

УДК 533.601+536.24

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ОБГАРА С МАЛОЙ АСИММЕТРИЕЙ

ЛУНЕВ В. В., СЕНКЕВИЧ Е. А.

Изменению формы тел (обгару) в высокотемпературном потоке газа посвящено много работ, в которых рассмотрены двумерные и в меньшей степени трехмерные задачи (см. библиографию [1]). В [1] сформулирована упрощенная интегролокальная постановка задачи о пространственном обгаре тел под воздействием конвективного или лучистого теплообмена. Ниже в той же постановке предложено полуаналитическое решение подобных задач, близких к осесимметричным. С помощью линеаризации (используемой лишь для обоснования метода, но не в вычислительном алгоритме) общая задача сводится к совокупности изолированных двумерных для каждой гармоники ряда Фурье по окружной переменной. Примеры расчетов свидетельствуют о вполне конечной области применимости метода по степени несимметрии задачи.

Указано на возможность использования этого метода для создания эффективного метода расчета комплексной задачи обгара и динамики движущегося в атмосфере тела. Для высокочастотных колебаний получено в рамках соответствующих асимптотических теорий простое решение этой (весьма громоздкой в общем случае) задачи.

1. В декартовой системе координат, жестко связанной с массой обгораемого тела, изменение формы его поверхности $x' = x'(t, y', z')$, или движение фронта обгара, подчиняется уравнению

$$x'_t = D/n_x \quad (1.1)$$

где D — скорость уноса материала вдоль внутренней нормали \mathbf{n} (n_x, n_y, n_z) к поверхности тела. Эта система координат удобна для наблюдения за эволюцией формы тела, но аналитические исследования и численные расчеты удобно проводить в подвижной системе координат (x, y, z) с началом в точке торможения тупого тела (начало развития пограничного слоя) с координатами $x' = x_0(t), y' = y_0(t), z' = z_0(t)$ и с осью x , параллельной вектору скорости набегающего потока V_∞ .

Положение этой системы координат в пространстве определим углом α между осью x и плоскостью (x', z') и углом β между плоскостью xu и осью x' . Плоскость xu выберем параллельной оси y' . Тогда в линейном приближении

$$x = (x' - x_0) + \alpha y' + \beta z', \quad y = (y' - y_0) - \alpha(x' - x_0), \quad z = (z_0' - z_0) - \beta(x' - x_0) \quad (1.2)$$

Задав форму тела в подвижной системе координат $x = x(t, y, z)$, продифференцировав по t при постоянных y', z' первое соотношение (1.2), учитывая, что

$$(x_t)_{y', z'} = x_t + x_y \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{y', z'} + x_z \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{y', z'}$$

и определяя y_t, z_t в этой формуле из последних соотношений (1.2), получим с учетом (1.1) уравнение обгара в подвижной системе координат

$$x_t = \Phi = D/n_x + v \quad (1.3)$$

$$v = \dot{\alpha}((x-x_0)x_y + y) + \dot{\beta}((x-x_0)x_z + z) - \dot{x}_0 + (x_y(\dot{y}_0 - \alpha\dot{x}_0) + x_z(\dot{z}_0 - \beta\dot{x}_0)) \quad (1.4)$$

Здесь были использованы аналогичные (1.2) соотношения между компонентами нормали (n_x', n_y', n_z') и (n_x, n_y, n_z)

$$n_x(1 - \alpha x_y - \beta x_z) = n_x = (1 + x_y^2 + x_z^2)^{1/2}$$

Впредь будем рассматривать только тупые тела, для которых, исходя из общих представлений о картине их гиперзвукового обтекания и предполагая локальный закон распределения давления $p = p(\mathbf{n}, \mathbf{V}_\infty)$, получим, что вектор \mathbf{V}_∞ ортогонален поверхности тела в точке торможения. Это эквивалентно условиям

$$x_y = x_z = 0, \quad x = y = z = 0 \quad (1.5)$$

Поскольку они сохраняются во времени в этой системе координат, то в начале координат $x_{iy} = x_{iz} = 0$. Отсюда и из (1.3), (1.4) получим уравнения для скорости дрейфа критической точки

$$\dot{x}_0 = D(0)$$

$$D_y(0) = -\dot{\alpha} + x_{yy}(\dot{y}_0 - (\alpha x_0)_t) + x_{zy}(\dot{z}_0 - (\beta x_0)_t) \quad (1.6)$$

$$D_z(0) = -\dot{\beta} + x_{zz}(\dot{z}_0 - \beta\dot{x}_0 - \dot{\beta}x_0) + x_{zy}(\dot{y}_0 - \alpha\dot{x}_0 - \dot{\alpha}x_0)$$

Производные $D_y(0)$, $D_z(0) \neq 0$ при отличных от нуля кубических членах разложения формы тела в ряд по y , z и будут получены ниже.

Заменой $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$ перейдем к цилиндрической системе координат, задав форму тела в виде $x = \Psi(t, r, \varphi)$. В этом случае в (1.3) следует положить

$$n_x = (1 + \Psi_r^2 + (\Psi_\varphi/r)^2)^{-1/2}$$

$$v = [\dot{\alpha}((\Psi - x_0)\Psi_r + r) + \Psi_r(\dot{y}_0 - \alpha\dot{x}_0)] \cos \varphi + [\dot{\beta}((\Psi - x_0)\Psi_r + r) + \Psi_r(\dot{z}_0 - \beta\dot{x}_0)] \sin \varphi - \dot{x}_0$$

2. В рамках интегролокальной постановки данной задачи [1] скорость уноса определяется формулой $D = (q - q_r) / \rho_M H_{ef}$, где q — падающий, а q_r — излученный тепловые потоки, ρ_M — плотность, H_{ef} — эффективная энтальпия материала, которую будем считать явной функцией условий обтекания (времени) и местных условий (давления, координат, законов теплообмена и т. д.), а конвективные тепловые потоки определяются по осесимметричной аналогии метода локального подобия

$$q_k = A_k p U h^{n/(1-n)} \xi^{-n}, \quad \xi = \int_0^l p U h^{1/(1-n)} dl \quad (2.1)$$

Здесь и ниже $U(p)$ и $\rho(p)$ — местные скорость и плотность газа, величина $A_k(t)$ зависит от условий обтекания и размеров тела, все остальные величины в (2.1) для удобства предполагаются безразмерными. Для ламинарного теплообмена $n = 1/2$, индекс $k = L$ для турбулентного $n = 1/3$, $k = T$. Для смешанного режима теплообмена, как обычно, полагается $q = \Gamma q_L + (1 - \Gamma) q_T$, где коэффициент перемежаемости $\Gamma = 0 - 1$. Уравнение обгара (1.3) с учетом (2.1) носит интегродифференциальный характер. Более простой дифференциальный вид оно имеет только в чисто локальной постановке $q = q(n_x)$.

В рамках правила меридиональных сечений для пограничного слоя с малой асимметрией интеграл ξ вычисляется вдоль меридиональных се-

чений, а для радиуса осесимметричного тела h справедлива формула

$$h = r \exp(-J), \quad dl = (1 + \Psi_{,r}^2)^{1/2} dr, \quad l_0 \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

$$J = \int_{l_0}^l \frac{1}{Ur^2} \int_0^l \left[\frac{1}{\rho U} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{U \Psi_{,r}}{1 + \Psi_{,r}^2} \right) \right] dl^2$$

Малая величина l_0 введена по причине расходимости интеграла $J \sim \ln r$ при $r, l \rightarrow 0$.

Форма тупых тел в окрестности точки торможения представима рядом

$$\begin{aligned} x = & A_{21}y^2 + A_{22}yz + A_{23}z^2 + A_{31}y^3 + A_{32}y^2z + A_{33}yz^2 + A_{34}z^3 + \dots = \\ = & 1/2 r^2 (K_0 + 1/2 (K_1 - K_2) \cos^2(\varphi - \varphi_0)) + r^3 (a_{11} \cos \varphi + \\ & + a_{12} \sin \varphi + a_{31} \cos 3\varphi + a_{32} \sin 3\varphi) + \dots, \quad K_0 = (K_1 + K_2)/2, \quad \varphi_0 = \text{const} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь φ_0 — угол поворота координатных плоскостей относительно направлений главных кривизн, $K_{1,2}$ — их величины, a_{ij} , A_{ij} — постоянные. Коэффициенты при m -й гармонике убывают не медленнее, чем r^m . Аналогичное разложение будут иметь и величины

$$p(n_x) = p(1) - (p_{11} \cos \varphi + p_{12} \sin \varphi) r^2 + p_{31} \cos 3\varphi + p \quad (2.4)$$

Очевидно также, что $\xi \sim r^4$. С учетом этого получим для h асимптотику с особенностью при $r \rightarrow 0$

$$h \rightarrow r^{1+\chi} [1 + r(b_{11} \cos \varphi + b_{12} \sin \varphi)], \quad \chi = 1/2 (\beta_2 - \beta_1) \cos 2(\varphi - \varphi_0) \quad (2.5)$$

При чисто ньютоновском законе давления $p = n_x^2$ имеем $\beta_i = K_i/2K_0$. Эта особенность, однако, устраняется в формуле (2.1) для теплового потока

$$q = q_0(0) [1 + 1/5 r(b_{11} \cos \varphi + b_{12} \sin \varphi)] \quad (2.6)$$

Здесь $q_0(0)$ постоянная. Это выражение можно получить непосредственной подстановкой формул (2.3), (2.4) в (2.1). Гармоники выше первой в члены порядка r не входят.

Из (1.6) и (2.5) получим формулы для скорости \dot{y}_0 дрейфа критической точки (для z_0 формула симметрична)

$$\dot{y}_0 = \frac{1}{K_0} (D_y(0) + \dot{\alpha}) + \alpha \dot{x}_0 = \frac{1}{K_0} \left(\frac{4}{3} b_{11} D(0) + \dot{\alpha} \right) + \alpha D(0) \quad (2.7)$$

Таким образом, дрейф критической точки обусловлен лишь первой гармоникой в разложении формы тела в ряд Фурье.

3. Отличие задачи от осесимметричной обусловлено асимметрией начальной формы тела с малым параметром ε и несимметричным обтеканием с малыми углами α и β . Поэтому можно выписать разложения

$$\chi = \Psi(t, r, \varphi) = \Psi_0(t, r) + \psi(t, r, \varphi) \quad \psi \sim \varepsilon = \max(\alpha, \beta, \varepsilon_0) \quad (3.1)$$

$$n_x = n_{x_0} + n_{x_1} + \dots = (1 + \Psi_{0,r}^2)^{-1/2} - (1 + \Psi_{0,r}^2)^{-1/2} \Psi_{0,r} \psi_r$$

$$p = p(n_{x_0}) + p_1 = p(n_{x_0}) + \left. \frac{dp}{dn_x} \right|_{n_{x_0}} n_{x_1} + \dots \quad (3.2)$$

При линеаризации уравнения обгара некоторые трудности возникают из-за особенности h при $r \rightarrow 0$. Но из (2.5) следует, что разложение $q = q_0 + q_1 + \dots$, $q_1 \sim \varepsilon$ законно при $r \rightarrow 0$, причем $q_1 \sim r \rightarrow 0$, если кривизну опорного осесимметричного тела в точке торможения взять равной полусумме K_0 главных кривизн, что и будем подразумевать в дальнейшем.

Для пояснения структуры полученных ниже уравнений выпишем вариацию функционала q по функции h , единственной в линейном приближении содержащей производные по φ

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta q}{q}\right)_h &= \frac{n}{1-n} \left(\frac{\delta h}{h} - \frac{1}{\xi} \int_0^l p U h^{1/(1-n)} \frac{\delta h}{h} dl \right) = -\frac{n}{1-n} \frac{1}{\xi_0} \int_0^l \xi_0 \frac{\partial J}{\partial l} dl = \\ &= -\frac{n}{1-n} \frac{1}{\xi_0} \int_0^l \left(\frac{1}{\rho U} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\Psi_{or} U}{1 + \Psi_{or}^2} \right) \right) \frac{\xi_0}{U r^2} dl \\ \xi_0 &= \int_0^l p U r^{1/(1-n)} dl, \quad dl = \sqrt{1 + \Psi_{or}^2} dr \end{aligned} \quad (3.3)$$

Так как $p_1, \psi \sim \varepsilon$, то все коэффициенты при них вычисляются в осесимметричном приближении и зависят лишь от r . На регулярном решении $p_1, \psi \sim r^2$ получим ограниченную при $r \rightarrow 0$ правую часть (3.3).

Подставляя (3.1)–(3.3) в уравнение (1.3) и приводя подобные по ε члены, получим последовательность уравнений

$$\Psi_{0t} = \Phi_0(t, r, \Phi_{0r}, \xi_0(\Psi_{0r})) \quad (3.4)$$

$$\psi_t + \kappa \psi_r = L(\psi_{r\varphi\varphi}, \psi_{\varphi\varphi}, \psi_r) - v \quad (3.5)$$

$$\kappa = -\frac{\partial}{\partial \Psi_r} \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial n_x} \frac{\partial n_x}{\partial \Psi_r}$$

$$v = (\dot{\alpha} G + \Psi_{0r}(\dot{y}_0 - \alpha \dot{x}_0) \cos \varphi + (\dot{\beta} G + \Psi_{0r}(\dot{z}_0 - \beta \dot{x}_0) \sin \varphi + \dot{x}_0$$

$$G = (\Psi_0 - x_0) \Psi_{0r} + r, \dot{y}_0 = \frac{1}{K_0} \left(\frac{4}{3} b_{11} D(0) + \dot{\alpha} \right) + \alpha D(0), b_{11} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi_{11}}{\partial r^3} \Big|_{r=0}$$

Здесь L — интегродифференциальный оператор, линейный относительно указанных в скобках производных, конкретный вид его здесь не требуется.

Линейное уравнение (3.5) не содержит нечетных производных по φ и его коэффициенты не зависят от φ . Поэтому решение представимо в виде

$$\psi = \psi_0(t, r) + \sum_{m=1}^{\infty} (\psi_{1m}(t, r) \cos m\varphi + \psi_{2m} \sin m\varphi) \quad (3.6)$$

Каждый член этой суммы является частным решением уравнения (3.5), и функции $\psi_{jm}(t, r)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \psi_{jmt} + \kappa \psi_{jmr} &= L(-m^2 \psi_{jmr}, -m^2 \psi_{jm}, \psi_{jm}) + v_{jm} \\ v_{j1} &= \dot{\gamma}_j G + \Psi_{0r} \frac{1}{K_0} \left(\frac{4}{3} b_{j1} D(0) + \dot{\gamma}_j \right) \quad (\gamma_1 = \alpha, \gamma_2 = \beta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$v_{jm} = 0, \quad m \neq 1; \quad b_{j1} = 1/6 \psi_{j1rrr} \quad (r=0), \quad j=1; 2$$

Чтобы воспользоваться таким решением, нужно разложить начальный контур тела в ряд (3.6), т. е. определить начальные функции ψ_{jm} .

Уравнения (3.7) однородны при $m \neq 1$, поэтому если начальный контур не содержит какой-либо гармоники, кроме первой, то она и не появится в процессе обгара.

Первая же гармоника генерируется в процессе обгара несимметрией обтекания с углами α и β и смещением критической точки y_0, z_0 , которые входят в уравнение через переносную скорость v в уравнениях (3.6), (3.7).

Функция $\psi_0(t, r)$ по существу произвольная, и впредь положим $\psi_0 = 0$. При таком выборе опорное осесимметричное тело $x = \Psi_0(t, r)$ с погрешностью порядка ε^2 будет иметь ту же площадь поперечного сечения, что и несимметричное, в чем легко убедиться, представляя форму тела (3.4) в виде

$$r = r_0(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} r_{1m} \cos m\varphi + r_{2m} \sin m\varphi \quad (3.8)$$

Площадь сечения такого тела равна $\pi r_0^2 + O(\varepsilon^2)$.

4. Уравнения (3.7) достаточно громоздки и, кроме того, имеют особенность при $r \rightarrow 0$. Поэтому предпочтительнее, пользуясь взаимной независимостью уравнений (3.5), положить $\psi_{jm} = \Psi_{jm} - \Psi_0$ и вычислять по отдельности функции Ψ_{jm} из решения упрощенного варианта нелинейного уравнения обгара (1.3) в различных изолированных сечениях, используя уже известные программы (например, [3]). Для этого достаточно в исходном уравнении (1.3) опустить квадратичные по ε члены с производными по φ, r , не подвергая его линейаризации в меридиональных плоскостях, положив в нем $x = \Psi_{jm}$ и функцию u по (1.5). Некоторых изменений потребует лишь вычисление входящего в D интеграла h , который существенно зависит от вторых производных ψ по φ . Подставляя формулы

$$\begin{aligned} \psi_m &= \psi_{1m} \cos m\varphi + \psi_{2m} \sin m\varphi \\ \psi_{m\varphi\varphi} &= -m^2 \psi_{1m} \cos m\varphi - \psi_{2m} m^2 \sin m\varphi \\ \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial p}{\partial n_x} \frac{\partial n_x}{\partial \Psi_r} \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial \varphi^2} = -m^2 p_{n_x n_x \Psi_r} \psi_{mr} \end{aligned}$$

в выражение (2.2) для h , получим

$$h \left(\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial \varphi^2}, \Psi_{\varphi\varphi}, \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} \right) = h(-m^2 \varphi_{mr}, -m^2 \psi_m, -m^2 p_{n_x n_x \Psi_r} \psi_{mr}) = h_m \quad (4.1)$$

Таким образом, вычисление m -й гармоники можно проводить, заменив в уравнении (4.1) h на h_m , после чего остается лишь параметрическая зависимость уравнения (4.1) от φ и его можно решать для изолированных меридиональных плоскостей.

Если Ψ_{jm}^{\pm} — соответственно ветви такого решения в полуплоскостях $\varphi_{1m}^{\pm} = 0$, $\varphi_{1m}^{-} = \pi/m$, $\varphi_{2m}^{+} = \pi/2m$, $\varphi_{2m}^{-} = 3\pi/2m$, то искомые функции можно определить следующим образом:

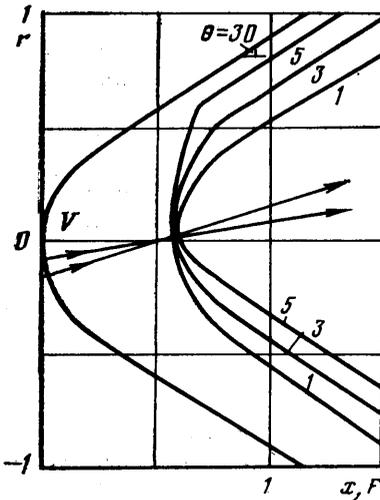
$$\begin{aligned} \Psi_0(t, r) &= \frac{1}{2} (\Psi_{1m}^{+} + \Psi_{1m}^{-}) \approx \frac{1}{4} \sum_{j=1,2} (\Psi_{jm}^{+} + \Psi_{jm}^{-}) \\ \psi_{jm} &= \frac{1}{2} (\Psi_{jm}^{+} - \Psi_{jm}^{-}) \quad \text{или} \quad \psi_{jm} = \Psi_{jm}^{+} - \Psi_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для нечетных m можно взять $\varphi_{1m}^{-} = \pi$, $\varphi_{2m}^{-} = \pi + \pi/2m$, т. е. проводить расчеты в двух полных меридиональных плоскостях.

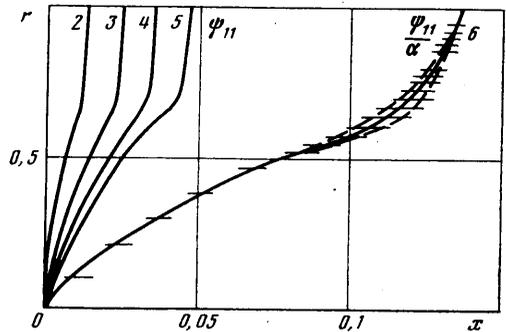
Обратный пересчет решения из подвижной системы координат (x, y, z) в жесткую (x', y', z') , например из плоскости $z=0$ в плоскость $z'=0$, осуществляется по формулам, обратным (1.2).

Так как $F_z z_0 \sim \varepsilon^2$, то контур тела в плоскости $z'=0$ получается параллельным сдвигом из плоскости $z=0$. Однако в процессе обгара могут образовываться тела достаточно заостренной формы, с малым радиусом кривизны $R_0 \ll z_0, y_0$ в точке торможения. Это будет препятствовать сдвигу профилей, но не линейаризации задачи в подвижной системе координат, в которой следует вычислять аэродинамические характеристики.

5. Для решения рассмотренной задачи в ряде случаев можно применить более простую модель — местного осесимметричного тела, в рамках которой в (2.1) следует положить $h=r$, что является существенным упро-



Фиг. 1



Фиг. 2

нением. Это допущение обычно не приводит к большим погрешностям в величинах тепловых потоков (особенно турбулентных) на лобовой части тупого тела, кроме непосредственной окрестности существенно пространственной точки торможения, где такой подход дает при $r \rightarrow 0$ различные значения $q = q_0(\varphi)$ в разных плоскостях $\varphi = \text{const}$.

Но эта особенность проявляется за счет членов y^2, z^2 в разложении (2.3), т. е. присуща лишь 2-й гармонике разложения формы тела в ряд Фурье. Остальные гармоники не нарушают осевой симметрии тела и однозначности q при $r \rightarrow 0$, и применение к их расчету упрощенного метода не приводит к недоразумениям.

На фиг. 1 показаны результаты расчета в данном приближении обгара первоначально притупленного конуса с углом полураствора $\theta = 30^\circ$ при углах атаки $\alpha = 0, 5, 10, 15, 20^\circ$ (кривые 1–5) при ламинарном режиме теплообмена; на фиг. 1 показаны контуры тела после обгара, на фиг. 2 — возмущенная часть решения $\psi_{11} \approx \frac{1}{2}(\Psi_{11}^+ - \Psi_{11}^-)$ и отношение ψ_{11}/α — кривая 6. Последние кривые практически универсальны при $\alpha/\theta < 1/2$, что свидетельствует о применимости метода за пределами его теоретического обоснования.

Часто расчетом лишь 1-й гармоники можно и ограничиться, так как в линейной постановке аэродинамические характеристики зависят лишь от главного и 1-го членов разложения формы тела (и распределения давления) в ряд Фурье

$$\begin{aligned}
 C_x &= 2\pi \int_0^R p_0 r \, dr + O(\varepsilon^2) \\
 C_{y_0} &= \pi \int_0^R \left[\Psi_{0r} p_{11} + p_0 \left(\psi_{11r} - \frac{1}{r} \psi_{11} \right) \right] r \, dr \\
 M_{z_0} &= -\pi \int_0^R \left[p_0 \left[\Psi_0 \left(\psi_{11r} - \frac{1}{r} \psi_{11} \right) + \Psi_{0r} \psi_{11} \right] - p_{11} \Psi_{0r} (\Psi_0 \Psi_{0r} + r) \right] r \, dr
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Здесь $C_{x_0}, C_{y_0}, C_{z_0}$ — коэффициенты сопротивления, подъемной силы и момента относительно оси z (формулы для C_{z_0}, M_{y_0} аналогичны), p_{11} — коэффициенты ряда Фурье $p = p_0 + p_{11} \cos \varphi$ для давления. Все размеры отнесены к радиусу миделя опорного осесимметричного тела. Из этих формул

следует, что плоскость угла атаки первоначально геометрически и инерциально осесимметричного тела сохраняется в процессе обгара. Коэффициент сопротивления тела остается тем же, как и для опорного осесимметричного тела (выбранного, как упомянуто выше, из условия совпадения площадей, см. (3.8)).

Величины (5.1) получены в подвижной системе координат и характеризуют влияние асимметрии тела на аэродинамические характеристики. Для исходной (связанной) системы координат соответствующие величины имеют вид

$$C_y = C_{y0} + \alpha C_y^\alpha, \quad M_z = M_{z0} + \alpha M_z^\alpha + C_x y_0 - C_y x_0 \quad (5.2)$$

Аэродинамические производные C_y^α , M_z^α вычисляются для опорного осесимметричного тела, при этом $C_y^\alpha = C_z^\beta = C^\gamma$, $M_y^\beta = M_z^\alpha = M^\gamma$.

Зависимость лишь от первой гармоники не распространяется на продольный вращательный момент сил вокруг оси x (или x')

$$M_{x0} = \pi \int_0^R \left[(p_{11}\psi_{21} - p_{21}\psi_{11}) + \sum_{j=2}^{\infty} j (p_{1j}\psi_{2j} - p_{2j}\psi_{1j}) \right] r dr \quad (5.3)$$

$$M_x = M_{x0} + C_x(\alpha z_0 - \beta y_0) + C_y z_0 - C_z y_0 + \alpha M_{y0} + \beta M_{z0}$$

Очевидно, $M_x \sim \varepsilon^2$, что не снимает, однако, практического интереса к его вычислению. Легко видеть, что вращательный момент появляется в том случае, если оба коэффициента $\psi_{jm} \neq 0$ и зависят от x , что придает телу винтообразную форму.

6. Как было указано, 1-я гармоника разложения формы тела в ряд Фурье (функции ψ_{ji}) определяется начальной асимметрией тела и (в отличие от других ψ_{ji} , $i > 1$) последующей нестационарной динамикой его движения через углы $\alpha(t)$, $\beta(t)$ (их влияние на распределение давления учитывается в данной подвижной системе координат через функции $\Psi_0(t, r)$, $\psi_{ji}(t, r)$).

Случай медленного изменения этих углов с характерным временем того же порядка, что и минимальное характерное время T других процессов, не обладает какой-либо спецификой. Но при свободном движении тела могут возникнуть высокочастотные его колебания с периодом T_0 , много меньшим характерного времени T задачи, определяемого скоростью изменения внешних параметров обтекания, скоростью обгара и т. д.

Это обстоятельство затрудняет непосредственное численное решение задачи, но позволяет в асимптотическом плане существенно упростить ее разделением решения на медленную $\psi_{ji}^{(0)}$ и быструю $\psi_{ji}^{(m)}$ составляющие, характеризующие собственно обгар тела, осредненный за период колебания, и колебания жесткого тела, не представляющие интереса для основной задачи обгара.

Для доказательства представим схематично форму колебаний в виде

$$\gamma = \gamma_0(t) + \gamma_m(t)e^{i\Omega t}, \quad \Omega = \int_0^t \omega dt \quad (6.1)$$

$$\gamma = \alpha, \beta, \quad \omega = \omega_0 = 2\pi/T_0, \quad T_0 \ll T$$

где балансировочные углы γ_0 , амплитуды γ_m и частота ω колебаний суть медленные, а γ в целом, вместе с $e^{i\Omega t}$ быстрые функции времени, так что

$$f \approx j/T \quad (f = \gamma_0, \omega, \gamma_m, \dots), \quad \dot{\gamma} \sim \gamma_m \omega e^{i\Omega t} \sim \gamma/T_0 \quad (6.2)$$

Представим правую часть уравнения (3.7) для первой гармоники (решения для остальных гармоник носят медленный характер) и соответ-

ствующее решение в виде суммы медленной и быстрой слагаемых

$$v_{j1} = v_{j1}^{(0)} + v_{j1}^{(m)}, \quad \psi_{j1} = \psi_{j1}^{(0)} + \psi_{j1}^{(m)}$$

$$v_{j1}^{(0)} = ((\Psi_0 - x_0) \Psi_{0r} + r) \gamma_{0j} + (\Psi_{0r}/K_0) ({}^2/9 D(0) \psi_{j1rrr} + \dot{\gamma}_{0j})$$

$$v_{j1}^{(m)} = i((\Psi_0 - x_0) \Psi_{0r} + r) \omega \gamma_{mj} e^{i\alpha} + i \Psi_{0r}/K_0 \gamma_{mj} \omega e^{i\alpha} \quad (6.3)$$

В выражении для v_{j1}^m опущены члены порядка T_0/T . В том же приближении получим далее

$$\frac{\partial \psi_{j1}^{(m)}}{\partial t} = v_{j1}^{(m)}, \quad \psi_{j1}^m = ((\Psi_0 - x_0) \Psi_{0r} + r + \Psi_{0r}/K_0) \gamma_{mj} e^{i\alpha} \quad (6.4)$$

Это решение описывает в подвижной системе координат форму осесимметричного тела при жестких его колебаниях.

Функция $\psi_{j1}^{(0)}$ определяется уравнением (3.7), только с осредненными балансировочными значениями углов γ_0 вместо истинных. Покажем, что $\psi_{j1}^{(0)}$ есть среднее за период значение полного решения ψ_{j1} . Используя разложения, справедливые в пределах периода колебаний $[t_2, t_1]$, для медленных функций

$$f(t) = f_0 + f_0(t - t_0), \quad f_0 = f(t_0), \quad t_2 = t_0 + 1/2 T_0, \quad t_1 = t_0 - 1/2 T_0 \quad (6.5)$$

$$\Omega(t_2) - \Omega(t_1) = \omega_0 T_0 + O(T_0/T)^2 \sim 2\pi$$

получим для осредненных функций следующие формулы:

$$\langle f \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f dt = f_0 + O(T_0/T)^2, \quad \langle f e^{i\alpha t} \rangle \sim f_0 \frac{T_0}{T} \quad (6.6)$$

Отсюда и следует равенство $\langle \psi_{j1} \rangle = \psi_{j1}^{(0)} + O(T_0/T)$.

Можно показать, что функция ψ_{j1}^0 удовлетворяет дважды осредненному уравнению (3.7), в правой части которого останутся при этом лишь балансировочные углы $\gamma_0 = \langle \gamma \rangle + O(T_0/T)$.

В самом деле, предполагая для ψ_{j1} зависимость вида (6.4), при однократном осреднении получим

$$\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \psi_{j1}}{\partial t} dt = [\psi_{j1}(t_2) - \psi_{j1}(t_1)] / T_0 \quad (6.7)$$

В правой части медленные функции сохраняются, но после интегрирования члена с $\dot{\gamma}$ останутся быстропеременные члены вида $\gamma_m e^{i\alpha}$. При повторном осреднении согласно (6.6) эти члены пропадут, а из (6.7) получим

$$\frac{1}{T_0} (\langle \psi_{j1}(t_2) \rangle - \langle \psi_{j1}(t_1) \rangle) \approx \frac{\partial \langle \psi_{j1} \rangle}{\partial t} + O\left(\frac{T_0}{T}\right)$$

Таким образом, функция $\langle \psi_{j1} \rangle$ и ψ_{j1}^0 удовлетворяет одному и тому же уравнению, что и требовалось доказать. Поскольку при доказательстве в сущности не использовались разложения (3.6), (3.7) в ряд по φ , то этот результат относится и к решению исходной системы (3.4), (3.5) в целом.

7. Этот результат, следуя разработанной асимптотической теории [4], легко распространить и на комплексную, взаимозависимую задачу динамики и обгара тела, свободно движущегося в атмосфере. В простейшем варианте — лишь для продольного движения подобные задачи рассматривались в работе [5] и др.

В общем случае в линейном приближении движение тела около центра масс подчиняется уравнениям типа

$$\ddot{\gamma}_i = L_i(\gamma_i, \omega_x, \dots), \quad \dot{\omega}_x = L_0(\gamma_i) \quad (\gamma_i = \alpha, \beta, \omega_y, \omega_z) \quad (7.1)$$

Здесь ω_y, ω_z — угловые скорости вращения тела около поперечных, ω_x — около продольной координатных осей, операторы L_i линейны по γ_i .

Однако асимптотическая теория этих уравнений дает при $T_0/T \ll 1$ простое квазигармоническое решение. При этом для балансировочных углов, только и нужных, как показано выше, для решения задачи обгара, справедливы формулы

$$\omega_x = M_x/I_x - \omega_y \omega_z (I_y - I_z)/I_x$$

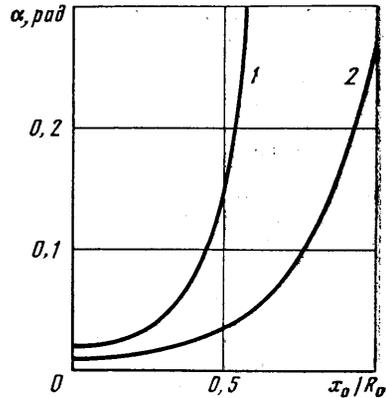
$$\alpha_0 = \frac{M_{z0} + (x_0 + l_x)C_{y0} - C_x(y_0 + l_y)}{I_y(M^* + (x_0 + l_x)C^*) - \omega_x^2}, \quad \beta_0 = \frac{M_{y0} - C_{z0}(x_0 + l_x) + C_x(z_0 + l_z)}{I_y(M^* + (x_0 + l_0)C^*) - \omega_x^2} \quad (7.2)$$

Здесь I_x, I_y, I_z и т. д. — моменты инерции тела относительно соответствующих осей, отнесенные к $\rho_\infty V_\infty^2 S_{mid} L/2$, S_{mid} — площадь, L — длина тела; l_x, l_y, l_z — координаты центра инерции, а входящие сюда аэродинамические коэффициенты осреднены по формулам типа $C_{y^{(0)}} = \langle C_{y0} \rangle + C^* \alpha_0$ и т. д.

Той же зависимости подчиняется и осреднение момента M_x , несмотря на квадратичную зависимость его от осредняемых функций. В самом деле, используя зависимости (2.4) для p_{ji} и вид решения (6.3), получим, что вклад скобок в (5.3), а следовательно, и вклад высокочастотных колебаний в величину $\langle M_x \rangle$ имеет пренебрежимый порядок T_0/T и в пределах теории, может быть опущен.

Таким образом, сформулированная выше комплексная задача обгара и динамики тел в указанном «двухвременном» приближении сводится к решению уравнений (3.4)–(3.5) для медленных основной Ψ_0 и осредненной $\langle \psi \rangle$ функций (или уравнений (3.4) и (3.7) для ψ_{ji} , Ψ_0 или частично линеаризованного уравнения (1.3), см. 4) совместно со сравнительно простыми уравнениями (7.2) и формулами разд. 5 для аэродинамических коэффициентов.

На фиг. 3 для тела, изображенного на фиг. 1 (с запасом устойчивости 10%), приведен расчет изменения балансировочного угла атаки при обгаре под действием ламинарного теплового потока для различных начальных углов атаки: кривая 1 для $\alpha_0(t_0) = 0,5^\circ$, кривая 2 — для $\alpha_0(t_0) = 1^\circ$. В качестве временной координаты выбрана величина уноса в критической точке тела.



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В. К трехмерной теории уравнения обгара тел в высокотемпературном потоке газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 143–151.
2. Лунев В. В., Сенкевич Е. А. Метод меридиональных сечений в задачах пространственного пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 67–73.
3. Знаменский В. В. Численное решение уравнения уноса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 147–154.
4. Ярошевский В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
5. Гершбейн Э. А., Суходольская Э. Я., Суходольский С. Л., Тирский Г. А. О движении тел в атмосфере Юпитера с учетом изменения их массы и формы под действием аэродинамического нагрева // Космич. исслед. 1978. Т. 16. № 3. С. 378–387.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1986