

Можно видеть, что при $\alpha_b > 0$ пути через перевал закрыты, зато открывается путь, обходящий две горы снизу, следовательно, формула (2) остановится недействительной. Таким образом, остаются справедливыми оба условия абсолютной неустойчивости (3) и (4), которые определяют интервал ее существования при $T_w = 1$ $1,21046 < \gamma < 1,23829$ (см. строки 9–11 таблицы). Результаты, приведенные в строках 12–14 таблицы, определяют соответствующий интервал для возмущений третьей моды $1,15381 < \gamma < 1,15505$.

Область II на фиг. 3 представляет параметры абсолютной неустойчивости, которая обусловлена существованием второй сверхзвуковой моды собственных возмущений. Так же как и область I, появляющаяся в результате ветвления второй и третьей дозвуковых мод, она ограничена со стороны высоких значений T_w (или γ) условием (3), а низких – условием (4).

Итак, при сверхзвуковом обтекании имеет место абсолютная неустойчивость пограничного слоя. Она обусловлена существованием ряда неустойчивостей высших мод (до- и сверхзвуковых) и локализована в окрестности таких значений параметров пограничного слоя, при которых какая-либо из точек ветвления дисперсионного соотношения $\omega(\alpha)$ находится на вещественной оси α .

ЛИТЕРАТУРА

1. Mack L. M. Boundary Layer stability theory. Jet Propulsion Laboratory Document № 900–277 (rev A). Pasadena: JPL, 1969.
2. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982. 488 с.
3. Petrov G. V. Stability of thin viscous shock layer on a wedge in hypersonic flow of a perfect gas // Laminar-Turbulent Transition: IUTAM Symposium, Novosibirsk, 1984. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1985. P. 487–493.

Новосибирск

Поступила в редакцию
2.II.1987

УДК 533.6.01+536.24

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ ОБГАРНЫХ ФОРМ КЛИНА (КОНУСА)

ПОЛЯКОВ И. Н.

Задача Коши для малых возмущений поверхности стационарных обгарных форм поставлена и изучена в [1]. В настоящей работе показано, что сделанный там вывод о принципиальном различии свойств задачи в плоском ($\nu=0$) и осесимметричном ($\nu=1$) случаях сохраняет силу и применительно к обгарным формам клина и конуса – для конуса решение рассматриваемой задачи единственно, а для клина выбор решения требует привлечения дополнительного условия.

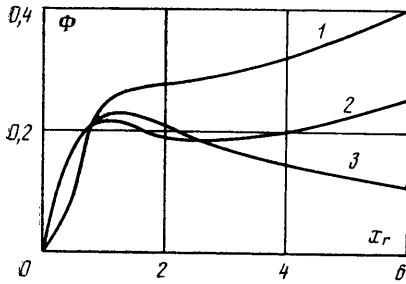
1. В рамках обычных для подобной теории предположений (гипотеза локальности для распределения давления; метод эффективной длины для расчета тепловых потоков; предположение о постоянстве эффективной энтальпии материала) уравнение изменения формы тела $x=x(r, t)$ за счет аэродинамического разрушения материала имеет вид [2]

$$x_t = D\sqrt{1+x_r^2} = \frac{\Phi(x_r)}{\xi^n} = \Omega(x_r, \xi) \quad (1.1)$$

$$\xi = r^{-\nu/(1-n)} \int_0^r \Phi(x_r) r^{\nu/(1-n)} dr, \quad \omega = (\gamma-1)/\gamma$$

$$\Phi(x_r) = p u_e \sqrt{1+x_r^2}, \quad u_e = \sqrt{1-p^\omega}$$

Здесь $\{x, r\}$ – цилиндрическая система координат, начало которой совпадает с критической точкой тела; D – скорость уноса материала вдоль внутренней нормали



к поверхности тела; p – давление на поверхности, отнесенное к давлению торможения за прямым скачком уплотнения; u_e – скорость на внешней границе пограничного слоя; γ – эффективный показатель адиабаты; $n=1/2$ при ламинарном теплообмене и $n=1/5$ – при турбулентном.

Нелинейное интегродифференциальное уравнение (1.1) имеет семейство характеристик, определяемых в пространстве $\{t, r, x\}$ соотношениями [2, 3]

$$\frac{dr}{dt} = -\Omega x_r = \kappa, \quad \frac{dx}{dt} = \Omega + \kappa x_r = \chi \quad (1.2)$$

Очевидно, $\chi > 0$ всегда, а знак κ определяется видом функции $\Phi(x_r)$. Примерный вид функции Φ показан на фигуре (при построении использована формула Ньютона на $p = \varepsilon + 1/(1+x_r^2)$ и $\gamma = 1.4$; кривым 1–3 соответствуют значения $\varepsilon = 0.1; 0.02; 0$).

Задача Коши для уравнения обгара (1.1) в случае клина или конуса (т. е. $x = \lambda r$ при $t=0$) имеет автомодельное решение [4]

$$x = t^\alpha h(\eta), \quad \xi = t^\alpha g(\eta), \quad \eta = r/t^\alpha, \quad \alpha = 1/(1+n) \quad (1.3)$$

Функции $h(\eta)$ и $g(\eta)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой при $\eta \rightarrow 0$ имеет вид

$$h = a + \frac{a^k (1-n)^k}{(1+\nu)^{k-1} (1+n)^k} \eta^k + \dots, \quad k = \frac{1}{1-n} \quad (1.4)$$

$$g = \frac{a^k (1-n)^k}{(1+\nu)^k (1+n)^k} \eta^k + \dots, \quad \dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dx_r}$$

Асимптотика (1.4) содержит свободный параметр a (смещение критической точки тела при $t > 0$), который определяется только при полном решении задачи. Для ламинарного теплообмена $k=2$, поэтому образующая мгновенной формы тела в окрестности оси $r=0$ касается параболы ($x_r \sim r$). При чисто турбулентном теплообмене $k=5/4$ и $x_r \sim r^{1/4}$ при $r \rightarrow 0$.

Решение задачи при $\eta \rightarrow \infty$ имеет вид

$$h = \lambda \eta + \frac{(1+n)(1-n+\nu)^n \Phi^{1-n}(\lambda)}{(1-n)^{1+n}} \eta^{-n} + \dots \quad (1.5)$$

$$g = \frac{(1-n)\Phi(\lambda)}{1-n+\nu} \eta + \frac{n(1+n)(1-n+\nu)^n \dot{\Phi}(\lambda) \Phi^{1-n}(\lambda)}{(1-n)^n (\nu+n^2-n)} \eta^{-n} + \dots$$

При некотором фиксированном моменте времени t в соответствии с определением η асимптотическое решение (1.5) отвечает периферии тела ($r \gg t^\alpha$), а (1.4) – окрестности критической точки ($r \ll t^\alpha$).

2. Уравнение эволюции малых симметричных возмущений $f(r, t)$ поверхности (под которыми будем подразумевать малую величину отклонения образующих двух тел, одно из них – исходное $x = x^{(0)}(r, t)$) в процессе обгара имеет вид [4]

$$f_t + \kappa f_r = -m \xi^{(1)}/\xi \quad (2.1)$$

$$m = -\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = n x_t^{(0)} > 0, \quad \xi^{(1)} = r^{-\nu/(1-n)} \int_0^r \dot{\Phi}(x_r^{(0)}) f_r r^{\nu/(1-n)} dr$$

Все коэффициенты в (2.1) вычисляются по формуле исходного тела $x^{(0)}(r, t)$ и являются известными функциями r и t . Уравнение эволюции имеет, естественно, то же семейство характеристик (1.2), что и исходное. При этом предполагается, что рассматриваемые возмущения не приводят к коренной перестройке семейства характеристик по сравнению с семейством, отвечающим невозмущенной поверхности.

3. Для малых $t \ll 1$ рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.1). При этом за исходное тело $x^{(0)}(r, t)$ возьмем мгновенные обгарные формы клина (конуса). Тогда, ограничиваясь главными членами в асимптотиках (1.4) и (1.5), нетрудно получить

уравнения характеристик семейства (1.2)

$$r_0^k - r^k = (1+n) \kappa_n \dot{\Phi}(0) t^{kn}, \quad r \ll t^\alpha \quad (3.1)$$

$$r_0^{n+1} - r^{n+1} = (1+n) \kappa_n^* \dot{\Phi}(\lambda) t, \quad r \gg t^\alpha$$

$$\kappa_n = \left(\frac{(1+\nu)(1+n)}{a(1-n)} \right)^{kn}, \quad \kappa_n^* = \left(\frac{1-n+\nu}{1-n} \right)^n \Phi^{-n}(\lambda)$$

Здесь r_0 отвечает точке на начальной форме, из которой выходит характеристика. Величина r_0 может быть использована в качестве характеристической переменной. В окрестности критической точки тела, как это следует из фигуры, характеристики (3.1) направлены всегда вниз, к оси $r=0$. На остальной части образующей поведение характеристик определяется наклоном начальной формы $\beta = \text{arcsctg}(\lambda)$. Однако из фигуры следует, что практически для всего диапазона углов характеристики также направлены вниз.

Используя характеристическую переменную r_0 , уравнение (2.1) для клина (конуса) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{r_0} = - \frac{n(1+\nu)}{1-n} t^{kn} \frac{\kappa_n \dot{\Phi}(0)}{r^k} r^{-\nu k} \int_0^r f_r r^{\nu k} dr, \quad r \ll t^\alpha \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{r_0} = - \frac{n(1-n+\nu)}{1-n} \frac{\kappa_n^* \dot{\Phi}(\lambda)}{r^{1+n}} r^{-\nu k} \int_0^r f_r r^{\nu k} dr, \quad r \gg t^\alpha$$

Отметим, что интегралы в правых частях полученных уравнений вычисляются вдоль мгновенной формы клина (конуса) в процессе абляции.

4. В осесимметричном случае интегродифференциальные уравнения (3.2) можно свести к интегральным. Раскрыв для этого интегралы в правых частях (3.2) по частям, проинтегрируем получающиеся соотношения. В результате получим

$$f(r, t) = f_0(r_0) \left(\frac{r}{r_0} \right)^m + kmr \int_r^{r_0} \left(\int_0^r r^{k-1} f dr \right) \frac{dr}{r^{2k+m_1}} \quad (4.1)$$

Здесь $m = kn(2-n)$, $m_1 = n$ при $r \gg t^\alpha$ и $m = 2kn$, $m_1 = kn$ при $r \ll t^\alpha$; $f_0(r_0)$ — начальное распределение возмущений вдоль образующей конуса.

Уравнение (4.1) аналогично полученному в [1] для осесимметричных стационарных форм, поэтому из него также можно получить оценку для амплитуды малых возмущений

$$\max_G |f(r, t)| \leq \max |f_0(r_0)| \quad (4.2)$$

Здесь G — область на плоскости $\{r, x\}$, ограниченная характеристикой r_0 , образующей конуса, осью $r=0$ и мгновенной формой «невозмущенного» решения уравнения обгара в момент времени t . Из (4.2) следует, что амплитуда малых возмущений поверхности конуса максимальна на начальной форме, т. е. решение задачи Коше в этом случае единственно.

5. Для плоских задач уравнения (3.2) утрачивают интегродифференциальный характер и сводятся к виду

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{r_0} = - t^{kn} \frac{n \kappa_n \dot{\Phi}(0)}{(1-n) r^k} (f - f_*), \quad r \ll t^\alpha \quad (5.1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{r_0} = - \frac{n \kappa_n^* \dot{\Phi}(\lambda)}{r^{1+n}} (f - f_*), \quad r \gg t^\alpha$$

Здесь $f_* = f_*(t) = f(t, 0)$ — неизвестное заранее распределение решения на оси $r=0$, которое должно в принципе определяться из решения первого из уравнений (5.1) с начальными данными при $t=0$. Однако непосредственно это оказывается невозможным, так как уравнения (5.1), как и в случае плоских стационарных обгарных форм [1], релаксационного типа и независимо от начальных данных их решение $f \rightarrow f_*$ при $r \rightarrow 0$, причем $f_*(t)$ произвольна.

Решение полученных уравнений можно записать в виде

$$f(r, t) = f_*(t) + (f_0(r_0) - f_*(0)) \left(\frac{r}{r_0} \right)^m - r^m \int_0^t r^{-m} f_*(t) dt \quad (5.2)$$

Здесь $m=kn$ при $r \ll r_0$ и $m=n$ при $r \gg r_0$. Интеграл в правой части (5.2) берется вдоль характеристики r_0 , при этом значение r_0 определяется по текущему r и t согласно (3.1).

Используя требование отсутствия особенности решения (5.1) при $r=0$, которое в данном случае равносильно условию $|f_r| \ll |x_r^{(0)}|$ в окрестности оси тела, нетрудно получить соотношение, позволяющее определить $f_*(t)$

$$\frac{f_0(((1+n)x_n)^{1-n}t^\alpha) - f_0(0)}{t^{kn\alpha}} = \int_0^t \frac{f_*(\tau) d\tau}{(t^\alpha - \tau^\alpha)^n} \quad (5.3)$$

Соотношения (5.3) и (5.2) в совокупности определяют единственное решение уравнения (2.1) для клина.

Таким образом, в случае клина (конуса) задача Коши для уравнения (2.1) сохраняет особенности, полученные на примере стационарных уравнений обгара [1]. Это позволяет предположить, что и в общем плоском случае рассматриваемая задача Коши допускает не единственное решение. Выбор единственного решения требует использования дополнительных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В., Поляков И. Н. Об устойчивости стационарного решения уравнения обгара // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 96–103.
2. Лунев В. В. Некоторые свойства и решения уравнения абляции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 3. С. 95–102.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 544 с.
4. Лунев В. В., Знаменский В. В., Сенкевич Е. А. Некоторые автомодельные решения уравнения уноса // Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во МГУ, 1979. Вып. 3. С. 53–63.

Москва

Поступила в редакцию
25.III.1986

УДК 533.694.72

ВЛИЯНИЕ РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ В НЕДОРАСШИРЕННОЙ СТРУЕ, ИСТЕКАЮЩЕЙ В ДОЗВУКОВОЙ ВСТРЕЧНЫЙ ПОТОК, НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА ТЕЛЕ

КАРПМАН И. М.

Экспериментально исследовано распределение давления на конусе с полууглом при вершине $\theta=75^\circ$, из которого вытекает одиночная центральная недорасширенная струя навстречу дозвуковому потоку. Показано влияние режима течения в струе на распределение давления. Получены обобщенные зависимости для давления на теле при различных отношениях импульсов в струе и потоке J и числа Маха потока $M_\infty=0,35-0,9$; число Маха M_a на срезе конического сопла с углом полураствора $\theta_a=10^\circ$ равнялось 2,9. Рабочее тело струи и потока — воздух с температурами торможения, соответственно $T_{0a}=T_{0\infty} \approx 260-265$ К. Отношение радиуса выхода сопла к радиусу миделя конуса $r_a/R_M=0,1$.

1. В отличие от случая истечения недорасширенной струи во встречный сверхзвуковой поток истечение в дозвуковой в литературе практически не исследовано, за исключением [1, 2]. В [1] приведены данные по распределению давления на конусе с полууглом при вершине $\theta=60^\circ$ и числах $M_a=4,3$; $M_\infty=0,6$.

В [2] даны результаты по распределению давления на такой же, как в настоящей работе, модели при турбулентном режиме течения в слое смешения начального участка струи и числах $M_\infty=0,6-0,9$.

Эксперименты данной работы проведены при ламинарном и переходном режимах течения и вместе с экспериментами [2] охватывают широкий диапазон чисел Re , которые определялись по характерным параметрам в слое смешения и расстоянию L до центрального скачка: $Re=\rho_\infty u_\infty L/\mu_\infty$ [3]. Здесь ρ_∞ и μ_∞ — плотность и