МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1988

УДК 532.51

СОПРОТИВЛЕНИЕ СФЕРЫ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

ГАЙДУКОВ М. Н., РОМАН В. Г., ЯЛАМОВ Ю. И.

Исследуется нестационарное обтекание сферы вязкой несжимаемой жидкостью. Величина инерционных и нестационарных членов в уравнениях Навье – Стокса характеризуется поступательными R и колебательным R_k числами Рейнольдса, которые предполагаются малыми. Решение строится в виде разложения по $\max(R, R_k^{1/2})$ методом сращиваемых асимптотических разложений. Вычисляется поправка к силе Стокса, справедливая с точностью до $o[\max(R, R_k^{1/2})]$. Показано, что результат сильно зависит от отношения $R/R_k^{1/2}$ и переходит в известные формулы для случаев $R\to 0$, $R_k\to 0$.

1. Формула для силы сопротивления, действующей на твердую сферу в стационарном потоке вязкой жидкости, с учетом инерционных поправок получена в [1]

$$\mathbf{F}=6\pi\mu a\mathbf{U}\left[1+\frac{3}{8}R+\frac{9}{40}R^2\ln R+O(R^2)\right],\qquad R=\frac{Ua}{\nu}\tag{1.1}$$

Здесь μ – коэффициент динамической вязкости, a – радиус сферы, $\mathbf{U}$ – скорость невозмущенного потока, R – число Рейнольдса, ν – коэффициент кинематической вязкости. Число Рейнольдса предполагается малым: $R\ll 1$.

Хорошо известно также выражение для силы, действующей на сферу в нестационарном потоке, без учета инерционных эффектов, т. е. при $R\to 0$, которое можно представить в виде (см. [2])

$$\mathbf{F}(t)=6\pi\mu a\left[\mathbf{U}(t)+\frac{R_k}{9}\frac{d\mathbf{U}}{dt}+\left(\frac{R_k}{\pi}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{d\mathbf{U}}{d\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}\right],\quad R_k=\frac{a^2}{\nu T}\tag{1.2}$$

Здесь R_k – колебательное число Рейнольдса, T – характерное время изменения $\mathbf{U}(t)$, t – безразмерное время.

В [3] рассматривалась задача о гармонических колебаниях шара в вязкой жидкости. Поступательное число Рейнольдса предполагается малым, а колебательное – порядка единицы, т. е. фактически $R\ll R_k$. Учет инерционных эффектов в первом приближении по R не влияет на силу сопротивления и остается справедливой формула (1.2).

Таким образом, теория, построенная в [3], не описывает предельного перехода при $R_k\to 0$ к квазистационарному движению (к формуле (1.1)). Как следует из анализа, проведенного ниже, это связано с невозможностью рассматривать инерционные и нестационарные поправки независимо при малых частотах колебаний, когда $\sqrt{R_k}\sim R$.

В настоящей работе инерционные и нестационарные члены в уравнениях Навье – Стокса рассматриваются как единое целое.

2. Рассмотрим твердую сферу, помещенную в неограниченную жидкость. При $t<0$ система находится в покое. В момент времени $t=0$ включается однородный в пространстве нестационарный поток со скоростью

$\mathbf{U}'(t)$. Направление $\mathbf{U}'(t)$ неизменно во времени. Пусть начало координат находится в центре сферы. Запишем уравнения движения жидкости в безразмерном виде

$$\nabla^2 v_i - \nabla_i p = R v_j \nabla_j v_i + R\frac{\partial v_i}{\partial t}$$
$$\nabla_j v_j = 0 \tag{2.1}$$

Здесь $v_i(\mathbf{r}, t)$, $p(\mathbf{r}, t)$ — соответственно поля скорости и давления. Безразмерные величины вводятся следующим образом (штрихом помечены размерные величины): $\mathbf{r}=\mathbf{r}'/a$, $t=t'/T$, $v_i=v_i'/U_0$, $p=a/\mu U_0 p'$, $\mathbf{u}(t)=\mathbf{U}'(t)/U_0$. Через U_0 обозначена характерная величина скорости потока.

Решение (2.1) удовлетворяет граничным и начальным условиям

$$v_i(\mathbf{r}, t) \to u_i(t), \quad |\mathbf{r}| \to \infty$$
$$v_i(\mathbf{r}, t)=0, \quad |\mathbf{r}|=1; \quad v_i(\mathbf{r}, t)=0, \quad t\leqslant 0 \tag{2.2}$$

Поступательное и колебательное числа Рейнольдса в дальнейшем предполагаются малыми: $R\ll 1$, $R_k\ll 1$. Заметим, что эти условия накладывают ограничения на вид потока $\mathbf{U}'(t)$. В частности, в рамках данного приближения нельзя рассматривать скачкообразные изменения скорости потока, так как при этом $T\to 0$, $R_k\to\infty$. Если $\mathbf{U}'(t)$ изменяется по гармоническому закону, имеем условие для частоты колебаний f: $f\ll \nu/a^2$. Малость поступательного числа Рейнольдса требует, чтобы амплитуда скорости потока была не слишком велика.

Как известно, поступательное число Рейнольдса определяет величину расстояний от тела, на которых инерционные члены в уравнениях Навье — Стокса (2.1) становятся существенными: $r\gtrsim R^{-1}$.

Подобным образом колебательное число Рейнольдса определяет расстояния, на которых существен член $R_k\partial v_i/\partial t$, а именно $r\gtrsim R^{-1/2}$. Будем рассматривать правую часть (2.1) как целое и считать, что ее малость нарушается при $r\gtrsim\min(R^{-1}, R_k^{-1/2})$.

Малость правой части нарушается также в начальный отрезок времени. Действительно, при $t\to 0$ $|\partial v_i/\partial t|=o(1)$, $|v_i|=O(t)$. Поэтому слагаемое $R_k\partial v_i/\partial t$ сравнимо с $\nabla^2 v_i$ при $t\lesssim R_k$. Величина скорости в рассматриваемый промежуток времени будет $|v_i|\lesssim R_k$. Отсюда следует, что при построении решения, равномерно пригодного по t с точностью до $o(R_k)$, начальный отрезок можно не учитывать.

Предположим, что $R_k^{1/2}\geqslant R$. Решение (2.1) будем искать в виде разложения по $R_k^{1/2}$ с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений [4]. В окрестности тела, т. е. при $r\sim 1$, решение представляется внутренним разложением

$$v_i(\mathbf{r}, t)=u_i(t)+v_{i0}(\mathbf{r}, t)+R_k^{1/2}v_{i1}(\mathbf{r}, t)+o(R_k^{1/2})$$
$$p(\mathbf{r}, t)=p_u(\mathbf{r}, t)+p_0(\mathbf{r}, t)+R_k^{1/2}p_1(\mathbf{r}, t)+o(R_k^{1/2}) \tag{2.3}$$

где p_u — поле давления, соответствующее однородному потоку. При $r\gtrsim R_k^{-1/2}$ решение представляется внешним разложением

$$v_i(\mathbf{r}^*, t)=u_i(t)+R_k^{1/2}v_{i1}^*(\mathbf{r}^*, t)+o(R_k^{1/2})$$
$$p(\mathbf{r}^*, t)=p_u(\mathbf{r}^*, t)+R_k p_1^*(\mathbf{r}^*, t)+o(R_k) \tag{2.4}$$

Здесь введены внешние переменные $r_i^*=R_k^{1/2}r_i$. В разложении (2.4) для давления должен отсутствовать член порядка $R_k^{1/2}$. Это следует из сращивания (2.3) и (2.4).

Поле $\{(v_{i0}, p_0)\}$ соответствует предельному переходу $R\to 0$, $R_k\to 0$ в (2.1) и удовлетворяет уравнениям Стокса $\nabla^2 v_{i0}-\nabla_i p_0=0$, $\nabla_j v_{j0}=0$ с граничными условиями: $v_{i0}=0$ при $r\to\infty$, $v_{i0}=-u_i(t)$ при $r=1$. Условия на бесконечности следуют из сращивания одночленных внутреннего и внешнего разложений. Решение этой задачи может быть записано в виде

$$v_{i0}(\mathbf{r}, t)=-D_{ik}(\mathbf{r})\,u_k(t)$$
$$p_0(\mathbf{r}, t)=-\frac{3}{2r^3}r_k u_k(t) \tag{2.5}$$

$$D_{ik}(\mathbf{r})=S_{ik}(\mathbf{r})+\frac{1}{6}\nabla^2 S_{ik}(\mathbf{r}),\qquad S_{ik}(\mathbf{r})=\frac{3}{4r}\left(\delta_{ik}+\frac{r_i r_k}{r^2}\right) \tag{2.6}$$

При замене $r_i^*=R_k^{1/2}r_i$ в (2.1) и подстановке разложения (2.4) получаются уравнения для поля $\{v_{i1}, p_1^*\}$

$$\nabla^{*2}v_{i1}-\nabla_i^* p_1^*-\alpha u_j(t)\,\nabla_j^* v_{i1}^*-\frac{\partial v_{i1}^*}{\partial t}=0$$
$$\nabla_j^* v_{j1}^*=0,\qquad \alpha=\frac{R}{R_k^{1/2}},\qquad \nabla_i^*=\frac{\partial}{\partial r_i^*} \tag{2.7}$$

При $\mathbf{r}^*\to 0$ решение (2.7) удовлетворяет условиям, которые следуют из сращивания двучленного внешнего разложения с одночленным внутренним разложением

$$v_{i1}^*(\mathbf{r}^*, t)=-S_{ik}(\mathbf{r}^*)\,u_k(t)+O(1)$$
$$p_1^*(\mathbf{r}^*, t)=-\frac{3}{2r^{*3}}r_k^* u_k(t)+O\left(\frac{1}{r^*}\right) \tag{2.8}$$

Как видно из условий (2.8), решение системы (2.7) имеет особенность в точке $r^*=0$. Ее физический смысл состоит в действии на жидкость точечной силы, приложенной в начале координат. В соответствии с этим поле $\{v_{i1}^*, p_1^*\}$ можно искать как решение уравнений

$$\nabla^{*2}v_{i1}-\nabla_i^* p_1^*-\alpha u_j(t)\,\nabla_j^* v_{i1}^*-\frac{\partial v_{i1}^*}{\partial t}=\delta(\mathbf{r}^*)F_{i0}(t)$$
$$\nabla_j^* v_{j1}^*=0 \tag{2.9}$$

с начальным условием и условием на бесконечности

$$v_{i1}^*(\mathbf{r}^*, t)=0,\qquad t=0$$
$$v_{i1}^*(\mathbf{r}^*, t)\to 0,\qquad r^*\to\infty \tag{2.10}$$

В уравнениях (2.9) $F_{i0}(t)=6\pi u_i(t)$ — безразмерная сила, действующая на тело в стоксовском приближении.

Решение будем искать в виде

$$v_{i1}^*=\int_0^t[\delta_{ik}\nabla^{*2}-\nabla_i^*\nabla_k^*]\,\Phi(\mathbf{r}^*, t, \tau)\,F_{k0}(\tau)\,d\tau$$
$$p_1^*=\frac{F_{k0}(t)}{4\pi}\nabla_k^*\left(\frac{1}{r^*}\right) \tag{2.11}$$

Функция $\Phi(\mathbf{r}^*, t, \tau)$ должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^{*2}\Phi-\alpha u(t)\frac{\partial\Phi}{\partial x^*}-\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\frac{\delta(t-\tau)}{4\pi r^*} \tag{2.12}$$

и условиям

$$\Phi(\mathbf{r}^*,t,\tau)=0,\quad t<\tau,\quad \Phi(\mathbf{r}^*,t,\tau)\to 0,\quad r^*\to\infty \tag{2.13}$$

Здесь и в дальнейшем ось $X(x=r_1)$ выбрана вдоль направления $\mathbf{u}(t)$, в (2.12) $u(t)=|u(t)|$.

Решение (2.12), (2.13) построено в [5]

$$\Phi(\mathbf{r}^*,t,\tau)=\frac{1}{8\pi^{3/2}(t-\tau)^{1/2}}\int_0^1 \exp(\beta Q)\beta^{-1/2}\,d\beta$$

$$Q(\mathbf{r}^*,t,\tau)=-\frac{r^{*2}}{r(t-\tau)}+x^*f(t,\tau)-(t-\tau)[f(t,\tau)]^2 \tag{2.14}$$

$$f(t,\tau)=\frac{\alpha}{2(t-\tau)}\int_\tau^t u(\xi)\,d\xi$$

При малых r^* главный член разложения (2.11) есть

$$v_{i1}^*(\mathbf{r}^*,t)=-\frac{3}{4r^*}\left(\delta_{ik}+\frac{r_i^*r_k^*}{r^{*2}}\right)u_k(t)+o(1)$$
$$p_1^*(\mathbf{r}^*,t)=-\frac{3}{2r^{*3}}r_k^*u_k(t) \tag{2.15}$$

что согласуется с (2.8).

Для вычисления поправки к силе, действующей на тело, необходимо обратиться к внутреннему разложению. Условие на бесконечности для поля $\{v_{i1},\,p_1\}$ вытекает из сращивания двучленных внешнего и внутреннего разложений. Оно определяется членами $o(1)$ в (2.15)

$$\lim_{r\to\infty} v_{i1}(\mathbf{r},t)=\alpha\frac{F_{k0}(t)u(t)}{32\pi r}\left[-x\left(3\delta_{ik}+\frac{r_ir_k}{r^2}\right)+r_i\delta_{k1}+r_k\delta_{i1}\right]-$$
$$-\delta_{i1}G_1(t)+[3G_i(t)-2H_i(t)+2J_i(t)] \tag{2.16}$$

$$G_i(t)=\frac{1}{8\pi^{3/2}}\int_0^1\beta^{3/2}\,d\beta\int_0^t\frac{f^2(t,\tau)\psi(\beta,t,\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau$$

$$H_i(t)=\frac{1}{8\pi^{3/2}}\int_0^1\beta^{3/2}\,d\beta\int_0^t(t-\tau)^{1/2}\frac{\partial f^2}{\partial\tau}\psi(\beta,t,\tau)F_{i0}(\tau)\,d\tau \tag{2.17}$$

$$J_i(t)=\frac{1}{8\pi^{3/2}}\int_0^1\beta^{1/2}\,d\beta\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}\psi(\beta,t,\tau)\frac{dF_{i0}(\tau)}{d\tau}$$

$$\psi(\beta,t,\tau)=e^{-(t-\tau)\beta f^2(t,\tau)}$$

Функции v_{i1}, p_1 удовлетворяют неоднородным уравнениям Стокса $\nabla^2v_{i1}-\nabla_ip_1=\alpha[u_j(t)+v_{j0}]\nabla_jv_{i0}$, $\nabla_jv_{j1}=0$, условиям на бесконечности (2.16) и граничным условиям на поверхности сферы: $v_{i1}=0$ при $r=1$. Представим $\{v_{i1},\,p_1\}$ в виде суммы двух членов. В первом поле скорости не изменяется при замене $\mathbf{r}=-\mathbf{r}$, поле давления меняет знак. Во втором поле скорости меняет знак при замене $\mathbf{r}\to-\mathbf{r}$, поле давления не меняется. Вклад в силу дают только функции первого типа. Первый член есть решение однородных уравнений Стокса, так как выражение $\alpha[u_j(t)+v_{j0}]\nabla_jv_{i0}$ есть нечетная функция **r**. Ему соответствует четная часть в условиях на бесконечности (2.16), а на поверхности сферы он удовлетворяет нулевым граничным условиям. Таким образом, поправку к силе можно найти непосредственно из (2.16), (2.17). Полная сила, действующая на сферу, равна

$$F_i(t)=F_{i0}(t)+12\pi R_k^{1/2}[G_i(t)-H_i(t)+J_i(t)]+o(R_k^{1/2}) \tag{2.18}$$

Вычисляя интегралы по β в (2.17), можно представить силу в виде

$$F_i(t)=F_{i0}(t)+\frac{3}{2}\left(\frac{R}{\pi}\right)^{1/2}\int\limits_0^t\left\{\left[f^2(t,\tau)-(t-\tau)\frac{\partial f^2}{\partial\tau}\right]h(t,\tau)F_{i0}(\tau)+\right.$$
$$\left.+g(t,\tau)\frac{dF_{i0}}{d\tau}\right\}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}+o(R_k^{1/2}) \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} g(t,\tau)&=\frac{1}{(t-\tau)f^2(t,\tau)}\left[\frac{\pi^{1/2}}{2}\frac{\operatorname{erf}(f(t,\tau)\sqrt{t-\tau})}{f(t,\tau)\sqrt{t-\tau}}-e^{-(t-\tau)f^2(t,\tau)}\right]\\ h(t,\tau)&=\frac{1}{(t-\tau)f^2(t,\tau)}\left[\frac{3}{2}g(t,\tau)-e^{-(t-\tau)f^2(t,\tau)}\right]\end{aligned} \tag{2.20}$$

3. Формулы (2.18) и (2.19) получены в предположении, что $\alpha=R/R_k^{1/2}\leqslant\leqslant 1$. Случай $\alpha>1$ рассматривается аналогично, с той лишь разницей, что разложение ведется по числу Рейнольдса R. Уравнения внутренней и внешней задач отличаются от прежних только значениями постоянных коэффициентов. Нетрудно убедиться, что выражения (2.18) и (2.19) остаются справедливыми при $\alpha>1$ с точностью до членов порядка R^2.

Рассмотрим предельный переход $R_k\to 0$, $\alpha\to\infty$, что соответствует квазистационарному движению. В этом случае

$$R_k^{1/2}g(t,\tau)\to 0,\quad R_k^{1/2}(t-\tau)^{1/2}\frac{\partial f^2}{\partial\tau}h(t,\tau)\to 0$$

$$R_k^{1/2}\frac{f^2(t,\tau)h(t,\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}\to\frac{\pi^{1/2}}{4}R|u(t)|\delta(t-\tau)$$

После подстановки в (2.19) получается формула (1.1) с точностью до члена $O(R^2\ln R)$.

Предельный переход $R\to 0$, $\alpha\to 0$ дает стоксовский режим обтекания. Тогда $f(t,\tau)\to 0$, $g(t,\tau)\to {}^2/_3$ и получаем формулу (1.2) с точностью до члена порядка R_k.

Таким образом, найдено выражение для силы, равномерно пригодное с точностью до членов $O[\max(R^2, R_k)]$ во всем диапазоне α.

Из результатов работы можно сделать вывод о взаимном влиянии нестационарных и инерционных эффектов.

Это проявляется в том, что силу сопротивления нельзя представить как сумму независимых поправок, пропорциональных соответственно поступательному и колебательному числам Рейнольдса. Она оказывается зависящей от $\alpha=R/R_k^{1/2}$. Это обусловлено наличием в задаче двух дополнительных кроме размера тела масштабов длины aR^{-1} и $aR_k^{-1/2}$ (см. разд. 2). Решение задачи определяется не только самими этими масштабами, но и их относительной величиной.

Наконец, остановимся на том, в каких временны́х интервалах пригодны полученные выражения. Как указывалось в разд. 2, начальный отрезок времени длительностью порядка R_k является особым, так как на нем нарушается малость слагаемого $R_k\partial v_i/\partial t$. Поэтому решение уравнений гидродинамики, построенное в работе, а вместе с ним выражение для силы справедливы при $t\gg R_kT$ (T — характерное время).

С другой стороны, заметим, что в начальный промежуток времени найденное решение, так же как и точное имеет порядок $o(R_k)$ (см. разд. 2). Следовательно, с точностью до членов порядка R_k разницей между ними можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Proudman I., Pearson J. R. A.* Expansions at small Reynolds numbers for the flow pasta sphere and a circular cylinder // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. № 3. P. 237–262.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
3. *Döhara Noriyoshi.* The unsteady flow around on oscillating sphere in aviscous fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1982. V. 51. № 12. P. 4095–4103.
4. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
5. *Авалишвили Л. И.* Фундаментальные решения линеаризованных уравнений нестационарного движения вязкой жидкости // Сообщ. АН ГССР. 1951. Т. 12. № 7. С. 397–400.

Москва

Поступила в редакцию
13.XI.1986