^2;\ M_IR^2\sin\theta/2r^2;\ 0\}$, величина же такого поля $H=M_IR^2/2r^2$. Если M_I не слишком велико ($\leqslant-20$ кА/м), то можно также использовать линейный закон намагничивания. Тогда $(-dp_M/dr)_{r=a}=\mu_0\chi M_I^2\delta^5/R$. Если же M_I велико ($\geqslant100$ кА/м), то магнитную жидкость можно считать в состоянии насыщения с намагниченностью M_S и тогда $(-dp_M/dr)_{r=a}=\mu_0M_SM_I\delta^3/R$.

Таким образом, в этих трех предельных случаях деформация поверхности определяется выражениями

$$f(\theta)=\frac{4\eta_2 UR\pi^2}{\mu_0\chi I^2}\frac{f_0(\delta)}{\delta}\cos\theta=\varepsilon_I\frac{f_0(\delta)}{\delta}\cos\theta\qquad(7)$$

$$f(\theta)=\frac{\eta_2 U}{\mu_0\chi M_I^2R}\frac{f_0(\delta)}{\delta^3}\cos\theta=\varepsilon_\chi\frac{f_0(\delta)}{\delta^3}\cos\theta\qquad(8)$$

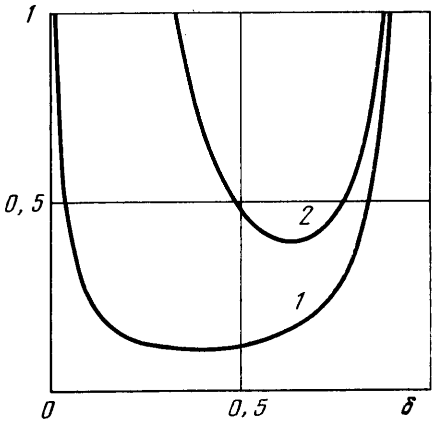
$$f(\theta)=\frac{\eta_2 U}{\mu_0M_SM_IR}\frac{f_0(\delta)}{\delta}\cos\theta=\varepsilon_{M_S}\frac{f_0(\delta)}{\delta}\cos\theta\qquad(9)$$

причем выражение (7) соответствует обтеканию проводника с током, (8) — обтеканию слабонамагниченного цилиндра, (9) — сильнонамагниченного.

Величина деформации поверхности определяется значением параметров ε_I, ε_χ и ε_{MS} и функций $f_0(\delta)/\delta$, $f_0(\delta)/\delta^3$. Если в качестве условия малости деформации положить ε_I, ε_χ, $\varepsilon_{MS}\ll1$, то одновременно необходимо потребовать выполнения условия $f_0(\delta)/\delta$, $f_0(\delta)/\delta^3 \leqslant 1-\delta$. Отметим, что условия ε_I, ε_χ, $\varepsilon_{MS} \ll 1$ эквивалентны использованному ранее приближению $C_2 \gg C_1$, C_3, C_4, так как $\varepsilon \sim C_1/C_2$, а C_1, C_3 и C_4 — величины одного порядка. График зависимости функций $f_0(\delta)/\delta$ (кривая *1*) и $f_0(\delta)/\delta^3$ (кривая *2*) от толщины покрытия (см. фигуру), построенный для случая $\mu=0{,}0042$; $\mathrm{Re}_2=3\cdot10^{-2}$, показывает, что выполнение этих условий возможно лишь в области средних значений δ. Величина деформации резко возрастает при малых ($\delta\to1$) и больших ($\delta\to0$) толщинах слоя магнитной жидкости.

Это связано с тем, что при малых толщинах для создания возвратного течения требуется большой градиент давления вдоль слоя, что, как говорилось выше, и ведет к деформации поверхности. Действительно, градиент давления в напорном течении пропорционален $Q/(a-R)^2$, а в куэттовском течении, создаваемом внешним потоком, расход Q пропорционален толщине слоя $a-R$, т. е. градиент давления пропорционален $(a-R)^{-1}$. Это означает, что, несмотря на уменьшение скорости границы раздела с уменьшением толщины, градиент давления в слое возрастает, что и ведет к росту деформации. При больших толщинах слоя, вероятно, рост скорости границы раздела опережает падение градиента давления и деформация также возрастает.

Приведем численные оценки применимости приближения малой деформации поверхности. Для проводника с током 30 А, покрытого слоем магнитной жидкости радиусом 3 мм с восприимчивостью $\chi=3$ и вязкостью $\eta_1=5\cdot10^{-3}$ кг/(м·с), обтекаемого глицерином, вязкость которого $\eta_2=1{,}2$ кг/(м·с) (что соответствует случаю $\mu=0{,}0042$, изображенному на фигуре), условие $\varepsilon_I \ll 1$ соблюдается при $U \ll 2$ см/с, при этом $\mathrm{Re}_2 \ll 6\cdot10^{-2}$. Для цилиндрического магнита тех же размеров с намагниченностью материала $M_I=10^4$ А/м, что на порядок меньше намагниченности обычных постоянных магнитов из феррита бария, получим следующие оценки: $\varepsilon_\chi \ll 1$ при $U \ll 1$ м/с. Для сильного магнита $M_I=4\cdot10^5$ А/м и жидкости с намагниченностью насыщения $M_S=5\cdot10^4$ А/м поверхность можно считать недеформируемой при $U \ll 60$ м/с (в области средних значений δ). В обоих случаях приближение малости деформации справедливо вплоть до чисел Рейнольдса, больших единицы, т. е. в области чисел Рейнольдса, выходящей за рамки приближения Озеена. Это означает, что в приближении Озеена, для которого справедливо наше рассмотрение, деформацию поверхности заведомо можно считать малой.



Отметим, что, как следует из фигуры, существует оптимальная с точки зрения малости деформации толщина покрытия δ^*. Она зависит от структуры магнитного поля и свойств магнитной жидкости и равна $\delta^*=0{,}4$ для проводника с током и сильно намагниченного цилиндра и $\delta^*=0{,}65$ для слабо намагниченного цилиндра. Величина δ^* несколько возрастает с ростом отношения η_1/η_2. Одновременно возрастает амплитуда деформации.

Таким образом, в работе определены рамки применимости приближения недеформированной границы раздела. Кроме того, показано, что при малых деформациях поверхность магнитной жидкости представляет собой круговой цилиндр, сдвинутый относительно твердого ядра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Краков М. С.* Управление отрывом потока с помощью намагничивающей жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 10–14.

Минск

Поступила в редакцию 13.VIII.1986