

УДК 533.6.11.8

О МАТРИЦЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ ГАЗА

БИШАЕВ А. М., РЫКОВ В. А.

В потоке газа, описываемом уравнениями Навье — Стокса, рассматривается медленное относительно среды движение теплопроводной частицы. Ее размер мал по сравнению с макроскопическим масштабом течения, поэтому создаваемое ей локальное возмущение газа описывается линейным уравнением Больцмана. Устанавливается система термодинамических потоков, отвечающая термодинамическим силам, и доказывается симметрия кинетических коэффициентов, образующих матрицу сопротивления.

1. Рассматривается нестационарный поток одноатомного газа. Течение происходит при малом числе Кнудсена $Kn = \lambda/D$, введенном по характерному макроскопическому масштабу D и длине свободного пробега λ . Макропараметры газа описываются уравнениями Навье — Стокса и функция распределения имеет вид

$$f = f_M \left\{ 1 - \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} v_j A(v^2) - \lambda \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right] \times \right. \\ \left. \times \left(v_i v_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} v^2 \right) B(v^2) \right\} / \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} + O(Kn^2) \quad (1.1)$$

$$f_M = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-v^2), \quad v_k = (\xi_k - U_k) / \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$$

Здесь $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$, $\lambda = (\pi r_0^2 n)^{-1/2}$ — локальная длина пробега, r_0 — характерный радиус действия межмолекулярных сил; $n(t, x_j)$, $U_i(t, x_j)$, $T(t, x_j)$ — плотность, компонента скорости и температура газа, t — время, x_j — пространственная координата. Функция $A(v^2)$ — решение уравнения

$$v_k (v^2 - 5/2) = -L[v_k A(v^2)]$$

удовлетворяющее условию

$$\int_0^\infty A(x) e^{-x^2} dx = 0$$

а $B(v^2)$ — решение уравнения

$$2(v_i v_j - 1/3 \delta_{ij} v^2) = -L[(v_i v_j - 1/3 \delta_{ij} v^2) B(v^2)]$$

Линейный оператор $L[\varphi]$ определен выражением [1]

$$L[\varphi] = \int (\varphi_1' + \varphi' - \varphi_1 - \varphi) g b db d\varepsilon d\omega, \\ d\omega_1 = \pi^{-3/2} \exp(-v_1^2) dv_1, \quad b = b'/r_0, \quad \varepsilon = \varepsilon'/\pi$$

В поток вносится твердая теплопроводная частица произвольной формы размером D_1 таким, что $\varepsilon = D_1/D \ll 1$. Тело движется в потоке со скоростью U_0 , мало отличающейся от местной скорости U основного потока, т. е. скорость движения частицы относительно газа $V = U_0 - U$ такова, что

$$\frac{V}{\xi_0} = \frac{|U_0 - U|}{\xi_0} \ll 1, \quad \xi_0 = \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2}$$

где T_0 — значение температуры невозмущенного потока в той точке, в которой в данный момент времени находится центр тяжести тела.

Оценка скорости V свободного движения частицы относительно разреженного потока получается из баланса силы инерции и силы сопротивления частицы в свободномолекулярном режиме

$$\frac{4}{3} \pi \left(\frac{D_1}{2} \right)^3 \rho_T \xi_0^2 \frac{1}{D} = \pi \left(\frac{D_1}{2} \right)^2 \rho_0 \xi_0 V \quad (1.2)$$

где ρ_T и ρ_0 — плотности тела и газа. Из (1.2) имеем $V/\xi_0 \sim \varepsilon \rho_T/\rho_0$. Принимая $V/\xi_0 \sim \eta(\varepsilon)$, имеем оценку для отношения плотностей тела и газа, которая обеспечивает медленное движение частицы относительно среды: $\rho_T/\rho_0 \sim \eta(\varepsilon)/\varepsilon$. Здесь $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, но $\eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow \infty$. В линейной теории мы будем сохранять величины порядка $\eta(\varepsilon)$ и ε , а величины $\eta^2(\varepsilon)$, $\varepsilon\eta(\varepsilon)$ и ε^2 опускать. Поэтому на функцию $\eta(\varepsilon)$ накладывается ограничение $\eta^2(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это условие выполняется, например, для $\eta = \varepsilon^\alpha$ и $1/2 < \alpha < 1$. Отметим, что в стационарном сдвиговом потоке ускорение газа вдоль линии тока равно нулю. В этом случае частица совершает относительно газа медленное движение при произвольном отношении ρ_T/ρ_0 .

Частица может вращаться с угловой скоростью Ω , по порядку величины равной завихренности основного потока, т. е. $\Omega = U/D \sim \xi_0/D$. Величина линейной скорости, возникающей при вращении частицы, будет равна $D_1\Omega = \varepsilon\xi_0$.

Создаваемое телом локальное возмущение в потоке описывается кинетическим уравнением Больцмана, так как в общем случае длина пробега молекул может быть сравнима с размером тела D_1 . Возмущенная область течения имеет размер порядка D_1 , поэтому в этом малом масштабе параметры основного потока меняются линейно. При медленном движении частицы относительно среды возмущение функции распределения основного потока оказывается малым и подчиняется линейному уравнению Больцмана. Проведем оценку членов в уравнении Больцмана и построим искомое линейное уравнение. Наряду с неподвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$ введем подвижную систему $Oy_1y_2y_3$, связанную с частицей и с началом отсчета, расположенным в центре инерции частицы. Возмущенную зону удобно рассматривать в системе $Oy_1y_2y_3$. Уравнение Больцмана в неинерциальной системе координат $Oy_1y_2y_3$ имеет вид [2]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial \eta_i} = J(f, f) \quad (1.3)$$

$$F_i = -\beta_{ji} \frac{dU_j^\circ}{dt} + 2\Omega_i \varepsilon_{ijl} \eta_j + \frac{d\Omega_i}{dt} \varepsilon_{ijl} y_j + \Omega_s \varepsilon_{smj} \Omega_s \varepsilon_{ijl} y_m;$$

$$i, j, m, l, s = 1, 2, 3$$

Связь между новыми переменными y, η и старыми x, ξ такова

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^\circ + \beta_{ij} y_j \\ \xi_i &= U_i^\circ + \beta_{ij} \eta_j + \Omega_i \varepsilon_{ijk} \beta_{lk} y_j \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\frac{dx_i^0}{dt} = U_i^0, \quad \frac{d\beta_{ij}}{dt} = \Omega_i \varepsilon_{ijk} \beta_{jk}$$

$$\beta_{jk} \beta_{jl} = \delta_{kl}, \quad \beta_{kj} \beta_{lj} = \delta_{kl}$$

где $\beta_{jk}(t)$ — компоненты ортогональной матрицы перехода от старого базиса к новому, ε_{ijk} — компоненты тензора Леви — Чевита.

Решение уравнения (1.3) ищем в виде

$$f = f_0(1 + \varepsilon \varphi(t, y, v)), \quad f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp(-v^2) \quad (1.5)$$

$$n_0 = n(t, x_0), \quad T_0 = T(t, x_0), \quad v_j = \eta_j / \xi_0$$

Подставим (1.5) в (1.3) и оценим величину членов в уравнении. Имеем

$$\frac{dU_i^0}{dt} = \frac{dU_i}{dt} + O(\eta(\varepsilon)) = -\frac{\xi_0^2}{2p_0} \frac{\partial p}{\partial x_i}(t, x_0) + O(\eta) + O(Kn)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = f_0 \left[\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dt} - \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dt} \left(\frac{3}{2} - v^2 \right) \right]$$

При помощи уравнений Эйлера выразим полные производные от плотности и температуры через пространственные производные. Получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{2}{3} v^2 \frac{\partial U_k}{\partial x_k} f_0 + O(Kn)$$

Введем безразмерные переменные

$$y_j = D_1 y'_j, \quad x_j = D x'_j, \quad U_j = U'_j \xi_0$$

$$t = \frac{t' D}{\xi_0}, \quad v_j = \frac{\eta_j}{\xi_0}, \quad \Omega_j = \frac{\Omega'_j \xi_0}{D}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\xi_0}{D} \left(\frac{d}{dt'} + \frac{t}{\xi_0} \frac{d\xi_0}{dt} \right)$$

Выбор масштаба времени основан на характерном времени изменения параметров внешней среды при движении частицы. Например, характерное время вращения частицы с угловой скоростью порядка завихренности потока равно D/ξ_0 . Штрихи у безразмерных переменных опустим. Соотношения (1.4) записываются в виде

$$x_i = x_i^0 + \varepsilon \beta_{ij} y_j, \quad \xi_i = U_i^0 + \beta_{ij} v_j + \varepsilon \Omega_i \varepsilon_{ijk} \beta_{jk} y_j$$

Учитывая оценки и отбрасывая в уравнении (1.3) члены порядка ε^2 , $\varepsilon \eta$ и εKn , получим искомое уравнение

$$v_j \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} - 2dv^2 - v_j e_j = \frac{1}{K} L(\varphi) \quad (1.6)$$

$$d = \frac{1}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k}(t, x_0), \quad e_j = \beta_{ij} \frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial x_i}(t, x_0), \quad K = \frac{\lambda_0}{D_1}$$

Здесь K — число Кнудсена, введенное по размеру частицы, $K = Kn/\varepsilon$.

Таким образом, возмущение функции распределения φ в системе координат, связанной с телом, удовлетворяет стационарному уравнению. Время t входит в (1.6) в виде параметра, от которого зависят величины d и e_j .

Условие непротекания на поверхности тела S_w в системе координат $Ox_1 x_2 x_3$ дает

$$\int (\xi_j - U_j^0 - \Omega_s \varepsilon_{sij} x_i) n_{jf} d\xi = 0, \quad x \in S_w$$

Перейдем к системе $Oy_1y_2y_3$ и воспользуемся представлением (1.5) для f . С точностью до членов порядка ε^2 получим

$$\int v_n \varphi d\omega = 0, \quad y \in S_w, \quad d\omega = \pi^{-3/2} \exp(-v^2) dv \quad (1.7)$$

Распределение температуры в теле определяется уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y_i} \right)$$

где $\kappa(y, T)$ — коэффициент теплопроводности. Характерное время установления температуры в теле $t_0 = D_1^2 / \kappa_0$. Если $D_1^2 / \kappa \ll D / \xi_0$, то распределение температуры описывается стационарным уравнением. Возмущение температуры τ вводится соотношением

$$T = T_0(1 + \varepsilon \tau(y))$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\kappa_0 \frac{\partial \tau}{\partial y_i} \right) = 0, \quad \kappa_0 = \kappa(y, T_0) \quad (1.8)$$

Граничное условие на поверхности тела S_w для функции φ [3] имеет вид

$$\gamma(v) = \int_{w_n < 0} \gamma(w) R(w, v) dw, \quad v_n > 0 \quad (1.9)$$

$$\gamma(v) = [\varphi(v) - \tau_w(v^2 - 5/2)] |v_n| e^{-v^2}, \quad \tau_w = \tau(y), \quad y \in S_w$$

Свойства ядра $R(w, v)$ описаны в [3]. На поверхности S_w ставится условие непрерывности нормальной составляющей потока энергии

$$\kappa_0 \frac{\partial \tau}{\partial n} = - \int v_n \left(v^2 - \frac{5}{2} \right) \varphi d\omega \quad (1.10)$$

Помимо граничных условий на поверхности тела для функции φ ставится асимптотическое граничное условие при $|y| \rightarrow \infty$. Это граничное условие возникает в результате сращивания внутреннего разложения (1.5) с внешним решением (1.1)

$$\begin{aligned} \varphi = & 2v_i S_i + 2y_k v_m \omega_i \varepsilon_{ikm} + y_i e_i + 2y_k v_k d + \left[y_i \left(v^2 - \frac{5}{2} \right) - K v_i A(v^2) \right] Q_i + \\ & + \left[\frac{1}{2} (y_i v_m + y_m v_i) - \frac{1}{3} \delta_{im} y_k v_k - \frac{1}{2} K B(v^2) \left(v_i v_m - \frac{1}{3} \delta_{im} v^2 \right) \right] \theta_{im} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\varepsilon S_b = \beta_{ji} (U_j(t, x_0) - U_{0j}), \quad \omega_i = 1/2 (\text{rot } U)_i - \Omega_i$$

$$Q_i = \beta_{ji} \frac{1}{T_0} \frac{\partial T}{\partial x_j} (t, x_0)$$

$$\theta_{lm} = \beta_{il} \beta_{jm} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right] (t, x_0)$$

Здесь εS_i — компоненты вектора скорости газа относительно частицы; ω_i — компоненты угловой скорости вращения газа относительно частицы; Q_i и θ_{lm} — компоненты градиента температуры и тензора скоростей деформаций. Все компоненты берутся в системе координат $Oy_1y_2y_3$.

Условие сращивания внутреннего и внешнего решений дает ограничение $\varepsilon \ll Kn \ll \varepsilon^{1/2}$. Подстановкой можно убедиться, что (1.11) есть решение уравнения (1.6).

2. Уравнения (1.6), (1.8) с условиями (1.7), (1.9), (1.10) и (1.11) описывают в линейном приближении возмущение, которое возникает при движении теплопроводного тела в поле градиентов. Этот случай является обобщением результатов [3], где рассматривалось движение теплопроводного тела в однородном потоке.

Параметры, входящие в поставленную задачу, образуют вектор с компонентами a_s , $s=1, \dots, 18$

$$a_1=\theta_{11}, a_2=\theta_{12}, a_3=\theta_{13}, a_4=\theta_{22}, a_5=\theta_{23}$$

$$a_{l+5}=Q_l, a_{l+8}=S_l, a_{l+11}=\omega_l, a_{15}=d$$

$$a_{l+15}=e_l, l=1, 2, 3$$

Из-за того, что тензор θ_{lm} является симметричным и бездивергентным, у него имеется только пять независимых компонент.

Функции φ и τ представим в виде

$$\varphi=\varphi_s a_s, \tau=\tau_s a_s$$

Уравнения, определяющие функции φ_{15+l} , τ_{15+l} при $l=1, 2, 3$, имеют вид

$$v_j \frac{\partial \varphi_{15+l}}{\partial y_j} - v_l = \frac{1}{K} L(\varphi_{15+l}), \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\kappa_0 \frac{\partial \tau_{15+l}}{\partial y_j} \right) = 0$$

Решением этих уравнений, удовлетворяющим всем граничным условиям, являются функции

$$\varphi_{15+l}=y_l, \tau_{15+l}=0 \quad (2.1)$$

Это решение описывает равновесное состояние газа и тела в постоянном силовом поле градиента давления. Поэтому параметры e_l не вызывают соответствующих им неравновесных термодинамических потоков, дающих вклад в производство энтропии. Оставшиеся параметры a_s при $s=1, \dots, 15$ являются термодинамическими силами, вызывающими в системе газ — тело термодинамические потоки. Определим систему термодинамических потоков b_s , отвечающих системе термодинамических сил a_s , и убедимся в симметричности кинетических коэффициентов, образующих матрицу сопротивления α_{js} [4]

$$b_j=\alpha_{js} a_s, j, s=1, \dots, 15$$

Исключим из функции φ найденное решение $\varphi_{15+l} e_l$

$$X=\varphi-\varphi_{15+l} e_l$$

Уравнение для функции X примет вид

$$v_j \frac{\partial X}{\partial y_j} - 2dv^2 = K^{-1} L(X)$$

Граничные условия на поверхности S_w для функции X имеют вид (1.7), (1.9) и (1.10), но с заменой φ на X . При $|y| \rightarrow \infty$ имеем

$$X=g_s a_s, s=1, \dots, 15$$

$$g_s = \frac{1}{2}(v_l y_m + v_m y_l) - \frac{1}{3} \delta_{lm} y_k v_k - \\ - \frac{1}{2} K B(v^2) (v_l v_m - \frac{1}{3} v^2 \delta_{lm})$$

$$s=l+m-\delta_{11}, m \geq l, m=1, 2, 3, l=1, 2,$$

$$g_s = y_l (v^2 - \frac{5}{2}) - K v_l A(v^2), s=5+l$$

$$g_s = 2v_l, s=8+l; g_s = 2v_m y_k \epsilon_{lkm}, s=11+l$$

$$g_{15}=2y_k v_k$$

Введем функцию h , положив

$$X = h + g_{15}a_{15}$$

Уравнение (2.1) примет вид

$$v_j \frac{\partial h}{\partial y_j} = \frac{1}{K} L(h) \quad (2.2)$$

Если имеется два решения уравнения (2.2) h и g , то аналогично [3] можно записать

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \int v_j(h, g) d\omega = 0 \quad (2.3)$$

Здесь введено обозначение $(h, g) = h^+g^- - g^+h^-$, где h^+ , h^- — четная и нечетная части функции h относительно v . Для функций g_k и g_s , $k, s = 1, \dots, 15$, и для произвольной поверхности S_R справедливо равенство

$$\int_{S_R} v_n(g_k, g_s) d\omega d\sigma = 0 \quad (2.4)$$

В этом легко убедиться непосредственным вычислением.

В качестве решений уравнения (2.2) возьмем функции $g = g_1, \dots, g_{15}$. Полагая в (2.3) $g = g_s$ при $s = 1, \dots, 14$, а $h = X - g_{15}a_{15}$ и интегрируя по скоростному и физическому пространствам, получим сохраняющиеся через произвольную поверхность S_R потоки

$$b_s = - \int \int_{S_w} v_n(X, g_s) d\omega d\sigma = \int \int_{S_R} v_n(X, g_s) d\omega d\sigma, \quad s \leq 14 \quad (2.5)$$

При выводе (2.5) использовано равенство (2.4). Потоки b_s при $s = 8+l$ и $s = 11+l$, $l = 1, 2, 3$, выражаются через величины, имеющие простой физический смысл

$$b_{s+l} = F_l - (-V_\tau e_l), \quad b_{11+l} = M_l - (-V_\tau y_{k0} e_i e_{lki})$$

Здесь F_l — сила воздействия газа на частицу, $-V_\tau e_l$ — равнодействующая сила от поля градиента, V_τ — объем частицы; M_l — момент сил, приложенных со стороны газа к телу, $-V_\tau y_{k0} e_i e_{lki}$ — момент, приложенный к частице от действия поля давления $e_k y_k$, y_{k0} — координаты центра тяжести однородного объема V_τ , они могут не совпадать с координатами центра тяжести частицы из-за ее возможной неоднородности.

Введенные величины b_s , $s \leq 14$, являются термодинамическими потоками, отвечающими термодинамическим силам a_s , $s \leq 14$.

Для того чтобы выяснить, что собой представляет термодинамический поток b_{15} , отвечающий параметру $a_{15} = d$, рассмотрим уравнения для функций X_{15} и τ_{15} в разложениях $X = X_s a_s$ и $\tau = \tau_s a_s$

$$v_j \frac{\partial X_{15}}{\partial y_j} - 2v^2 = L(X_{15}), \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\kappa_0 \frac{\partial \tau_{15}}{\partial y_j} \right) = 0, \quad y \in V_\tau \quad (2.6)$$

где $X_{15} = g_{15}$ при $|y| \rightarrow \infty$.

Граничные условия на S_w для функций X_{15} и τ_{15} такие же, как для функций X и τ .

Умножив (2.6) на функцию X_{15} и проинтегрировав по скоростному и физическому пространствам, получим уравнение для произведения энтропии. При этом необходимо воспользоваться соотношением $p_{ij}^{15} = \partial(y_i p_{ij}^{15}) / \partial y_j$, которое является следствием из уравнений $\partial p_{ij}^{15} / \partial y_j = 0$, где p_{ij}^{15} — тензор напряжений, отвечающий решению X_{15} . Вводя аналогично [3] производство энтропии на поверхности тела I_w , в газе I и в теле J ,

получим

$$-\int_{S_w} y_k p_{jk}^{15} n_j d\sigma = I_w + I + J \geq 0$$

Отсюда следует, что выражение

$$\alpha_{15,15} = -\int_{S_w} y_k p_{jk}^{15} n_j d\sigma = -\int \int_{S_w} v_n(X_{15}, g_{15}) d\omega d\sigma$$

есть термодинамический поток, отвечающий термодинамической силе $a_{15}=d=1$. Поэтому общее выражение для потока будет таким

$$b_{15} = -\int \int_{S_w} v_n(X, g_{15}) d\omega d\sigma \quad (2.7)$$

В отличие от потоков b_s при $s \leq 14$, поток b_{15} через произвольную поверхность S_R не сохраняется.

Таким образом, установлены все термодинамические потоки, отвечающие термодинамическим силам a_s , $s \leq 15$. Подставляя в выражения для потоков b_s (2.5) и (2.7) разложение функции $X=X_s a_s$, получим

$$b_s = \alpha_{sk} a_k$$

$$\alpha_{sk} = -\int \int_{S_w} v_n(X_k, g_s) d\omega d\sigma, \quad s, k=1, \dots, 15$$

Из (2.5) следует, что при $s \leq 14$, $k \leq 15$

$$\alpha_{sk} = \int \int_{S_R} v_n(X_k, g_s) d\omega d\sigma \quad (2.8)$$

3. Матрица $\|\alpha_{sk}\|$ разложения термодинамических потоков по термодинамическим силам называется матрицей сопротивления [4]. Докажем симметрию коэффициентов α_{sk} . Чтобы установить связь между коэффициентами, подставим в соотношение (2.3) функции h и g в виде

$$h = X_s - g_{15} \delta_{s,15}, \quad g = X_k - g_{15} \delta_{k,15}, \quad d=1$$

Получим

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \int v_j(X_s, X_k) d\omega = \frac{\partial}{\partial y_j} \int v_j(X_s, g_{15}) d\omega \delta_{k,15} - \frac{\partial}{\partial y_j} \int v_j(X_k, g_{15}) d\omega \delta_{s,15}$$

Интегрируя по объему между поверхностями S_w и S_R , находим

$$\begin{aligned} \int \int_{S_w} v_n(X_s, X_k) d\omega d\sigma + \int \int_{S_R} v_n(X_s, X_k) d\omega d\sigma &= \alpha_{15,k} \delta_{15,s} - \alpha_{15,s} \delta_{15,k} + \\ &+ \int \int_{S_R} v_n(X_s, g_{15}) d\omega d\sigma \delta_{15,k} - \int \int_{S_R} v_n(X_k, g_{15}) d\omega d\sigma \delta_{15,s} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Интеграл по поверхности S_w равен нулю [3]. Преобразуем интеграл

$$D = \int \int_{S_R} v_n(X_s, X_k) d\omega d\sigma$$

Положим $X_s = \psi_s + g_s$, $X_k = \psi_k + g_k$, где $\psi_k \rightarrow 0$, $\psi_s \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$. Тогда

$$D = \int \int_{S_R} v_n(\psi_s, \psi_k) d\omega d\sigma - \int \int_{S_R} v_n(X_k, g_s) d\omega d\sigma + \int \int_{S_R} v_n(X_s, g_k) d\omega d\sigma$$

При этом было использовано (2.4). Равенство (3.1) примет вид

$$\begin{aligned} \int \int_{S_R} v_n(\psi_s, \psi_k) d\omega d\sigma = & \alpha_{15,k} \delta_{15,s} - \alpha_{15,s} \delta_{15,k} + \int \int_{S_R} v_n(X_k, g_s) d\omega d\sigma - \\ & - \int \int_{S_R} v_n(X_s, g_k) d\omega d\sigma + \int \int_{S_R} v_n(X_s, g_{15}) d\omega d\sigma \delta_{15,k} - \int \int_{S_R} v_n(X_k, g_{15}) d\omega d\sigma \delta_{15,s} \end{aligned} \quad (3.2)$$

При удалении поверхности S_k на бесконечность

$$\int \int_{S_R} v_n(\psi_s, \psi_k) d\omega d\sigma \rightarrow 0$$

В результате (3.2) переходит в предельное равенство, которое имеет различный вид в зависимости от s и k . Пусть $s \leq 14$, $k \leq 14$, тогда, используя (2.8), из (3.2) имеем $\alpha_{sk} = \alpha_{ks}$. При $s < 15$, $k = 15$ находим $\alpha_{s,15} = \alpha_{15,s}$.

Таким образом, получаем

$$\alpha_{sk} = \alpha_{ks}, \quad k, s = 1, \dots, 15$$

Матрица $\|\beta_{sk}\|$, обратная к матрице $\|\alpha_{sk}\|$, называется матрицей подвижности [4]. Она позволяет выразить термодинамические силы через термодинамические потоки

$$a_s = \beta_{sk} b_k$$

Матрица, обратная симметричной, также симметрична, поэтому

$$\beta_{sk} = \beta_{ks}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. Галкин В. С., Носик В. И. Кинетическая теория и принцип материальной независимости от системы отсчета в механике сплошных сред // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 563–571.
3. Бишаев А. М., Рыков В. А. О соотношениях симметрии Онзагера в линейной задаче обтекания теплопроводного тела разреженным газом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 140–146.
4. Jeffrey D. J., Onishi Y. Calculation of the resistance and mobility function for two unequal rigid spheres in low-Reynolds-number flow // J. Fluid Mech. 1984. V. 139. P. 261–290.

Москва

Поступила в редакцию
27.II.1987