

## ДВУМЕРНАЯ АБСОЛЮТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

ПЕТРОВ Г. В.

Результаты проведенных автором ранее исследований по устойчивости частично вязкого ударного слоя позволяют предположить, что абсолютно неустойчивым может оказаться любое плоскопараллельное течение, если для него существует более одной нормальной моды неустойчивости. В данной работе это предположение подтверждается для сверхзвукового пограничного слоя при бесконечно больших числах Рейнольдса. Причем обнаруживаются два типа абсолютной неустойчивости, соответствующие двум известным типам ветвления дисперсионного соотношения.

Основным количественным результатом линейной невязкой параллельной теории, которая решает вопрос об устойчивости пограничного слоя при бесконечно больших числах Рейнольдса, является дисперсионное соотношение для возмущений вида элементарных волн, представляемое обычно комплекснозначной функцией частоты от волнового числа  $\omega(\alpha)$ . На фиг. 1 приведена зависимость от  $\alpha$  мнимой части этой функции  $\text{Im } \omega$  (т. е. временного инкремента) для двух значений отношения температуры стенки к температуре набегающего потока:  $T_w=0,79857$  (сплошные кривые)

№ п.п.	$T_w$	$\gamma$	$\text{Re} \alpha_a$	$\text{Im} \alpha_a \cdot 10^3$	$\text{Re} \omega_a$	$\text{Im} \omega_a \cdot 10^3$	$a$
1	0,46899	1,4	0,192997	0,133	0,186270	0,315	s
2	0,46899	1,4	0,193389	0	0,185964	0,423	b
3	0,79857	1,4	0,186210	0	0,179718	0,236	s
4	2,23126	1,4	0,164918	-0,413	0,159174	0	s
5	1,90950	1,4	0,276121	0,108	0,266807	0,351	s
6	1,90950	1,4	0,276410	0	0,266585	0,436	b
7	2,05897	1,4	0,273290	0	0,264064	0,288	s
8	2,83154	1,4	0,260302	-0,496	0,251684	0	s
9	1,0	1,210459	0,130239	-0,060	0,116139	1,292	s
10	1,0	1,210459	0,129769	0	0,116472	1,225	b
11	1,0	1,238288	0,125764	-1,643	0,112226	0	s
12	1,0	1,153807	0,295512	-0,099	0,266275	0,050	s
13	1,0	1,153807	0,295670	0	0,266195	0,016	b
14	1,0	1,155045	0,294941	-0,144	0,265761	0	s

и 0,46899 (штрихпунктирные кривые). Расчеты проведены для пластины, обтекаемой потоком совершенного газа с вязкостью, пропорциональной температуре, и постоянным значением числа Прандтля  $\text{Pr}=1$ . Число Маха набегающего потока  $M_\infty=10$ , показатель адиабаты  $\gamma=1,4$ . Все параметры обезразмерены с помощью соответствующих значений в набегающем потоке (индекс  $\infty$ ) и линейной масштаба, пропорционального толщине пограничного слоя  $\sqrt{\nu_\infty x/u_\infty}$ , где  $u$  — скорость,  $\nu$  — кинетический коэффициент вязкости,  $x$  — расстояние от передней кромки пластины. Кривые 3 и 4 в интервале положительного инкремента относятся ко второй и третьей дозвуковой моде соответственно по классификации, принятой в [1].

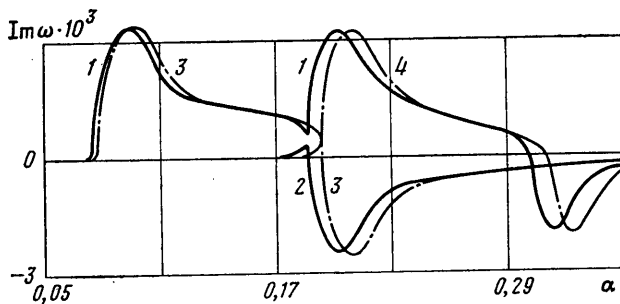
Два значения  $T_w$ , для которых представлены результаты на фиг. 1, выбраны случайно: при  $T_w=0,79857$  на вещественной оси  $\alpha$  имеется седловая точка (точка перевала), а при  $T_w=0,46899$  — точка ветвления дисперсионного соотношения (см. строки 3 и 2 таблицы, в которой приведен ряд вычисленных седловых (s) точек и точек ветвления (b)).

Седловая точка  $\alpha_s$ , определяемая как ноль функции  $\omega'(\alpha)$  (штрих-дифференцирование), совпадает в данном случае с точкой максимума инкремента для той ветви  $\omega(\alpha)$ , которой соответствует кривая 2 на фиг. 1. Использование метода перевала для оценки интеграла

$$\psi(x, y, t) = \int_{\alpha_0}^{\infty} f(\alpha, y) e^{i[\alpha x - \omega(\alpha)t]} d\alpha \quad (1)$$

представляющего собой суперпозицию элементарных волн, дает асимптотическую формулу для  $t \rightarrow \infty$  (см., например, [2])

$$\psi(x, y, t) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{i\omega''(\alpha_s)t}} f(\alpha_s, y) e^{i(\alpha_s x - \omega_s t)}, \quad \omega_s = \omega(\alpha_s) \quad (2)$$



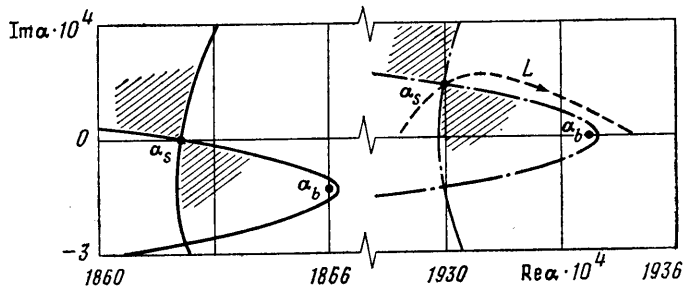
Фиг. 1

Функция  $\psi(x, y, t)$  представляет собой локализованное по  $x$  собственное линейное возмущение, которое, однако, при любом значении  $x$  в соответствии с (2) и в силу положительности инкремента в седловой точке

$$\text{Im } \omega_s > 0 \quad (3)$$

начинает с какого-то момента неограниченно расти со временем, т. е. неустойчивость является абсолютной.

Точка ветвления  $\alpha_b$ , как показывают расчеты, имеет второй порядок и определяется значением обратной функции  $\alpha(\omega)$  в ее седловой точке  $\alpha'(\omega) = 0$ . При  $T_w = 0,46899$   $\alpha_b$  соответствует точке пересечения кривых 3 и 4 на фиг. 1, но в общем случае, так же как и  $\alpha_s$ , имеет комплексное значение. На фиг. 2 точки  $\alpha_s$  и  $\alpha_b$



Фиг. 2

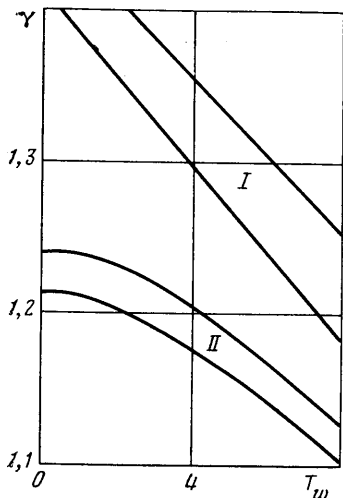
изображены в комплексной плоскости  $\alpha$  вместе с линиями  $\text{Im } \omega = \text{Im } \omega_s$ . Штриховкой обозначены области  $\text{Im } \omega > \text{Im } \omega_s$  (горы) в окрестности перевала. Сплошные кривые, как и выше, соответствуют  $T_w = 0,79857$ , штрихпунктирные —  $T_w = 0,46899$ . Во втором случае седловая точка не лежит на вещественной оси  $\alpha$ . Однако видно, что участок вещественной оси при интегрировании (1) может быть заменен обходным путем  $L$  из долины в долину через перевал при условии, что  $\alpha_b$  находится в нижней полуплоскости  $\alpha$

$$\text{Im } \alpha_b < 0 \quad (4)$$

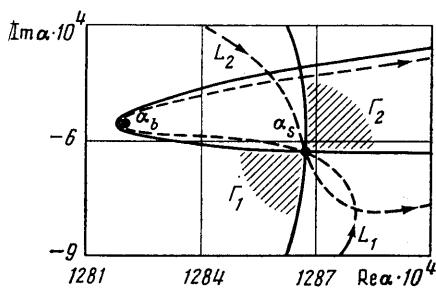
Иначе эти пути неэквивалентны, так как между ними находится точка ветвления и метод перевала с асимптотической формулой (2) использовать нельзя. Неравенство (4) выполняется при  $T_w > 0,46899$ .

Со стороны высоких значений  $T_w$  интервал абсолютной неустойчивости ограничен условием (3), которое выполняется при  $T_w < 2,23126$  (см. строку 4 таблицы). Расчеты граничных значений  $T_w$ , проведенные для других  $\gamma$ , выявляют область абсолютной неустойчивости в плоскости  $T_w, \gamma$  — область 1 на фиг. 3. Неравенствами (3) и (4) определяются теперь верхняя и нижняя границы этой области соответственно.

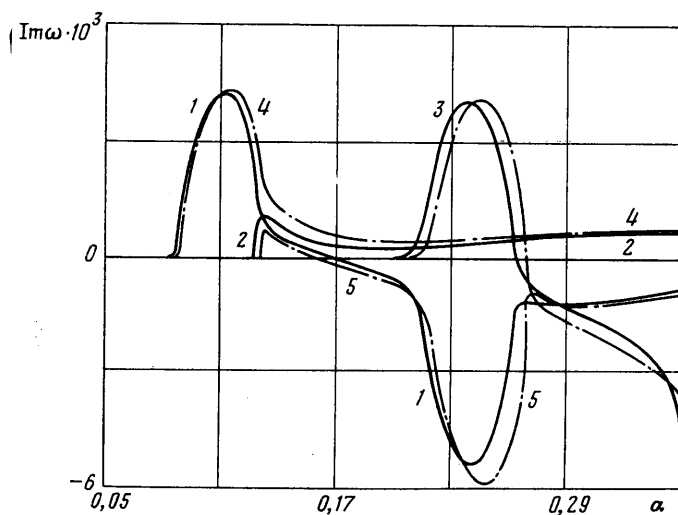
На фиг. 2 видно, что расстояния между седловыми точками и точками ветвления в плоскости  $\alpha$  очень малы по сравнению с  $\text{Re } \alpha$ . Такое же попарное расположение седловых точек и точек ветвления отмечалось в работе [3] для тонкого частично вязкого ударного слоя, а то обстоятельство, что ветвление в данном случае имеет другую природу и характер, только усиливает впечатление об универсальности этого свойства дисперсионного соотношения. Поэтому естественна попытка найти седловую точку в окрестности разветвления третьей и четвертой мод. Результат, представленный строками 5–8 таблицы, определяет интервал абсолютной неустойчивости  $1,90950 < T_w < 2,83154$  при  $\gamma = 1,4$ , т. е. включение в рассмотрение еще одной моды



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

расширяет определенную ранее область абсолютной неустойчивости в сторону более высоких значений температуры стенки.

Помимо бесконечного ряда высших дозвуковых мод спектр собственных возмущений сверхзвукового пограничного слоя содержит сверхзвуковые моды. Они не представлены на фиг. 1, но благодаря их существованию при каких-либо других параметрах течения, когда точки разветвления этих мод с соответствующими дозвуковыми модами находятся достаточно близко к вещественной оси  $\alpha$ , может также возникнуть абсолютная неустойчивость.

Вторая сверхзвуковая мода представлена кривой 2 на фиг. 4, а кривыми 1 и 3 — вторая и третья дозвуковые моды. Расчеты проведены для  $T_w=1$  и двух значений показателя адиабаты  $\gamma=1,22$  (сплошные кривые) и (штрихпунктирные). Из того обстоятельства, что кривые 1 и 2 пересекаются, а кривые 4 и 5 — нет, следует, что при некотором промежуточном значении  $\gamma$  на вещественной оси  $\alpha$  имеется точка ветвления второй дозвуковой и сверхзвуковой мод (см. строку 10 таблицы). Вблизи найденной точки ветвления в комплексной плоскости  $\alpha$  располагается, как и ожидалось, седловая точка (строка 9 таблицы).

Горы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  на фиг. 5, где представлена окрестность  $\alpha_s$  и  $\alpha_b$  при  $\gamma=1,22$ , можно соотнести с максимумами  $\text{Im } \omega$ , отображенными на фиг. 4 кривыми 1 и 2 соответственно. Интеграл (1) для возмущений дозвуковой моды можно брать по пути  $L_1$ , обходящим гору  $\Gamma_1$  снизу через перевал и слева от точки ветвления. Эквивалентный путь интегрирования  $L_2$  для возмущений сверхзвуковой моды находится аналогичным образом, но только гору  $\Gamma_2$  следует обходить правее точки ветвления.

Можно видеть, что при  $\alpha_b > 0$  пути через перевал закрыты, зато открывается путь, обходящий две горы снизу, следовательно, формула (2) остановится недействительной. Таким образом, остаются справедливыми оба условия абсолютной неустойчивости (3) и (4), которые определяют интервал ее существования при  $T_w = 1$   $1,21046 < \gamma < 1,23829$  (см. строки 9–11 таблицы). Результаты, приведенные в строках 12–14 таблицы, определяют соответствующий интервал для возмущений третьей моды  $1,15381 < \gamma < 1,15505$ .

Область II на фиг. 3 представляет параметры абсолютной неустойчивости, которая обусловлена существованием второй сверхзвуковой моды собственных возмущений. Так же как и область I, появляющаяся в результате ветвления второй и третьей дозвуковых мод, она ограничена со стороны высоких значений  $T_w$  (или  $\gamma$ ) условием (3), а низких – условием (4).

Итак, при сверхзвуковом обтекании имеет место абсолютная неустойчивость пограничного слоя. Она обусловлена существованием ряда неустойчивостей высших мод (до- и сверхзвуковых) и локализована в окрестности таких значений параметров пограничного слоя, при которых какая-либо из точек ветвления дисперсионного соотношения  $\omega(\alpha)$  находится на вещественной оси  $\alpha$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mack L. M. Boundary Layer stability theory. Jet Propulsion Laboratory Document № 900–277 (rev A). Pasadena: JPL, 1969.
2. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982. 488 с.
3. Petrov G. V. Stability of thin viscous shock layer on a wedge in hypersonic flow of a perfect gas // Laminar-Turbulent Transition: IUTAM Symposium, Novosibirsk, 1984. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1985. P. 487–493.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
2.II.1987

УДК 533.6.01+536.24

### О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ ОБГАРНЫХ ФОРМ КЛИНА (КОНУСА)

ПОЛЯКОВ И. Н.

Задача Коши для малых возмущений поверхности стационарных обгарных форм поставлена и изучена в [1]. В настоящей работе показано, что сделанный там вывод о принципиальном различии свойств задачи в плоском ( $\nu=0$ ) и осесимметричном ( $\nu=1$ ) случаях сохраняет силу и применительно к обгарным формам клина и конуса – для конуса решение рассматриваемой задачи единственно, а для клина выбор решения требует привлечения дополнительного условия.

1. В рамках обычных для подобной теории предположений (гипотеза локальности для распределения давления; метод эффективной длины для расчета тепловых потоков; предположение о постоянстве эффективной энтальпии материала) уравнение изменения формы тела  $x=x(r, t)$  за счет аэродинамического разрушения материала имеет вид [2]

$$x_t = D\sqrt{1+x_r^2} = \frac{\Phi(x_r)}{\xi^n} = \Omega(x_r, \xi) \quad (1.1)$$

$$\xi = r - \nu/(1-n) \int_0^r \Phi(x_r) r^{\nu/(1-n)} dr, \quad \omega = (\gamma-1)/\gamma$$

$$\Phi(x_r) = \rho u_e \sqrt{1+x_r^2}, \quad u_e = \sqrt{1-p^\omega}$$

Здесь  $\{x, r\}$  – цилиндрическая система координат, начало которой совпадает с критической точкой тела;  $D$  – скорость уноса материала вдоль внутренней нормали