

УДК 532.595

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ИМЕЮЩЕЙ ВНУТРИ МАЯТНИК

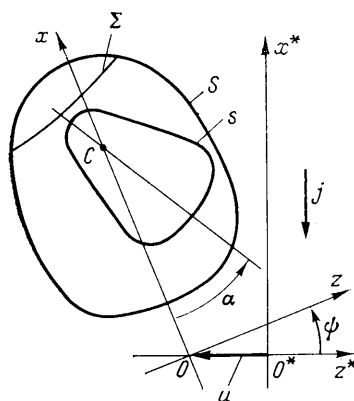
БУЖИНСКИЙ В. А., СТОЛБЦЕВ В. И.

Имеется большое число работ, посвященных определению инерционных и диссипативных гидродинамических характеристик полостей, частично заполненных жидкостью [1–6]. Наибольший практический интерес представляют коэффициенты, связанные с основным тоном колебаний жидкости. Для некоторых гладких полостей значения этих коэффициентов (или часть их) могут быть получены с точностью 1–3% без решения краевых задач, если известно значение частоты колебаний жидкости по основному тону [6]. Диссипативные характеристики, связанные с колебаниями полости и жидкости при больших числах Рейнольдса, определялись в [2, 4]. В [7–10] определялись диссипативные и инерционные характеристики эллипсоидов, сфер и стержней, колеблющихся в ограниченных объемах вязкой жидкости.

Ниже приводятся уравнения малых колебаний полости с вязкой жидкостью, имеющей внутри маятник, и на основе систематического применения метода конечных элементов (МКЭ) определяются диссипативные и инерционные коэффициенты. Для уточнения значений этих коэффициентов предлагается использовать нелинейное преобразование Шенкса. Это позволяет достигать требуемой точности при существенно меньших затратах машинного времени и оперативной памяти. При отсутствии в полости маятника и наличии кольцевых ребер изучены особенности инерционных гидродинамических характеристик, связанных с идеальной жидкостью. Показано, что из-за наличия колец оценка [6] для обобщенной массы основного тона колебаний жидкости становится неточной и должна быть видоизменена.

**1. Уравнения движения полости с жидкостью, имеющей внутри маятник.** Задача о движении тела с полостями, частично или полностью заполненными вязкой жидкостью, с помощью асимптотических методов эффективно решена в [4]. Рассмотрим малые колебания тела с полостью вращения, частично заполненной вязкой жидкостью и имеющей внутри физический маятник, при больших числах Рейнольдса.

Обозначим через  $S$ ,  $s$  и  $\Sigma$  смоченную поверхность полости, смоченную поверхность маятника и свободную поверхность жидкости соответственно (фиг. 1). Введем «абсолютную» систему координат  $x^*y^*z^*$ . Будем характеризовать возмущенное движение полости положением связанной с ней системы координат  $xuz$  в системе координат  $x^*y^*z^*$ . В силу осевой симметрии задачи ограничимся рассмотрением движения полости и маятника в плоскости  $x^*z^*$ . В качестве координат, характеризующих возмущенное движение системы, выберем угол  $\psi$  между осями  $x^*$  и  $x$ , смещение  $u=O^*O$  и угол  $\alpha$  отклонения маятника в связанной системе координат.



Фиг. 1

Для определения скорости  $v$  и давления  $p$  в несжимаемой жидкости

необходимо решить краевую задачу

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{j} = -j \mathbf{e}_x, \quad (x, y, z) \in Q \quad (1.1)$$

$$\mathbf{v}|_s = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}|_s = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_y \dot{\psi}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{e}_y \dot{\alpha}$$

где  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  — радиусы-векторы относительно точки  $O$  и точки подвеса маятника  $C$  соответственно,  $Q$  — объём, занятый жидкостью,  $\nu$  — кинематическая вязкость, а точкой здесь и ниже обозначается дифференцирование по времени.

Ко второму из условий (1.1) необходимо добавить условие непрерывности тензора напряжений при переходе из жидкости в находящийся над ней газ [11].

Обозначим через  $\Psi$ ,  $A$  и  $\varphi_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) порождающие потенциалы, соответствующие идеальной жидкости [2], когда можно ввести потенциал скоростей  $\chi$

$$\chi = uz + \omega \Psi + \omega_1 A + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \varphi_n, \quad \mathbf{v} = \nabla \chi \quad (1.2)$$

$$\Delta \Psi = \Delta A = \Delta \varphi_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}} \right|_{s+s} = (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \mathbf{e}_y = z v_x - x v_z, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}} \right|_z = 0, \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \mathbf{v}} \right|_s = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \mathbf{e}_y = z v_x - (x - h_c) v_z, \quad \left. \frac{\partial A}{\partial \mathbf{v}} \right|_{s+z} = 0, \quad h_c = OC \quad (1.4)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{v}} \right|_z = \frac{\omega_n^2}{j} \varphi_n = \psi_n, \quad \left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{v}} \right|_{s+s} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1.5)$$

Здесь  $r_n$  — обобщённые координаты, характеризующие отклонение возмущённой свободной поверхности жидкости относительно «плавающей» крышки [2].

При больших числах Рейнольдса в приближении погранслоя скорость жидкости  $\mathbf{v}$  кроме потенциальных составляющих (1.2) содержит составляющие типа погранслоя, выравнивающие тангенциальные скорости жидкости и твердых стенок вблизи последних [2, 4, 11], и корректирующие потенциальные составляющие  $\sim \nu^{1/2}$ , обусловленные ускорением жидкости на границах погранслоёв в тангенциальном направлении [4].

Общие уравнения, описывающие возмущённое движение полости, частично заполненной вязкой жидкостью, имеющей свободную поверхность, получены в [2, 4]. Уравнения малых угловых и поступательных колебаний тела в ограниченных объёмах вязкой жидкости рассматривались в [7, 8]. Вывод уравнений возмущённого движения в рассматриваемом случае принципиально не отличается от вывода уравнений в работе [4].

Введём оператор  $T$  в соответствии с формулой [4]

$$T(y) = \int_{-\infty}^t \frac{y'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad y'(\tau) = dy/d\tau \quad (1.6)$$

Выпишем уравнения, описывающие малые колебания системы тело — маятник — жидкость

$$(m^0 + m) u'' - (L^0 + L + \Omega_y) \psi'' + L_{u\alpha} \alpha'' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r_n'' = F_z \quad (1.7)$$

$$(I_{yy}^{\circ} + I_{yy})\psi'' - (L^{\circ} + L + \Omega_y)u'' + I_{\psi\alpha}\alpha'' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}r_n'' +$$

$$+ \rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} \frac{d}{dt} \left( I_{\psi}T(\psi) + I_{\psi\alpha}T(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{\psi r_n}T(r_n) \right) = M_y \quad (1.8)$$

$$(I_{0\alpha} + I_{\alpha})\alpha'' + I_{\psi\alpha}\psi'' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{c0n}r_n'' + L_{u\alpha}u'' +$$

$$+ \rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} \frac{d}{dt} \left( I_{\alpha}T(\alpha) + I_{\psi\alpha}T(\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{\alpha r_n}T(r_n) \right) = M_{\alpha} \quad (1.9)$$

$$\mu_n(r_n'' + \omega_n^2 r_n) + \lambda_n u'' + \lambda_{0n} \psi'' + \lambda_{c0n} \alpha'' + \rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} \frac{d}{dt} (I_{\psi r_n}T(\psi) +$$

$$+ I_{\alpha r_n}T(\alpha) + I_{r_n}T(r_n)) = 0 \quad (1.10)$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $m^{\circ}$ ,  $m$  — масса тела и жидкости соответственно;  $L^{\circ}$ ,  $L$  — статические моменты твердого тела и «затвердевшей» жидкости относительно плоскости  $yz$ ;  $\Omega_y$  — экваториальный момент инерции относительно соответствующей центральной оси, параллельной оси  $y$ ;  $J_{yy}^{\circ}$ ,  $J_{0\alpha}$  — моменты инерции твердого тела и маятника относительно осей  $y$ ,  $Cy$  соответственно.

В уравнениях (1.8), (1.9) позиционные члены, пропорциональные  $j\psi$ ,  $j\alpha$ , отнесены к их правым частям, поскольку они не зависят от решения краевых задач (1.3), (1.4) и не представляют интереса в рассматриваемой задаче.

Выражения для определения коэффициентов при инерционных членах хорошо известны

$$L_{u\alpha} = \rho \int_Q \nabla z \nabla A \, dQ, \quad I_{yy} = \rho \int_Q \nabla \Psi \nabla \Psi \, dQ, \quad I_{\alpha} = \rho \int_Q \nabla A \nabla A \, dQ$$

$$I_{\psi\alpha} = \rho \int_Q \nabla \Psi \nabla A \, dQ, \quad \lambda_n = \rho \int_Q \nabla z \nabla \varphi_n \, dQ$$

$$\lambda_{0n} = \rho \int_Q \nabla \Psi \nabla \varphi_n \, dQ, \quad \lambda_{c0n} = \rho \int_Q \nabla \varphi_n \nabla A \, dQ \quad (1.11)$$

Коэффициенты  $I_{\psi}$ ,  $I_{\psi\alpha}$ , ..., стоящие при членах, зависящих от вязкости, выражаются через порождающие потенциалы [2, 4, 7, 8]

$$I_{\psi} = \int_{S+s} (\nabla \Psi - \mathbf{e}_y \times \mathbf{R})^2 \, dS, \quad I_{\alpha} = \int_s (\nabla A - \mathbf{e}_y \times \mathbf{r})^2 \, dS + \int_s \nabla A \nabla A \, dS$$

$$I_{\psi\alpha} = \int_s (\nabla \Psi - \mathbf{e}_y \times \mathbf{R}) \nabla A \, dS + \int_s (\nabla \Psi - \mathbf{e}_y \times \mathbf{R}) (\nabla A - \mathbf{e}_y \times \mathbf{r}) \, dS$$

$$I_{r_n} = \int_{S+s} \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n \, dS, \quad I_{\psi r_n} = \int_{S+s} (\nabla \Psi - \mathbf{e}_y \times \mathbf{R}) \nabla \varphi_n \, dS \quad (1.12)$$

$$I_{\alpha r n} = \int (\nabla A - \mathbf{e}_y \times \mathbf{r}) \nabla \varphi_n dS + \int \nabla A \nabla \varphi_n dS$$

В уравнениях (1.7)–(1.10) будем учитывать лишь один основной тон колебаний жидкости, как обычно это делается в прикладных задачах [2, 14] (возможное исключение рассмотрено ниже в разд. 3). Проведём также упрощение уравнений (1.7)–(1.10) применительно к наиболее актуальному для практики случаю квазигармонических колебаний с медленно меняющимися амплитудами и с доминирующей гармоникой (частота  $\omega_0$ ). С этой целью используем упрощенное выражение оператора (1.6), когда  $y(\tau)$  — гармоническая функция. При этом пренебрежём инерционными добавками, пропорциональными  $v^{1/2}$ , и учтём лишь диссипативные слагаемые [2]. В результате получим окончательные уравнения

$$\begin{aligned} (m^\circ + m) \ddot{u} - (L^\circ + L + \Omega_y) \ddot{\psi} + L_{u\alpha} \ddot{\alpha} + \lambda_1 r_1 \ddot{\alpha} &= F_z \\ (J_{yy}^\circ + J_{yy}) \ddot{\psi} - (L^\circ + L + \Omega_y) \ddot{u} + J_{\psi\alpha} \ddot{\alpha} + \lambda_{01} r_1 \ddot{\alpha} + \\ &+ \beta_\psi \dot{\psi} + \beta_{\psi\alpha} \dot{\alpha} + \beta_{\psi r} \dot{r}_1 = M_y \\ (J_{0\alpha} + J_\alpha) \ddot{\alpha} + J_{\psi\alpha} \ddot{\psi} + L_{u\alpha} \ddot{u} + \lambda_{c01} r_1 \ddot{\alpha} + \beta_\alpha \dot{\alpha} + \beta_{\psi\alpha} \dot{\psi} + \beta_{\alpha r} \dot{r}_1 &= M_\alpha \\ \mu_1 (r_1 \ddot{\alpha} + \omega_1^2 r_1) + \lambda_1 \ddot{u} + \lambda_{01} \ddot{\psi} + \lambda_{c01} \ddot{\alpha} + \beta_r \dot{r}_1 + \beta_{\psi r} \dot{\psi} + \beta_{\alpha r} \dot{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

где элементы симметричной матрицы диссипации определяются формулами

$$\begin{aligned} \beta_\psi &= \beta I_\psi, \quad \beta_{\psi\alpha} = \beta I_{\psi\alpha}, \quad \beta_{\psi r} = \beta I_{\psi r_1} \\ \beta_\alpha &= \beta I_\alpha, \quad \beta_{\alpha r} = \beta I_{\alpha r}, \quad \beta_r = \beta I_{r_1} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$\delta = (2\nu/\omega_0)^{1/2}$  — глубина проникновения вихревого движения [11],  $\beta = \rho\omega_0\delta/2$ .

При вычислениях инерционных коэффициентов уравнений (1.13) обычно определяют  $J = J_{yy}$ ,  $\lambda_1 = R_c \omega_1^2 / j$  и инвариантные (не зависящие от нормировки  $\varphi_n$ ) параметры  $m_1$ ,  $c_1$

$$m_1 = \lambda_1^2 / (\mu_1 \rho R_c^3), \quad c_1 = -\lambda_{01} / (\lambda_1 R_c)$$

где  $R_c$  — характерный размер задачи [2].

**2. Определение гидродинамических характеристик для гладких полостей методом конечных элементов.** Определению гидродинамических характеристик полостей (в основном инерционных) посвящено весьма большое число работ [1–5]. В подавляющем большинстве случаев, когда невозможно получить аналитическое решение краевых задач (1.3)–(1.5), используются приближенные методы, в частности вариационные с применением метода Ритца [1–3]. В [3] изложен алгоритм расчета инерционных гидродинамических характеристик для полостей вращения, основанный на применении метода Трефтца с привлечением в качестве координатных функций сферических и цилиндрических функций. Тем не менее следует отметить, что проблема выбора координатных функций остается острой [1, 3], поскольку в каждом конкретном случае этот выбор осуществляется заново. Так, для получения достоверных значений присоединенных масс и коэффициентов демпфирования для вытянутых эллипсоидов, совершающих колебания в цилиндрических полостях, приходится к сферически координатным функциям добавлять потенциалы, соответствующие безграничной жидкости [7, 8]. Трудности, связанные с выбором координатных функций, устраняются при использовании метода конечных элементов. Изложим некоторые результаты его применения для определения диссипативных и инерционных гидродинамических характеристик полостей.

Рассмотрим случай, когда порождающие потенциалы можно записать в виде

$$\Psi = \Omega(x, \rho) \sin \theta, \quad \varphi_1 = \Phi(x, \rho) \sin \theta, \quad A = B(x, \rho) \sin \theta$$

где  $x$ ,  $\rho$ ,  $\theta$  — цилиндрические координаты;  $\Omega$ ,  $\Phi$ ,  $B$  — функции, отыскиваемые в меридиональном сечении полости  $S_0$ .

Используя метод Ритца, вместо решения краевых задач (1.3)–(1.5) будем искать стационарные значения функционалов

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_Q (\nabla \varphi_1)^2 dQ - \frac{\omega^2}{2} \int_S \varphi_1^2 dS, \quad (2.1)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_q (\nabla \Psi)^2 dQ - \int_{s+s} \Psi (z v_x - x v_z) dS$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_q (\nabla A)^2 dQ - \int_s (A (z v_x - x v_z) + h_c v_z) dS$$

Проведя триангуляцию области  $S_0$  и положив

$$\Phi = \sum_k \Phi_k f_k, \quad \Omega = \sum_k \Omega_k f_k, \quad B = \sum_k B_k f_k$$

возьмём в качестве координатных функций  $f_k$  линейные функции, равные 1 в  $k$ -м узле треугольника и нулю в соседних с ним узлах. Для  $i$ -го треугольника с номерами узлов  $p, q, r$  запишем  $\Phi = \alpha + \beta \rho^* + \gamma x^*$ , где  $\rho^*, x^*$  — локальные координаты относительно его центра масс;  $\alpha, \beta, \gamma$  — неизвестные постоянные. Матрица масс  $i$ -го элемента представляется в виде

$$M_i = (K_1^{-1})^T I_1 K_1^{-1}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_p^* & x_p^* \\ 1 & \rho_q^* & x_q^* \\ 1 & \rho_r^* & x_r^* \end{bmatrix}, \quad I_1 = \pi \int_{S_{0i}} \begin{bmatrix} 1/\rho^2 & \rho^*/\rho^2 & x^*/\rho^2 \\ \rho^*/\rho^2 & 1 + \rho^{*2}/\rho^2 & x^*\rho^*/\rho^2 \\ x^*/\rho^2 & x^*\rho^*/\rho^2 & 1 + x^{*2}/\rho^2 \end{bmatrix} \rho d\rho dx$$

где  $S_{0i}$  — площадь элемента. На линии  $C_\Sigma$ , образованной пересечением  $\Sigma$  и  $S_0$ , расположены линейные элементы, внутри которых принимается  $\Phi = \alpha + \beta \rho^*$ , причём для новых неизвестных постоянных  $\alpha, \beta$  и новой локальной координаты  $\rho^*$  относительно центра линейного элемента использованы прежние обозначения. Матрица «жёсткости»  $j$ -го элемента представляется в виде

$$K_j = (K_2^{-1})^T I_2 K_2^{-1}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_p^* \\ 1 & \rho_q^* \end{bmatrix}, \quad I_2 = \pi \int_l \begin{bmatrix} 1 & \rho^* \\ \rho^* & \rho^{*2} \end{bmatrix} \rho d\rho$$

где  $p, q$  — номера узлов элемента,  $l$  — его длина. Аналогично формируется вектор «нагрузки»  $b_i = K_1^{-1} I_3$

$$I_3 = \pi \int_l [\rho(\rho v_x - x v_\rho), \rho \rho^*(\rho v_x - x v_\rho), \rho x^*(\rho v_x - x v_\rho)]^T dl$$

Функционалы (2.1) могут быть подсчитаны путём суммирования вкладов отдельных элементов. В результате их варьирования получим конечно-элементную аппроксимацию краевых задач (1.3) — (1.5)

$$M\Omega = b_\Omega, \quad MB = b_B, \quad (M - \omega^2 \Pi)\Phi = 0 \quad (2.2)$$

где  $M$  и  $\Pi$  — глобальные матрицы масс и «жёсткости»;  $b_\Omega, b_B$  — глобальные векторы «нагрузок», а  $i$ -е компоненты векторов  $\Omega, B, \Phi$  — это значения функций  $\Omega, B, \Phi$  в соответствующем узле.

Заметим, что векторы  $b_\Omega$  и  $b_B$  имеют отличные от нуля компоненты лишь для узлов, принадлежащих поверхностям  $S^+s$  и  $s$  соответственно.

Решив (2.2), получим векторы  $\Omega, B$ , а также частоты и формы собственных колебаний жидкости.

Были разработаны два варианта Фортран-программ применительно к ЕС ЭЦВМ, рассчитанных на размещение всех массивов только в оперативную память и предназначенных для определения гидродинамических характеристик гладких полостей и полостей с кольцевыми и продольными ребрами. Варианты программ различались главным образом способом разбиения  $S_0$  на конечные элементы и наличием или отсутствием блока определения диссипативных характеристик. В первом варианте было исполь-

зовано разработанное автоматизированное разбиение  $S_0$  на КЭ по слоям (по оси  $x$ ). Как показал анализ результатов расчета, этот вариант разбиения оказался приемлемым при решении как однородной задачи (2.2) (необходимо сгущение конечно-элементной сетки вблизи  $\Sigma$ ), так и неоднородных задач (2.2), когда желательно достаточно равномерное разбиение области. При этом разбиение на КЭ, как и сама программа, было рассчитано на произвольную область  $S_0$ , ограниченную произвольными непрерывными кривыми, не имеющими острых углов, в окрестности которых концепция колеблющегося погранслоя становится неприменимой [4, 11].

При решении задач (2.2) использовалась библиотека стандартных программ [13].

Для решения однородной задачи (2.2), в которой порядки матриц  $M$  и  $\Pi$  очень сильно различаются, был использован метод блочно-степенной итерации [12]. Благодаря малой размерности  $\Pi$  точное решение этой задачи получалось всего при одной итерации.

После решения задач (2.2) основные гидродинамические характеристики полости находились посредством квадратур (1.11)–(1.12).

Как показали массовые расчеты, для достижения точности в определении основных коэффициентов, равной 0,1–1,5%, для большинства полостей, встречающихся на практике, достаточно взять не более 10–30 слоев по координате  $x$ . При этом время определения всего комплекса гидродинамических характеристик колеблется от нескольких до десятков секунд (ЭВМ ЕС-1060). В ряде случаев (например, для сильно вытянутых торов при малых глубинах жидкости) можно получить два достоверных знака в значениях коэффициентов всего при 6–8 КЭ.

Второй вариант программы предусматривает определение динамических характеристик для ряда конечно-элементных сеток, геометрически подобных для прямолинейных и близких к ним криволинейных границ области. Это позволяет уточнить численные результаты путем применения к ряду полученных значений определяемых величин нелинейного преобразования Шенкса [15].

Проиллюстрируем эффективность этого преобразования на примере определения присоединенного момента инерции единичного слоя жидкости в прямой цилиндрической полости с сечением в виде правильного треугольника, стороны которого равны 2. Известно точное значение  $I = \frac{2}{5}\sqrt{3} \approx 0,23094$ , полученное Н. Е. Жуковским. При разбиении трети треугольника на 8, 32, 128 и 512 элементов находим ряд приближений 0,16239; 0,21314; 0,22646 и 0,22982 соответственно. Применяв преобразование Шенкса к первым трем членам этого ряда, получим  $I = 0,23120$ , что точнее значения присоединенного момента инерции жидкости при большем в 4 раза числе элементов. Применяя преобразование Шенкса к трем последним членам ряда, получаем  $I = 0,23095$ .

Вычисленные значения гидродинамических коэффициентов для полостей в форме сфер, конусов, соосных цилиндров, торов и их различных комбинаций хорошо согласуются с известными результатами, полученными в основном для значений инерционных коэффициентов методом Трефтца [2].

Известно, что методом Трефтца трудно надежно определить высшие собственные частоты  $\chi_n$  [1]. В [5] предложен метод корректирующих функций, позволяющий весьма точно вычислять все собственные частоты. В качестве примера приведем сравнение значений  $\chi_n$  ( $n=1, 2, 3$ ), полученных с помощью МКЭ и метода корректирующих функций [5] для сферической полости с глубиной жидкости, равной 1,5 ее радиуса (см. ниже).

Число элементов	44	176	804	Работа [5]
1-й тон	2,403	2,373	2,366	2,363
2-й тон	7,721	6,690	6,453	6,364
3-й тон	16,92	11,59	10,44	10,04

Из таблицы видна также сходимость МКЭ. Применение преобразования Шенкса дает следующие значения собственных частот: 2,362; 6,382; 10,12.

Сравнение вычисленных с помощью МКЭ значений гидродинамических коэффициентов, образующих диссипативную матрицу (1.14), с известными значениями этих коэффициентов, полученными в основном для тех полостей, для которых известны аналитические решения (цилиндр, сфера, конус с углом  $\pi/2$ ) [2, 4], показало совпадение этих значений с точностью до 3 значащих цифр (при использовании 500–1000 КЭ).

В частности, был определен комплекс гидродинамических коэффициентов для полости в форме кругового цилиндра и расположенного в нем по центру эллипсоида вращения с отношением полуосей, равным 0,169; 0,333; 0,666 [7, 8].

Отметим, что величины присоединенных моментов инерции эллипсоидов, а также коэффициенты демпфирования совпали с точностью 1–2% с соответствующими расчетными значениями работы [8], которые в этой работе были подтверждены экспериментально.

Был определен весь комплекс гидродинамических коэффициентов для полости, образованной плоским дном и двумя круговыми цилиндрами (радиусы  $l$  и  $\delta_0 < 1$ ),

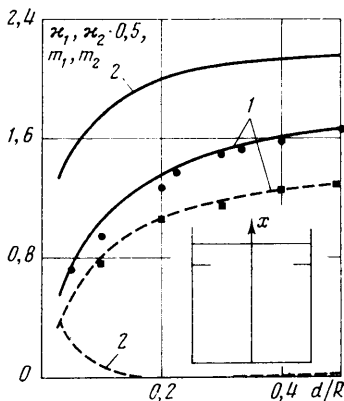
$h$	$\omega_1^2$	$m_1$	$J_\alpha$	$\lambda_{c01}^2/\mu_1$
0,50	0,799	0,574	0,370	0,255
0,75	1,04	0,745	0,394	0,215
1,00	1,18	0,848	0,359	0,132
1,25	1,20	0,870	0,322	0,0654
1,50	1,32	0,982	0,299	0,0284
1,60	1,48	1,14	0,293	0,0193
2,00	1,75	1,37	0,285	0,00438
3,50	1,84	1,43	0,283	0,0000

причем внутренний цилиндр ограничен на высоте  $h=1$  полусферой радиуса  $\delta_0$ . Приведем таблицу значений некоторых коэффициентов для случая, когда ось колебаний внутреннего цилиндра (маятника) расположена на расстоянии  $h=1$  от дна. Глубина жидкости меняется от 1 (соосный цилиндр) до 3,5. Как видно из таблицы, значение  $\omega_1^2$  при этом меняется от 1,18 до 1,84. Последнее значение соответствует глубиной жидкости в круговом цилиндре. Вычисленные значения  $m_1$  при этом с точностью 1–3% соответствуют оценке  $m_1 = \omega_1^2 \Omega_y$  [6]. При увеличении глубины жидкости присоединенный момент инерции маятника монотонно уменьшается (что соответствует оценке  $J_\alpha$  работы [8]), стремясь к своему асимптотическому значению 0,283. Инерционный коэффициент  $\lambda_{c01}^2/\mu_1$ , характеризующий влияние колебаний маятника на колебания жидкости по основному тону, резко уменьшается с увеличением толщины слоя  $h_p$  жидкости над вершиной маятника. Этим влиянием можно пренебречь, если  $h_p \gg \delta_0$ . Все прочие коэффициенты (включая диссипативные) весьма близки к значениям либо для кругового цилиндра ( $h=3,5$ ), либо для полости, образованной соосными цилиндрами ( $h \leq 1,0$ ).

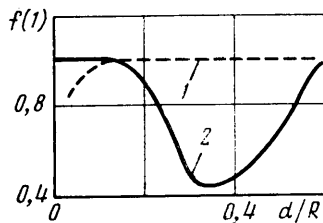
**3. Исследование влияния кольцевых ребер на инерционные гидродинамические характеристики.** Важное практическое значение имеет определение гидродинамических характеристик для полостей вращения с кольцевыми ребрами-перегородками [2, 14]. Такие перегородки бывают прямыми или коническими; часто они устанавливаются для ограничения подвижности жидкости. Поскольку влияние маятника на инерционные гидродинамические характеристики в данном случае не представляет основного интереса, хотя и может быть учтено, как это описано выше, ниже ограничимся рассмотрением полостей без маятника.

В рамках концепции потенциального движения жидкости скорость ее на острых кромках перегородок получается бесконечной. Поэтому определение диссипативных коэффициентов на основе теории пограничного слоя становится невозможным. С острых кромок происходит срыв пограничного слоя с образованием крупномасштабных вихрей. Тем не менее при малых амплитудах колебаний жидкости инерционные гидродинамические коэффициенты могут быть определены с достаточной для практики точностью [2, 14].

Особенность применения МКЭ в данном случае связана с тем, что области меридионального сечения полостей содержат разрезы, так как перегородки удобно принять бесконечно тонкими. Был разработан вариант Фортран-программы, позволивший преодолеть обусловленные этим труд-



Фиг. 2



Фиг. 3

ности. На линии разреза вводились двойные узлы конечно-элементной сетки, имеющие одинаковые координаты. Считалось, что один из этих узлов принадлежит элементу, лежащему по одну сторону от перегородки, другой — расположенному по другую ее сторону. Вершина разреза имела один узел. Для повышения точности решения приходится использовать неравномерную сетку, сгущающуюся к вершине разреза. Триангуляция области получалась из первоначально заданной весьма грубой неравномерной сетки путем неоднократного автоматического ее измельчения, причем решение определялось для каждой сетки, что позволяло проследить его сходимость.

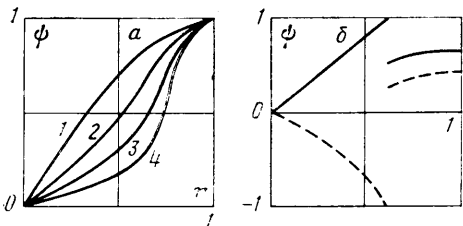
Рассмотрим особенности колебаний жидкости в полостях с поперечными перегородками, выявленные из анализа результатов расчетов, полученных с использованием разработанной программы. В качестве первого примера приведем результаты для полости в форме прямого кругового цилиндра радиуса  $R$  с плоским дном при наличии в нем прямого кольцевого ребра (фиг. 2). Исследовано влияние глубины утопления ребра, ширина которого  $b/R=0,3$ , на величины гидродинамических коэффициентов при постоянной высоте жидкости в полости  $H/R=1,7$ . На фигуре представлены результаты определения безразмерных частотных параметров  $\kappa_1, \kappa_2$  (сплошные линии) и масс  $m_1, m_2$  эквивалентных осцилляторов (штриховые линии) для двух низших тонов колебаний (кривые 1 — первый тон, кривые 2 — второй тон). Из приведенных на фигуре данных видно, что имеется удовлетворительное согласование с экспериментальными результатами [14], показанными темными точками и квадратиками. Отметим, что собственные частоты и эквивалентные массы довольно сильно зависят от глубины утопления ребра. С уменьшением  $d$  влияние второго тона колебаний увеличивается (возрастает величина  $m_2$  и уменьшается величина  $m_1$ ).

Введем для удобства дальнейшего изложения функцию  $f(k)$  целочисленного аргумента следующим образом:

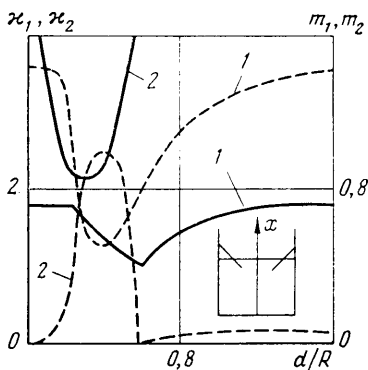
$$f(k) = \sum_{n=1}^k \frac{m_n}{\Omega_y \kappa_n}, \quad \Omega_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{\kappa_n} \quad (3.1)$$

Полагая приближенно  $f(1)=1$ , получают по известному значению  $\kappa_1$  весьма эффективную оценку  $m_1$ , погрешность которой для многих полостей не превышает 1–3% [6]. Рассмотрим возможность применения этой оценки в данном случае. На фиг. 3 показана зависимость  $f(1)$  от глубины утопления ребра (кривая 1). При  $d/R \geq 0,1$  погрешность оценки составляет не более 3%, при  $d/R=0,05$ —9%, а при  $d/R=0,03$ —15%. Полагая





Фиг. 4



Фиг. 5

$f(2)=1$ , получаем более тонкую оценку, погрешность которой не превышает 1% при любой глубине утопления ребра. Она может быть использована для определения  $m_2$  по известным значениям  $\kappa_1, \kappa_2$  и  $m_1$ . Полученные результаты указывают на то, что при весьма малых  $d$  учет только одного (основного) тона колебаний жидкости при описании динамики полости может привести к заметным ошибкам. Аналогичные результаты были получены и для сферической полости с прямым кольцевым ребром.

Для учета влияния ребер на динамические характеристики жидкости и получения приближенных зависимостей иногда полагают, что ребра не влияют на форму 1-го тона собственных колебаний свободной поверхности. На фиг. 4.а показано, как зависит эта форма от глубины утопления ребра. Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают  $d/R=0,5; 0,2; 0,1$  и  $0,05$  соответственно. При  $d/R > 0,5$  форма колебаний практически не изменяется. Таким образом, сформулированное выше допущение в общем случае применять нельзя.

В качестве еще одного примера приведем результаты для круговой цилиндрической полости с коническим ребром (фиг. 5). Верхняя кромка ребра расположена на расстоянии  $H/R=2,0$  от дна, нижняя — на уровне  $H/R=1,4$ , угол конусности равен  $45^\circ$ . На фигуре представлены результаты расчетов собственных частот (сплошные линии) и эквивалентных масс (штриховые линии) для двух низших тонов колебаний жидкости в зависимости от высоты  $d$  жидкости над нижней кромкой ребра (кривые 1 — первый тон колебаний, кривые 2 — второй тон колебаний). Характерной особенностью здесь является наличие интервала уровней жидкости в полости, когда в одинаковой мере существенно влияние обоих тонов колебаний. Так, при  $d/R=0,4$  эквивалентная масса  $m_2$  второго тона колебаний в 2 раза больше эквивалентной массы  $m_1$  первого тона колебаний. На фиг. 4.б показаны формы первого (сплошная линия) и второго (штриховая линия) тонов колебаний свободной поверхности жидкости при  $d/R=0,2$ . Как видно из фигуры, смещения частиц жидкости по обе стороны перегородки составляют величины одного порядка. На линии пересечения свободной поверхности жидкости с ребром формы колебаний терпят разрыв.

Рассмотрим возможность получения оценок на основе использования функции (3.1). На фиг. 3 кривая 2 показывает зависимость  $f(1)$  от глубины утопления нижней кромки ребра. Видно, что погрешность приближенной формулы  $f(1)=1$  может достигать 50%. Погрешность формулы  $f(2)=1$  в данном случае не превышает 1% при любой высоте жидкости в полости.

Приведенные результаты, как и результаты для прямых кольцевых ребер, указывают на то, что при описании динамики полости с жесткими ребрами в ряде случаев необходимо учитывать два низших тона колебаний жидкости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н., Петров А. А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
2. *Рабинович Б. И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975. 416 с.
3. *Докучаев Л. В., Стажков Е. М.* Определение гидродинамических характеристик произвольных полостей вращения вариационным методом // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 3. С. 44–49.
4. *Черноузько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
5. *Шетухин В. Л., Шамаков В. П.* Об одном приближенном методе решения задачи о собственных колебаниях жидкости в полостях вращения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 3–8.
6. *Гатауллин И. Г., Столбецов В. И.* О некоторых оценках коэффициентов уравнений возмущенного движения тела с жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 3. С. 40–46.
7. *Микишев Г. Н., Столбецов В. И.* О колебаниях тела в ограниченном объеме вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 1. С. 22–30.
8. *Микишев Г. Н., Столбецов В. И.* Об угловых колебаниях эллипсоида вращения в ограниченном объеме вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 34–39.
9. *Столбецов В. И.* О малых колебаниях шара в сферическом объеме вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 29–34.
10. *Chen S. S., Wambsganss M. W., Jendrzejczyk J. A.* Added mass and damping of a vibrating rod in confined viscous fluids // Trans. ASME. ser. E. J. Appl. Mech. 1976. V. 43. № 2. P. 325–329.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
12. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
13. Сборник научных программ на Фортране. Вып. 2. Матричная алгебра и линейная алгебра. М.: Статистика, 1974. 221 с.
14. *Микишев Г. Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
15. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.

Москва

Поступила в редакцию  
17.III.1987