

УДК 533.6.011.8

ТЕЧЕНИЯ СЛАБОРАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫМИ ПЛАСТИНАМИ

АЛЕКСАНДРОВ В. Ю., ФРИДЛЕНДЕР О. Г.

Медленные неизотермические течения умеренно плотного идеального одноатомного газа не могут быть описаны методами теории сплошной среды с помощью уравнений Навье – Стокса [1–4], поскольку в уравнении сохранения импульса необходимо учитывать действие напряжений, обусловленных наличием градиента температуры (так называемых барнеттовских температурных напряжений). Этот результат получен в указанных работах на основе асимптотического анализа кинетического уравнения Больцмана в пределе, соответствующем режиму сплошной среды: $Kn = \lambda/L \rightarrow 0$, где λ – средняя длина свободного пробега молекул газа, L – характерный размер течения. Для медленных неизотермических течений газа предел сплошной среды соответствует течению с характерными значениями чисел M и Re такими, что $Kn \sim MRe^{-1} \rightarrow 0$, $Re \leq 1$, при конечном перепаде температуры $T^{-1}\Delta T \sim 1$. В этом случае скорость газа мала $u \sim aKn$ (a – скорость звука) и напряжения трения и барнеттовские температурные напряжения имеют одинаковый порядок величины $O(\rho Kn^2)$. В тех же работах на основании полученных уравнений газодинамики медленных неизотермических течений была предсказана возможность возникновения в отсутствие действия массовых сил свободной конвекции, обусловленной наличием температурных напряжений (термострессовая конвекция).

Непосредственная экспериментальная проверка справедливости уравнений газодинамики медленных неизотермических течений затруднена из-за малости измеряемых величин скорости и перепадов давления ($\Delta p \sim \rho Kn^2$). Определение области применимости решений этих уравнений к описанию течений газа с малыми, но конечными числами Kn не было проведено не только экспериментально, но и теоретически.

Цель данной работы заключается в установлении справедливости предсказаний теории медленных неизотермических течений, изучении пределов применимости (по числу Kn) полученных выводов и определении влияния кнудсеновских слоев на эти течения на основе численного исследования медленного неизотермического течения слабообразженного газа в плоском бесконечном канале со слабонервномерно нагретыми стенками и конечным перепадом температур стенок. Течение газа описывается релаксационным кинетическим уравнением. Полученные результаты показывают, как быстро с уменьшением числа Кнудсена решения кинетического уравнения вне кнудсеновских слоев стремятся к решению уравнений газодинамики медленных неизотермических течений (a не к решению уравнений Навье – Стокса).

1. Существующие численные методы решения уравнения Больцмана и кинетических релаксационных уравнений не позволяют получать решения двумерных задач рассматриваемого класса при малых числах Кнудсена с достаточной точностью, поскольку скорость изучаемых течений и перепады давления малы ($u \sim aKn$, $\Delta p \sim \rho Kn^2$). В одномерных же задачах в силу симметрии задач температурные напряжения уравниваются давлением и не вызывают течений. Поэтому в данной работе для обнаружения действия температурных напряжений выбрана задача, близкая к одномерным, математическая постановка которой приводит к ряду кинетических уравнений с одной пространственной переменной. Последние уже могут быть решены с приемлемой точностью.

Ниже приведены результаты численного исследования медленных неизотермических течений газа в плоском бесконечном канале со слабоне-

равномерно нагретыми стенками (пластинами). Пусть для определенности пластины параллельны плоскости (x, z) ($0 \leq y \leq L$), а их температуры стремятся при $z \rightarrow \pm\infty$ к величинам $T_1(\pm\infty)$ и $T_2(\pm\infty)$. Кроме того, положим, что температуры пластин изменяются слабо, а их средние значения отличаются друг от друга значительно

$$\varepsilon \sim \frac{L}{T_i} \left| \frac{dT_i}{dz} \right| \ll \left| \frac{T_i(+\infty) - T_i(-\infty)}{T_i} \right| \ll 1, \quad i=1, 2, \quad \frac{T_2 - T_1}{T_1} \sim 1 \quad (1.1)$$

Будем рассматривать течения газа в отсутствие внешних массовых сил (в частности, гравитационных: $\mathbf{g}=0$) и перепадов давления на концах канала (математическая формулировка этого условия будет дана ниже).

Из-за наличия пространственно неоднородного несимметричного поля температур в газе возникает медленное движение, близкое к одномерному. Далее это течение газа описывается релаксационным модельным кинетическим уравнением для функции распределения молекул по скоростям $f(\mathbf{x}|\xi)$

$$\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = An(f_0 - f), \quad f_0 = n(2\pi RT)^{-3/2} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT}\right) \quad (1.2)$$

Здесь f_0 — максвелловская функция распределения, $\mathbf{c} = \xi - \mathbf{u}$, n , \mathbf{u} , T — концентрация, скорость и температура газа, A — постоянная релаксации. Предполагается, что молекулы отражаются от стенок по диффузному закону распределения

$$f_{r_i} = \frac{n_i}{(2\pi RT_i)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT_i}\right) \quad (1.3)$$

$$y=0, \quad \xi_y > 0 \quad (i=1), \quad y=L, \quad \xi_y < 0 \quad (i=2)$$

где n_1, n_2 — концентрации отраженных молекул.

Введем безразмерные величины, отнеся координаты к расстоянию между пластинами (L), температуры — к температуре холодной пластины в сечении $z=0$ (T_1^0), концентрацию — к средней концентрации молекул газа в сечении $z=0$ (n_*), скорости — к $(RT_1^0)^{1/2}$, функцию распределения — к $n_*(RT_1^0)^{-3/2}$. Сохраняя за безразмерными величинами те же обозначения, что и для размерных переменных, представим кинетическое уравнение (1.2) с граничными условиями (1.3) и определением средней концентрации в следующем виде:

$$\xi_y \frac{\partial f}{\partial y} + \xi_z \frac{\partial f}{\partial z} = \alpha n(f_0 - f), \quad \alpha = \frac{An_*L}{\sqrt{RT_1^0}} \quad (1.4)$$

$$f(y=0|\xi_y > 0) = f_M(n_1, T_1), \quad f(y=L|\xi_y < 0) = f_M(n_2, T_2) \quad (1.5)$$

$$\int_0^1 n(z=0, y) dy = 1$$

$$f_M(n_i, T_i) = \frac{n_i}{(2\pi T_i)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2T_i}\right) \quad (1.6)$$

Соотношения (1.4)–(1.6) дополним условиями непротекания газа сквозь стенки канала

$$u_y(y=0) = u_y(y=L) = 0 \quad (1.7)$$

Среди всех течений, описываемых системой уравнений (1.4)–(1.7), выделим единственное, используя условие равенства нулю среднего гра-

диента давления в сечении $z=0$

$$\int_0^1 \frac{\partial p}{\partial z}(y, z=0) dy = 0 \quad (1.8)$$

Условие (1.8) уточняет смысл введенного ранее ограничения на отсутствие перепада давления вдоль канала.

2. Малая величина изменения температуры вдоль границ канала на расстояниях порядка L позволяет ввести малый параметр ϵ (см. (1.1)). Следует подчеркнуть, что параметр ϵ не связан с длиной свободного пробега молекул λ , или с $\alpha^{-1} \sim \lambda/L = \text{Kn}$, и определяется только видом распределения температуры вдоль стенок. Это позволяет решать кинетическую задачу (1.1), (1.4)–(1.8) методом регулярных возмущений (регулярных по пространственным координатам). Изучая теплопередачу и движение газа в окрестности сечения $z=0$ (т. е. в области с характерным продольным размером L) и учитывая условие (1.1), представим температуры пластин, функцию распределения и другие физические переменные в виде степенных рядов по ϵ

$$\begin{aligned} T_{wi} &= T_i^\circ + \epsilon \gamma_i z + o(\epsilon), & f &= f^\circ + \epsilon f^1 + o(\epsilon) \\ n &= n^\circ + \epsilon n^1 + o(\epsilon), & T &= T^\circ + \epsilon T^1 + o(\epsilon), & \mathbf{u} &= \mathbf{u}^\circ + \epsilon \mathbf{u}^1 + o(\epsilon) \\ f_{r_i} &= f_{r_i}^\circ + \epsilon f_{r_i}^1 + o(\epsilon), & n_i &= n_i^\circ + \epsilon n_i^1 + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Здесь γ_i — безразмерные производные по z температур пластин. В нулевом по ϵ приближении функция распределения и макропараметры определяются из решения задачи об одномерной теплопередаче между параллельными пластинами с температурами $T_1^\circ (T_1^\circ = 1)$ и T_2° [5]

$$\xi_v \frac{\partial f^\circ}{\partial y} = \alpha n^\circ (f_0^\circ - f^\circ), \quad f^\circ = f^\circ(y | \xi_v, \xi^2) \quad (2.1)$$

$$f^\circ(y=0 | \xi_v > 0) = f_M(n_1^\circ, T_1^\circ), \quad f^\circ(y=1 | \xi_v < 0) = f_M(n_2^\circ, T_2^\circ)$$

$$\mathbf{u}^\circ = 0, \quad f_0^\circ = f_M(n^\circ, T^\circ), \quad \int_0^1 n^\circ(z=0) dy = 1$$

В первом по ϵ приближении для функции f^1 и макропараметров n^1 , T^1 , \mathbf{u}^1 , n_i^1 получим линейное кинетическое уравнение с граничными условиями и дополнительными соотношениями, коэффициенты которых зависят от переменных нулевого приближения, т. е. от f° . Вид этого уравнения и соотношений указывает на то, что решение f^1 имеет следующую структуру:

$$f^1(y, z | \xi) = z g(y | \xi_v, \xi^2) + \xi_z h(y | \xi_v, \xi^2) \quad (2.2)$$

При этом в силу свойств симметрии и антисимметрии по ξ_z концентрация и температура первого приближения n_1^1 и T^1 определяются только функцией g , а составляющая скорости газа вдоль оси z u_z^1 — только функцией h

$$\begin{aligned} n^1 &= z n^g(y), & T^1 &= z T^g(y), & n_i^1 &= z n_i^g, & u_z^1 &= u_z^h(y) \\ n^g &= \int g d\xi, & 3(n^g T^\circ + n^\circ T^g) &= \int \xi^2 g d\xi, & n^\circ u_z^h &= \int \xi_z^2 h d\xi \end{aligned}$$

Система уравнений для определения функций распределения g , h макропараметров n^g , T^g , u_z^h и постоянных n_i^g , n_2^g запишется следующим об-

разом:

$$\xi_v \frac{\partial g}{\partial y} = \alpha n^s (f_0^\circ - f) + \alpha n^\circ \left\{ f_0^\circ \left[\frac{n^s}{n^\circ} + \frac{T^s}{2T^\circ} \left(\frac{\xi^2}{T^\circ} - 3 \right) \right] - g \right\} \quad (2.3)$$

$$\xi_v \frac{\partial h}{\partial y} + g = \alpha n^\circ \left(f_0^\circ \frac{u_z^h}{T^\circ} - h \right)$$

$$g(y_i, \xi_v) = \left[\frac{n_i^s}{n_i^\circ} + \frac{\gamma_i}{2T_i^\circ} \left(\frac{\xi^2}{T_i^\circ} - 3 \right) \right] f_M(n_i^\circ, T_i^\circ), \quad i=1, 2 \quad (2.4)$$

$$y_i=0, \quad \xi_v > 0 \quad (i=1), \quad y_i=1, \quad \xi_v < 0 \quad (i=2)$$

$$h(y=0 | \xi_v > 0) = h(y=1 | \xi_v < 0) = 0 \quad (2.5)$$

$$n^\circ u_v^1(y, z) = z n^\circ u_v^s(y) = z \int \xi_v g(y) d\xi = \text{const} = 0, \quad \forall z \quad (2.6)$$

$$\int_0^1 \frac{\partial p^1}{\partial z} dy = \int_0^1 p^s(y) dy = \int_0^1 (n^s T^\circ + n^\circ T^s) dy = 0 \quad (2.7)$$

Здесь уравнения (2.3) — линейные кинетические релаксационные уравнения для функций распределения g, h с неоднородными граничными условиями (2.4) для g и однородными условиями (2.5) для h . Граничные условия первого порядка (2.4) — (2.5) получены линеаризацией по малым градиентам температур вдоль границ обычных условий диффузного отражения молекул (1.5). Постоянные n_1^s и n_2^s , входящие в граничные условия для g и характеризующие концентрации молекул, отраженных от пластин, в первом по ϵ приближении определяются из условий непротекания газа сквозь стенки (2.6) и отсутствия перепада давления вдоль канала (2.7).

Условие нормировки концентрации первого порядка (при $z=0$)

$$\int_0^1 n^1 dy = 0$$

выполняется тождественно вследствие вида функции f^1 (2.2). Отметим, что граничная задача для функции g (2.3), (2.4), (2.6), (2.7) может быть решена после решения системы (2.1) для f° независимо от решения уравнений для функции h .

3. Уравнения и граничные условия медленных неизотермических течений газа как сплошной среды для исследуемой задачи в случае, когда газ описывается релаксационным кинетическим уравнением, могут быть получены из системы (2.1) — (2.7) разложением в асимптотический ряд по α^{-1} [1—4]. При этом для макропараметров нулевого приближения n°, T° с погрешностью $O(\alpha^{-1})$ получаются уравнения теплопроводности с условиями равенства температур газа и пластин и условием нормировки на среднюю концентрацию

$$\frac{d}{dy} \left(T^\circ \frac{dT^\circ}{dy} \right) = 0, \quad T^\circ(y=0) = T_1^\circ, \quad T^\circ(y=1) = T_2^\circ$$

$$\int_0^1 n^\circ dy = 1, \quad p^\circ = n^\circ T^\circ = \text{const}$$

Для температуры первого приближения T^s с той же погрешностью лучшим соотношения

$$\frac{d^2}{dy^2}(T^\circ T^s) = 0, \quad T^s(y=0) = \gamma_1, \quad T^s(y=1) = \gamma_2$$

Решение уравнений теплопроводности нулевого и первого порядка три-виально

$$T^\circ = \{[(T_2^\circ)^2 - (T_1^\circ)^2]y + (T_1^\circ)^2\}^{1/2}, \quad p^\circ = \text{const} = 1/2(T_1^\circ + T_2^\circ) \quad (3.1)$$

$$T^s = [(\gamma_2 T_2^\circ - \gamma_1 T_1^\circ)y + \gamma_1 T_1^\circ] (T^\circ)^{-1}$$

Скорость и давление первого по ϵ приближения u_z^h , p^s определяются из уравнений переноса импульса и условий температурного скольжения с абсолютной погрешностью $O(\alpha^{-2})$ и $O(\alpha^{-3})$ соответственно (порядок самих величин u_z^h и $p^s - O(\alpha^{-1})$ и $O(\alpha^{-2})$ соответственно)

$$\frac{d}{dy} \left(T^\circ \frac{du_z^h}{dy} \right) = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{\delta}{(\alpha p^\circ)} \left(\frac{dT^\circ}{dy} \right)^2 T^s$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -3 \frac{\delta}{(\alpha p^\circ)} \left(\frac{dT^\circ}{dy} \right)^2 \frac{dT^s}{dy} z$$

$$\Pi = z \left\{ \alpha p^s + \frac{\delta}{(\alpha p^\circ)} \left[2T^\circ \frac{dT^\circ}{dy} \frac{dT^s}{dy} + \left(\frac{dT^\circ}{dy} \right)^2 T^s \right] \right\}$$

$$\int_0^1 p^s dy = 0, \quad u_z^h(0) = \beta T_1^\circ \gamma_1, \quad u_z^h(1) = \beta T_2^\circ \gamma_2, \quad \beta = \frac{0,766}{\alpha p^\circ}$$

Здесь β — коэффициент температурного скольжения. Отличие этих уравнений от обычно используемых уравнений Навье — Стокса состоит в присутствии членов, обусловленных температурными напряжениями и выделенных множителем δ , равным единице. Соответственно различаются и решения уравнений медленных неизотермических течений газа ($\delta=1$) и соответствующих им уравнений Навье — Стокса ($\delta=0$)

$$u_z^h(w) = \beta (\gamma_1 T_1^\circ + \gamma_2 T_2^\circ w) - \beta \gamma_1 T_1^\circ w + \delta (\gamma_2 T_2^\circ - \gamma_1 T_1^\circ) (T_2^\circ - T_1^\circ) \frac{w}{\alpha p^\circ} (w-1) \quad (3.2)$$

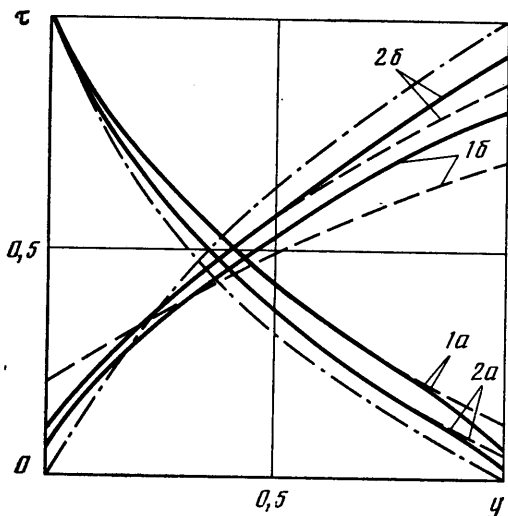
$$w(y) = [T^\circ(y) - T_1^\circ] (T_2^\circ - T_1^\circ)^{-1}$$

Для удобства здесь также введены множитель δ и деформированная поперечная координата $w(y)$.

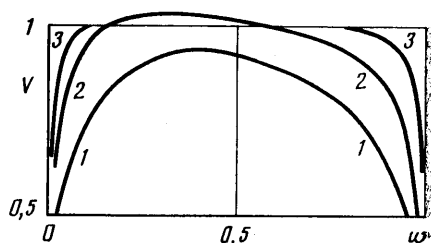
Система уравнений (2.1), (2.3) — (2.7) для произвольного числа Кнудсена (или α) решалась численно. Предварительно кинетические уравнения (2.1), (2.3) записывались обычным образом в интегральной форме и исследуемая задача сводилась к нелинейным интегральным уравнениям относительно концентрации и температуры нулевого приближения n° , T° и линейным уравнениям относительно концентрации, температуры и продольной скорости первого приближения n^s , T^s , u_z^h . Ядра этих интегральных уравнений зависят от n° , T° и выражаются через известные функции Абрамовица [6]. Нелинейные уравнения для n° , T° при малых числах Кнудсена решались с использованием законов сохранения итерационным методом, изложенным в [7]. Линеарные интегральные уравнения для n^s , T^s , u_z^h при всех числах Кн решались сведением к алгебраическим уравнениям методом Галеркина.

4. Результаты решения кинетической задачи нулевого приближения (2.1) хорошо известны [5, 8] и не приводятся здесь. Напомним только, что при малом числе Кнудсена вне кнудсеновских слоев профили температуры совпадают с профилями, рассчитанными по уравнению теплопроводности с условиями скачка температуры.

Для температуры первого приближения $T^1(z, y) = zT^s(y)$ результаты аналогичны и приведены на фиг. 1 для двух случаев, когда неравномерно нагреты холодная ($\gamma_2=0$, кривые 1а, 2а) или горячая пластины ($\gamma_1=$



Фиг. 1



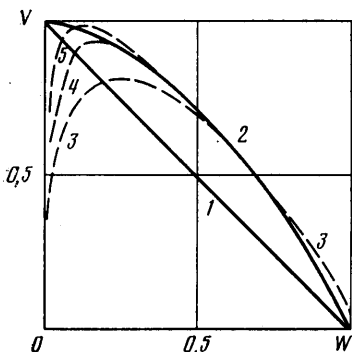
Фиг. 2

$=0$, кривые 1б, 2б). Температуры стенок канала в сечении $z=0$ равны $T_2^\circ=2,0408$, $T_1^\circ=1$. Параметр разреженности газа α^{-1} (см. (1.4)), пропорциональный числу Кнудсена, равен 0,075 (кривые 1а, 1б) и 0,0333 (кривые 2а, 2б). Сплошными линиями обозначены решения кинетической задачи (2.1), (2.3)–(2.7), штриховыми – решения первого порядка уравнения теплопередачи с условиями скачка температуры, штрихпунктирными – решения (3.1) первого порядка уравнения теплопроводности с условиями равенства температур газа и пластин. На фиг. 1 по оси ординат отложены величины $\tau = T^{\circ} (T_i^{\circ} \gamma_i)^{-1}$ – относительные производные температуры по продольной координате z , по оси абсцисс – поперечная координата y .

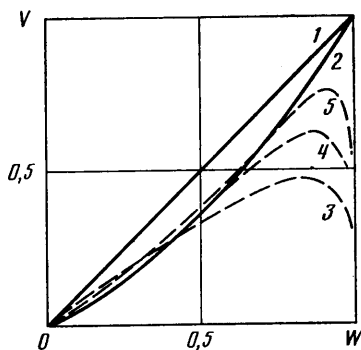
Вследствие большей местной длины свободного пробега у горячей стенки согласование решений кинетического уравнения и уравнений сплошной среды хуже при неоднородно нагретой горячей стенке. Тем не менее профили температуры при неоднородном нагреве горячей стенки отличаются от профилей (3.1) при $\alpha^{-1}=0,0133$ менее чем на 5% (на фиг. 1 данные не приводятся).

Из формулы (3.2) следует, что распределение продольной скорости u_z^h поперек канала, получаемое по уравнениям Навье – Стокса ($\delta=0$), совпадает с профилями, рассчитываемыми по уравнениям медленных неизотермических течений ($\delta=1$), только при одинаковых скоростях скольжения газа на стенках ($u_s \beta^{-1} = \gamma_1 T_1^\circ = \gamma_2 T_2^\circ$, u_s – скорость скольжения). Именно этот случай представлен на фиг. 2, где приведены профили скорости, получаемые из решения кинетических уравнений при $T_2^\circ=1,5625$ ($T_1^\circ=1$) и значениях $\alpha^{-1}=0,1126, 0,0333, 0,0133$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). По оси ординат отложена величина продольной скорости, отнесенная к скорости скольжения u_s при данном значении α^{-1} , по оси абсцисс – деформированная поперечная координата w . Таким образом, в случае, когда решения уравнений Навье – Стокса и уравнений газодинамики медленных неизотермических течений совпадают, решение кинетических уравнений стремится к общему пределу $u_z^h u_s^{-1} = 1$ вне кнудсеновских слоев.

На фиг. 3, 4 приведены результаты решения кинетических уравнений для продольной скорости, показывающие, что в пределе сплошной среды ($Kn \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty$) в данном классе задач справедливы не уравнения Навье – Стокса, а более общие уравнения газодинамики медленных неизотермических течений. Профили продольной скорости $V = u_z^h u_s^{-1}$ построены в



Фиг. 3



Фиг. 4

зависимости от деформированной поперечной координаты $w(y)$ для случая скольжения вдоль холодной пластины при $T_2^\circ = 2,0408$ (фиг. 3) и для скольжения вдоль горячей пластины при $T_2^\circ = 1,5625$ (фиг. 4). Обозначения: прямая 1 — решение уравнений Навье — Стокса (формула (3.2), $\delta = 0$), кривая 2 — решение уравнений газодинамики медленных неизоэнтальпических течений (3.2), $\delta = 1$, кривые 3–5 — решения кинетических уравнений при $\alpha^{-1} = 0,1126; 0,050; 0,0213$ соответственно.

Эти данные убеждают в том, что вне кнудсеновских слоев профили скорости стремятся при $\text{Kn} \rightarrow 0$ к профилям, предсказанным по теории медленных неизоэнтальпических течений газа. Из результатов, приведенных на фиг. 3, видно, как вследствие уменьшения местной длины свободного пробега у холодной стенки канала при возрастании T_2° и фиксированном числе Кнудсена, вычисленном по средней концентрации, кнудсеновский слой у холодной стенки уменьшается при $T_2^\circ \approx 2$. Данные фиг. 3, кроме того, указывают, по-видимому, на появление на холодной стенке температурного скольжения второго порядка.

Поскольку кнудсеновские слои занимают значительную область течения при исследованной степени разреженности газа, то для определения расходных характеристик течения необходимо учитывать потоки газа через кнудсеновские слои. Это важно при планировании эксперимента по обнаружению действия температурных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С., Коган М. Н., Фридендер О. Г. О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды // Изв. АН СССР, МЖГ. 1970. № 3. С. 13–21.
2. Галкин В. С., Коган М. Н., Фридендер О. Г. О свободной конвекции в газе в отсутствие внешних сил // Изв. АН СССР, МЖГ. 1971. № 3. С. 98–107.
3. Коган М. Н., Галкин В. С., Фридендер О. Г. О напряжениях, возникающих в газах вследствие неоднородности температуры и концентраций: Новые типы свободной конвекции // Успехи физ. наук. 1976. Т. 119. Вып. 1. С. 111–125.
4. Галкин В. С. Вывод уравнений медленных течений смесей газов из уравнений Больцмана // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 4. С. 40–47.
5. Willis D. R. Heat transfer in a rarefied gas between parallel plates at large temperature ratios // Rarefied Gas Dynamics: 3rd Sympos., Paris, 1962. N. Y.: Acad. press, 1963. V. 1. P. 209–225.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами // Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
7. Бишаев А. М., Рыков В. А. Решение стационарных задач кинетической теории газов при умеренных и малых числах Кнудсена методом итераций. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 1. С. 172–182.
8. Александров В. Ю. О немонокотонной зависимости теплопередачи от перепадов температур // Теплофизика высоких температур. 1984. Т. 22. № 2. С. 363–371.

Москва

Поступила в редакцию
16.VII.1985