

УДК 532.592:532.6

## О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ТОНКИХ СЛОЕВ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ДЕМЕХИН Е. А., КАПЛАН М. А., ШКАДОВ В. Я.

Задача о волновом течении тонких слоев вязкой жидкости в полной постановке весьма сложна [1]. К трудности решения уравнений в частных производных в области с неизвестной границей добавляется громоздкость получаемых результатов. Последнее обстоятельство связано с наличием в задаче двух безразмерных параметров — чисел Рейнольдса и Вебера.

При умеренных значениях числа Рейнольдса длины наблюдаемых волн больше толщины слоя. Это позволило упростить исходную систему. В [2] обоснован переход к системе уравнений пограничного слоя, управляемых уже одним параметром. В [2, 3] достигнута также следующая ступень упрощения — осреднением уравнений по поперечной координате выведена система одномерных уравнений для определения двух функций: расхода  $q(x, t)$  и толщины  $h(x, t)$ , получены первые решения этой системы, описывающие стационарные нелинейные волны, исследованы их устойчивость и развитие из малых начальных возмущений. Исследование решений продолжено в [4, 5].

После выхода работ [2, 3] в ряде статей [6–9] предложено также несколько других одномерных моделей для описания волн в слое. Ниже дается анализ этих моделей, прослеживается их связь с исходной задачей и оценивается возможность применения.

1. Рассмотрим систему уравнений пограничного слоя, описывающую течение слоя вязкой жидкости по вертикальной поверхности [1, 6, 7]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{5\delta} \left( \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$y=0: \quad u=v=0, \quad y=h(x, t): \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.3)$$

Система управляется одним параметром  $\delta = 3^{-1/2} 5^{-1} R^{1/2} \gamma^{-1/2}$ . Здесь  $R$  — среднерасходное число Рейнольдса безволнового течения,  $\gamma = \sigma \rho^{-1} \nu^{-1/2} g^{-1/2}$  — постоянная, характеризующая физические свойства жидкости,  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $h(x, t)$  — толщина слоя.

Система усредненных уравнений (1.1)–(1.3) имеет вид [2, 3]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{h} \right) - \frac{1}{5\delta} \left( h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + h - \frac{q}{h^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

где

$$q = \int_0^{h(x,t)} u \, dy, \quad u = 3q \left( \frac{y}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h^3} \right) \quad (1.4)$$

Рассмотрим также другие модельные уравнения. При стремлении чис-

ла Рейнольдса к нулю получаем из (1.4) в качестве частного случая

$$\frac{\partial H}{\partial t} + 3 \frac{\partial H}{\partial x} + 6H \frac{\partial H}{\partial x} + 15\delta \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0$$

$$H = h - 1 \quad (1.5)$$

Это уравнение при замене в (1.5) 15δ на 18δ было получено в [6, 7].

В [8] разложением по малому волновому числу из полной постановки было выведено уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 18\delta h^2 \frac{\partial h}{\partial x} + h^3 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + h^3 \right) = 0 \quad (1.6)$$

Можно показать, что (1.6) справедливо только при малых δ и  $H = h - 1$ .

Если принять за основу систему (1.4) и предположить, что волны слабонелинейные,  $h - 1 \ll 1$ ,  $q - 1 \ll 1$ , и квазистационарные,  $\partial/\partial t \approx -c\partial/\partial x$ ,  $c \approx \text{const}$ , то получим «двухволновое» уравнение [9]

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 3 \frac{\partial}{\partial x} \right) H + 5\delta \left( \frac{\partial}{\partial t} + 1,69 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + 0,71 \frac{\partial}{\partial x} \right) H +$$

$$+ \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} + 6H \frac{\partial H}{\partial x} + 6\delta \frac{\partial}{\partial t} \left( H \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Линейная часть полученного уравнения та же, что в (1.4), но в (1.7) отброшены нелинейности по амплитуде выше квадратичной и оно справедливо только для волн малой амплитуды. Амплитуда же наблюдаемых при умеренных числах Рейнольдса волн в несколько раз превышает толщину слоя. Как будет дальше показано непосредственными вычислениями, границы интервала δ, где справедливо (1.7), фактически те же, что и для уравнения (1.5). Предположения слабонелинейности и квазистационарности портят систему (1.4), делая (1.7) неприложимым для описания наблюдаемых на опыте волн.

Наконец, в [10] предлагается следующее уравнение:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 V - 15\delta \left( \frac{5}{24} V_2 + \frac{3}{20} V_3 h + \frac{7}{60} V_4 h^2 + \frac{2}{21} V_5 h^3 \right) h^4 \right) = 0$$

$$V = 1 + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}, \quad V_2 = 3 \frac{\partial}{\partial t} (hV), \quad V_3 = \frac{3}{2} \left( 3hV \frac{\partial}{\partial x} (hV) - \frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3} \right)$$

$$V_4 = -3hV \frac{\partial^4 h}{\partial x^4}, \quad V_5 = \frac{3}{4} V \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \quad (1.8)$$

Все уравнения были приведены к параметру δ. (Уже возможность сведения к одному параметру δ вместо двух  $R$  и  $\gamma$  косвенно говорит о том, что (1.5)–(1.8) могут быть выведены из (1.1)–(1.3).)

Итак, имеем шесть различных подходов, включая систему (1.1)–(1.3). Возникает два вопроса: насколько хорошим приближением полной системы является система (1.1)–(1.3) и насколько применимы упрощенные уравнения (1.4) и (1.5)–(1.8)?

2. Рассмотрим сравнение различных подходов на задаче линейной устойчивости. Такое сравнение может служить первоначальным ориентиром приложимости приведенных выше уравнений. В полной постановке — это нахождение собственных значений уравнения Орра — Зоммерфельда

$$\varphi^{IV} - 2k^2 \varphi'' + k^4 \varphi = ikR ((U - c) (\varphi' - k^2 \varphi) - U'' \varphi) = 0$$

$$y = 0: \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad y = 1: \quad \varphi'' + k^2 \varphi = 3, \quad \varphi = c - \frac{3}{2}$$

$$\varphi'' - 3k^2\varphi' + ikR\left(c - \frac{3}{2}\right)\varphi' = -ik^3\gamma R^{-2/3} \quad (2.1)$$

Линейная задача на устойчивость в постановке (1.1)–(1.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi''' + 15i\alpha\delta((c-U)\varphi' + U'\varphi) &= 3i\alpha^3 \\ y=0: \varphi=\varphi'=0, \quad y=1: \varphi''=3, \quad \varphi=c - \frac{3}{2} \\ U &= 3\left(y - \frac{1}{2}y^2\right), \quad \alpha = 3^{-1/3}\gamma^{1/3}R^{-1/3}k \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $k, \alpha$  – волновые числа,  $c$  – фазовая скорость,  $\varphi$  – возмущенная функция тока, штрих означает производную по  $y, i = \sqrt{-1}$ .

Благодаря использованию в качестве волнового числа  $\alpha$  добиваются того, что задача описывается вместо двух одним параметром. В настоящее время имеется ряд точных численных решений уравнения Орра – Зоммерфельда. Решений (2.2) до настоящего времени получено не было, ниже

Таблица 1

$\delta$	Точная постановка (2.1)		Система (2.2)		Интегральный подход	
	$\alpha_0$	$\alpha c_i$	$\alpha_0$	$\alpha c_i$	$\alpha_0$	$\alpha c_i$
0,00345	0,1676	$0,8388 \cdot 10^{-3}$	0,1762	$0,9639 \cdot 10^{-3}$	0,1612	$0,6497 \cdot 10^{-3}$
0,0247	0,4505	0,04180	0,4646	0,04631	0,4246	0,03299
0,0575	0,6337	0,1483	0,6426	0,16139	0,6063	0,1308
0,411	0,7727	0,2365	0,8060	0,24184	0,7731	0,2397
0,96	0,8432	0,1769	0,8711	0,17844	0,7430	0,1691
6,88	1,0627	0,07558	1,1628	0,07596	0,5389	0,03718
16,0	1,2079	0,05161	1,2581	0,05159	0,4419	0,01648

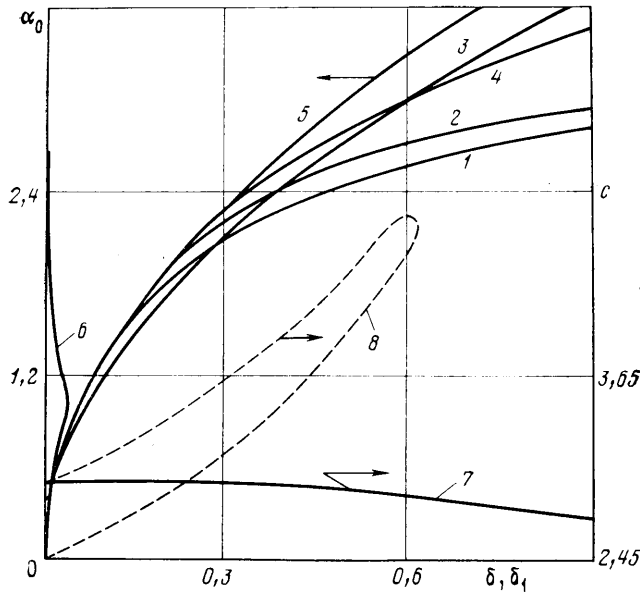
(2.2) решалось численно, сведением к задаче Коши. Решение линейной задачи на устойчивость для упрощенных уравнений сводится к нахождению корней комплексных полиномов и дает для (1.4), (1.5) и (1.7)  $\alpha_0 = \sqrt{15\delta}$ , для (1.6) –  $\alpha_0 = \sqrt{18\delta}$ .

Результаты сравнения кривых нейтральной устойчивости приведены на фиг. 1; в табл. 1 для волн максимального роста  $\gamma = 2850$  [13] даны коэффициенты роста  $\alpha c_i$  и волновое число в зависимости от  $\delta$ . Кривые 1, 2 на фиг. 1 – кривые нейтральной устойчивости (2.1) для  $\gamma = 2903$  (вода) и 28 000 (ртуть) (получено В. В. Беликовым и В. Я. Шкадовым<sup>1</sup>), 3 – решение (2.2). Кривая 4 является нейтральной кривой уравнений (1.4), (1.5), (1.7); 5 – (1.6) и 6 – (1.8). Видно явное отличие кривой нейтральной устойчивости 6 от всех остальных: уравнение (1.8) уже в линейном приближении непригодно для описания волновых решений.

В интервале  $\delta \in [0, 1]$  (для воды это соответствует  $R \in [0, 70]$ ) отличие решений (2.1) от решений (2.2) для кривых нейтральной устойчивости – порядка 18%. В свою очередь интегральный подход (1.4) отличается от решения (2.2) по нейтральным волновым числам не более чем на 4%. Для волн максимального роста, как показывает табл. 1, в указанном диапазоне  $\delta$  интегральное и погранслоное уравнения удовлетворительно согласуются с решением уравнения Орра – Зоммерфельда. Для  $\delta > 1$  вплоть до  $\delta = 16$  погранслоная система для волн максимального роста в отличие от интегрального подхода продолжает с приемлемой точностью согласовываться с решением уравнения Орра – Зоммерфельда.

Из моделей (1.4), (1.5)–(1.7) следует, что на нейтральной кривой  $c=3$ .

<sup>1</sup> Отчет Института механики МГУ. 1980. № 2450. 85 с.



Фиг. 1

Фазовая скорость на нейтральной кривой для уравнения Орра — Зоммерфельда с графической точностью совпадает с решением (2.2), эта зависимость  $c(\delta)$  обозначена на фиг. 1 цифрой 7. При  $\delta=1$  отличие точного решения от интегрального подхода  $c=3$  порядка 7%. Цифрой 8 изображена зависимость  $c(\delta_1)$  на нейтральной кривой для модели, описываемой уравнением (1.8), где  $\delta_1=20\delta$ . Так же как и для нейтрального волнового числа, последняя кривая демонстрирует явное отличие уже самого характера поведения кривой от зависимости  $c(\delta)$  для точного решения. Более того, нелинейных решений (1.8) при  $\delta > 0,0313$  не существует.

3. Перейдем к нелинейным волновым решениям. Изложим способ решения краевой задачи по  $y$  методом полос, являющимся развитием метода, предложенного в [1]. Для случая стационарных бегущих волн получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений по  $x$ . Метод обобщается на случай нестационарной задачи. Получающуюся систему уравнений в частных производных относительно  $x$  и  $t$  можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по  $t$ , раскладывая неизвестные функции в ряд Фурье по  $x$ , аналогично [14].

Разобьем слой по толщине на  $N$  равных частей  $h_n = (n/N)h(x)$ ,  $n=0, 1, \dots, N$ . Для стационарных бегущих волн, перейдя в систему координат, движущуюся со скоростью  $c$ , и проинтегрировав (1.1), (1.2) по  $y$  поперек каждого из получившихся слоев, получим

$$\frac{d}{dx} \int_{h_n}^{h_{n+1}} u^2 dy + \left( \frac{n}{N} u_n^2 - \frac{n+1}{N} u_{n+1}^2 \right) \frac{dh}{dx} + u_{n+1} v_{n+1} - u_n v_n = \frac{1}{5\delta} \left( \frac{h}{N} \frac{d^3 h}{dx^3} + \frac{h}{N} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y} \right) \right) \quad (3.1)$$

$$v_{n+1} = v_n + \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x} dy, \quad u_0 = 0, \quad h_0 = 0 \quad (3.2)$$

$$v_n = v|_{y=h_n}, \quad n=0, 1, \dots, N.$$

Профиль скорости в каждом слое ищется в виде

$$u^{(m)} = A_m + B_m \eta_m + D_m \eta_m^2, \quad \eta_m = \frac{y - h_m}{h_{m+1} - h_m} \quad (3.3)$$

где  $m=1, 2, \dots, N-1$  обозначает принадлежность к  $m$ -му слою. На границах слоев потребуем равенства скоростей и производных от них по  $y$  для сопряженных слоев. Дополним это условиями (3.2). Тогда будем иметь  $N$  неизвестных:  $h(x)$ ,  $B_1(x)$ ,  $D_1(x)$ , ... На эти  $N$  неизвестных имеется  $N$  уравнений (3.1). При  $N=1$  получаем систему (1.4).

Полученная система приводилась к более удобному для решения виду. Сложив все уравнения, получим интегральное уравнение баланса импульсов для всего слоя  $y \in [0, h]$ . Вычитая последовательно из  $n$ -го уравнения  $(n+1)$ -е, получим остальные  $N-1$  уравнения. Воспользуемся двумя обстоятельствами: первое из полученных уравнений слабо зависит от профиля скоростей в слое; если задать  $h(x)$ , то оставшиеся  $N-1$  уравнения образуют замкнутую систему для нахождения коэффициентов полиномов (3.3).

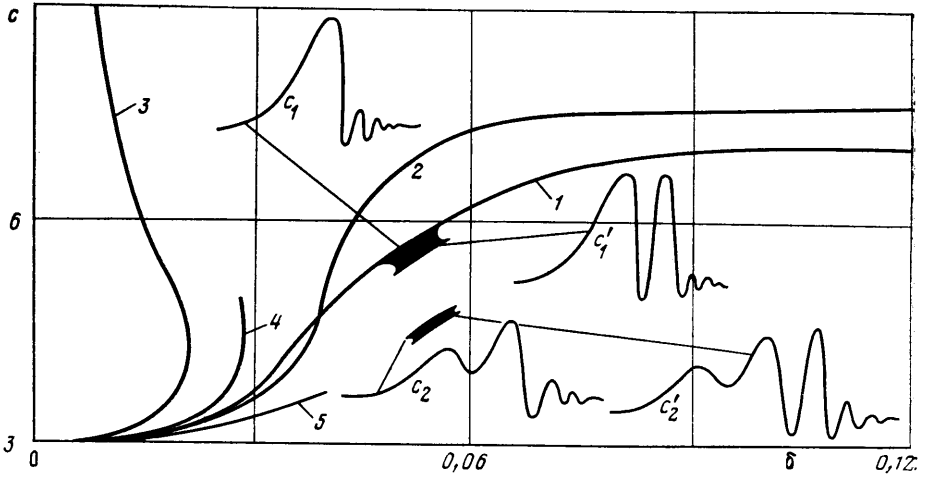
Решение типа положительного солитона при  $x \rightarrow \pm\infty$  выходит на тривиальное  $h=1$ ,  $u=3(y-1/2y^2)$ . Линеаризуя систему около тривиального решения и полагая возмущение пропорциональным  $e^{\sigma x}$  для заданных  $c$  и  $\delta$ , найдем собственные значения  $\sigma$ . Численный анализ показал, что при фиксированном  $\delta$  значению  $c$ , большему нейтрального, соответствуют  $N+2$  собственных значения  $\sigma$ , из которых  $N$  вещественны и больше нуля, т. е. отвечают затухающим при  $x \rightarrow -\infty$  решениям, а два комплексно сопряжены, причем вещественная часть у них меньше нуля, они соответствуют затухающим при  $x \rightarrow +\infty$  решениям.

Если считать заданным профиль (3.3), то первое уравнение является относительно  $h(x)$  обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка с переменными коэффициентами. Линеаризованное около тривиального решения, это уравнение имеет частное и общее решения. Общему решению соответствуют три собственных значения: одно положительное вещественное, два — комплексно-сопряженных с вещественной частью меньше нуля. Частное решение можно подобрать затухающим при  $x \rightarrow +\infty$ . Это уравнение решалось методом [4].

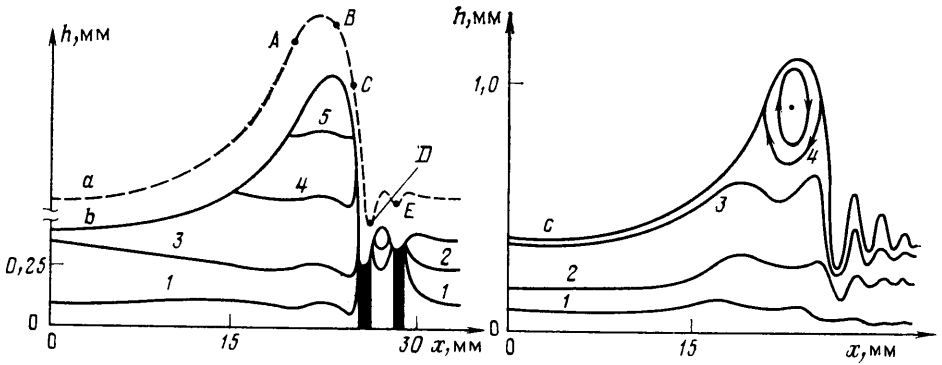
Если теперь в оставшихся  $N-1$  уравнениях считать  $h(x)$  заданной функцией и линеаризовать уравнения около тривиального решения, то эти уравнения имеют  $N-1$  собственных значений, все они больше нуля и соответствующие им собственные функции затухают при  $x \rightarrow -\infty$ . Кроме того, частное решение всегда затухает при  $x \rightarrow -\infty$ . Поэтому из этих  $N-1$  уравнений можно получить коэффициенты полиномов (3.3), интегрируя уравнения в сторону убывания  $x$  и тем самым уточняя профиль скоростей. Затем опять интегрируется первое уравнение, уточняются  $h(x)$  и  $c$ , и так до достижения требуемой точности. Обычно требовалось от двух до шести итераций. Этим методом были найдены одnogорбные положительные солитоны на интервале  $\delta \in [0,03; 0,12]$ . Кроме того, расчеты подтвердили существование многогорбных солитонов, найденных для упрощенного интегрального уравнения в [15]. Результаты расчетов при  $N=4$ ,  $\delta < 0,12$  отличались от результатов при  $N=3$  только на третьей значащей цифре  $c$ , поэтому большая часть расчетов была проведена при  $N=3$ . Метод был опробован на периодических решениях первого семейства и решениях типа отрицательных солитонов. Решения совпали с теми, которые были получены другими методами в [11, 12]. Сравнение с разностным алгоритмом [12] показало, что уже  $N=3$  дает хорошую точность. Более того, в отличие от [12] настоящий алгоритм применим для нахождения волновых решений с циркуляционными потоками в обратном течении, а именно такие волны и наблюдаются в большинстве экспериментов.

На фиг. 2 приведены зависимости фазовой скорости одnogорбой уединенной волны  $c$  от параметра  $\delta$ . Кривые 1–5 на фиг. 2 — расчеты для уравнений (1.1)–(1.3), (1.4), (1.6), (1.7) и (1.5) соответственно. Сразу обращает на себя внимание тот факт, что уравнение (1.6) демонстрирует совершенно другое поведение кривой 3, чем наиболее полная пограничная система. Кривая  $c(\delta)$  загибается назад, начиная с  $\delta=0,021$ , и затем уходит в бесконечность, прижимаясь к оси  $c$  [16]. Кривая 4, полученная в [17] решением (1.7), при  $\delta \approx 0,028$  также загибается назад, и, видимо, в дальнейшем ведет себя подобно кривой 3. Зависимость  $c(\delta)$ , даваемая интегральным подходом, дает в целом несколько завышенное значение скорости по сравнению с более полным подходом (1.1)–(1.3). Уравнение (1.5) хорошо описывает уединенные волны только в весьма малой окрестности нуля, примерно до значений  $\delta \approx 0,01-0,02$ . Приближения, даваемые подходами (1.6) и (1.7), при малых  $\delta$  фактически эквивалентны (1.5), а при больших  $\delta$  ухудшают это приближение.

Итак, сравнение нелинейных решений показывает, что для дальнейшего сопоставления эксперимента и теории остаются только два подхода, основанных на уравнениях пограничного слоя (1.1)–(1.3) и на интегральных уравнениях (1.4).



Фиг. 2



Фиг. 3

Для интегрального подхода (1.4) были получены решения типа многогорбых солитонов<sup>2</sup>, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями третьего порядка. Так как соответствующее фазовое пространство в этом случае конечномерно, то для исследования таких солитонов были использованы методы и приемы теории динамических систем [15]. Стационарная система (1.1)–(1.3) является системой в частных производных, к которой неприменимы подходы теории динамических систем, и тем важнее результаты расчетов, показавших наличие для (1.1)–(1.3) решений типа многогорбых солитонов. Поскольку расчеты были трудоемки, то они были проведены только в некоторой окрестности  $\delta=0,0565$ . Зачерченные полосы  $[c_1, c_1']$ ,  $[c_2, c_2']$  на фиг. 2 – это области, где существуют многогорбые солитоны. Границы полос  $[c_1, c_1']$  соответствуют одно- и двугорбый солитоны,  $[c_2, c_2']$  – двугорбый и трехгорбый солитоны. Полосы солитонов  $[c_n, c_n']$ ,  $n \geq 3$ , ограниченные  $n$ - и  $(n+1)$ -горбым солитонами, для (1.1)–(1.3) не искались.

4. Проведем сравнение с экспериментами. На фиг. 3 в одинаковом масштабе приведены профили стационарных волн:  $a$  – измеренный в экспериментах [18],  $b, c$  – найденные решением (1.1)–(1.3) и интегральных уравнений (1.4) соответственно. Значения параметров, взятые из экспериментов [18]:  $\nu=7,2 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\sigma/\rho=57,6 \cdot 10^{-6}$  м<sup>3</sup>/с;  $l_0=0,363$  мм;  $\gamma=193,6$ , этому соответствует  $R=3,064$ ,  $\delta=0,0567$ . В табл. 2 под номерами 1–3 даны значения скорости  $s$  и амплитуды  $a=h_{\max}-h_{\min}$  для волн, изображенных на фиг. 3,  $a$ – $c$  соответственно.

<sup>2</sup> Отчет Института механики МГУ. 1982. № 2745. 62 с.

Обращает на себя внимание хорошее соответствие теории и эксперимента уже в интегральном подходе. Более того, теоретическая амплитуда солитона при интегральном подходе лучше соответствует эксперименту, чем при погранслоином. Предвестник капиллярной ряби, где происходит основная диссипация энергии, предсказываемый интегральным подходом, имеет намного более жесткие и с большей амплитудой осцилляции по сравнению с экспериментом. Это объясняется априорным заданием в слое равновесного параболического профиля скорости. Погранслоиные же уравнения предсказывают количественно совпадающие с экспериментом осцилляции на переднем фронте. Как будет показано ниже, именно в этом месте волный профиль скоростей испытывает очень резкие изменения.

Разберем теперь подробно поле скоростей, полученное теоретически, и проведем сравнение с экспериментом. В экспериментах [18] полосы  $\Delta x$ ,

Таблица 2

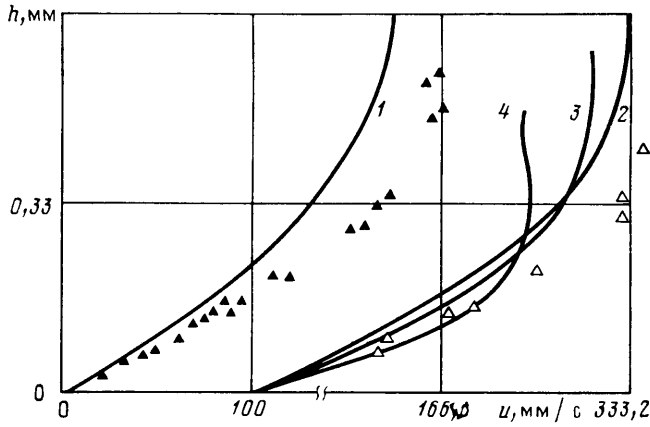
$N$	$c$ , мм/с	$a = h_{\max} - h_{\min}$ , мм
1	460	0,825
2	386	0,770
3	450	0,785

внутри которых профиль  $u(y)$  считался слабоменяющимся, взяты довольно широкими:  $\Delta x = 2-3$  мм (это связано с техникой эксперимента), и внутри некоторых из этих полос для описания поля скоростей и понимания происходящего необходимо взять несколько сечений. На фиг. 3, *a* экспериментальные полосы лежат между проекциями на ось  $x$  точек  $A-E$ . Сечения, изученные теоретически, лежат внутри этих полос с равномерным шагом 0,5 мм (исключение составляет полоса  $A-B$ ). На фиг. 4 и 5 кривая 1 относится к полосе  $A-B$  фиг. 3, кривые 2-4 — к полосе  $B-C$ , 5-7 — к  $C-D$ , 8-12 — к  $D-E$ . На фиг. 4 и 5 также приведены экспериментальные точки, соответствующие разным полосам.

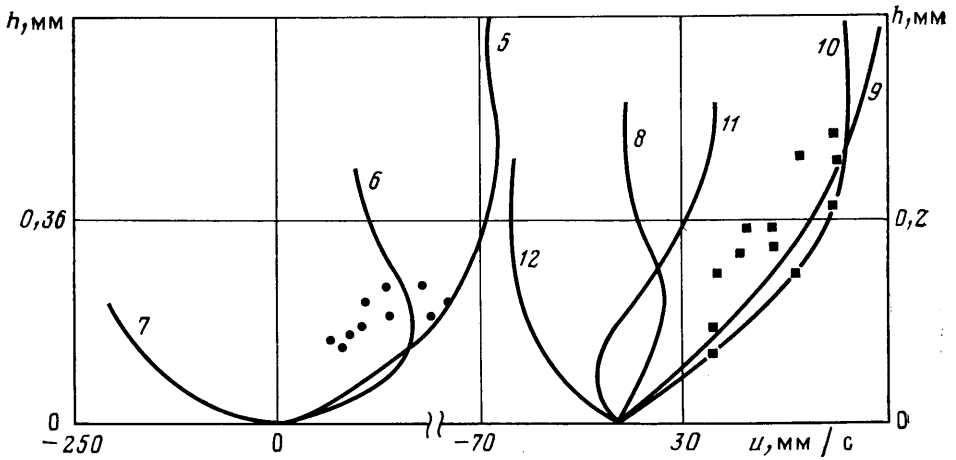
При движении наблюдателя вдоль заднего фронта волны, т. е. от  $x=0$  до  $x=25$  мм, профиль скоростей фактически остается параболическим. В полосе  $A-B$  все профили  $u(y)$  с графической точностью ложатся в одну кривую 1 — параболу. Некоторое отличие экспериментальных точек от теоретической кривой связано с меньшей теоретической величиной максимального значения  $h(x)$ . В полосе  $B-C$  начинаются слабые отклонения от параболического профиля, максимум  $u(y)$  перемещается внутрь слоя. В следующей полосе появляются отрицательные скорости. Полоса  $D-E$  интересна наличием скоростей, у которых  $u(y)$  знакопеременна, при этом большая часть потока течет вперед, но имеется донное течение, направленное назад. Изменения в последних двух сечениях происходят очень быстро, ускорение жидких частиц в них достигает 1,5-2  $g$ .

Как видно из фиг. 6, экспериментальные полосы в области минимальных толщин слишком широки, чтобы характеризовать их только одним профилем скорости. На это указывают и сами экспериментаторы [18], подчеркивая, что разброс точек здесь достигает 100%. На фиг. 3, *b* приведен график линий тока в необращенном движении. Цифры 1-5 на фиг. 3, *b* отвечают значениям  $\psi = 0,15; 0,50; 1,00; 4,00; 8; 0$ .

На фиг. 6 проведено сравнение теоретических и экспериментальных скоростей на поверхности волны. Некоторое различие в скорости на поверхности в области горба связано с меньшими по сравнению с экспериментальными теоретическими значениями амплитуды и фазовой скорости погранслоиного солитона. В экспериментах [18] не было обнаружено отрицательных поверхностных скоростей, в расчетах же они имеют место в области осцилляций и некоторой части переднего фронта, т. е. там, где отсутствуют экспериментальные данные.



Фиг. 4

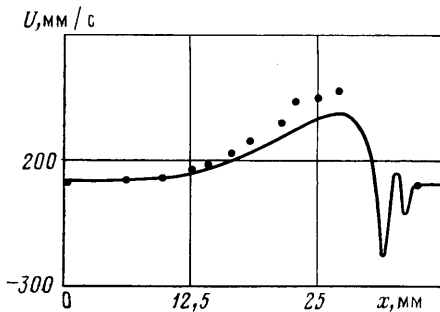


Фиг. 5

Солитон можно представить как каплю жидкости, падающую по медленно стекающему вязкому подслою. Частицы жидкости, попадающие на вершину волны, переносятся фактически со скоростью, близкой к скорости  $c$ . Вблизи переднего фронта образуются быстро перемещающиеся вихри, где скорости жидких частиц направлены против основного течения.

Если наблюдатель перемещается со скоростью волны  $c$ , то в движущейся системе координат участки возвратного течения имеются вблизи

вершины волны, там, где профиль скорости близок к параболическому. Поэтому, чтобы не загромождать рисунок, линии тока обращенного движения приведены для солитона интегрального уравнения на фиг. 3, с, где цифры 1—4 отвечают  $\psi=0,055; 0,30; 0,85; 0,00$ . В зоне горба солитона образуется вихрь, как это происходит при отрыве пограничного слоя на диффузорном участке. Образование возвратного течения в обращенном движении наступает при  $\delta > 0,049$  (для интегрального подхода — при  $\delta > 0,047$ ).



Фиг. 6

Проведено сравнение теории с



экспериментами для одногорбых солитонов. Теория предсказывает также существование многогорбых солитонов. При небольших числах Рейнольдса такие солитоны не наблюдаются, по-видимому, ввиду их неустойчивости. Имеются экспериментальные свидетельства существования двугорбых солитонов при больших числах Рейнольдса (для воды  $R \approx 180$  [19, рис. 5]). Количественное сравнение их с теорией затруднено в силу значительного искажения экспериментальных волн трехмерностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // Науч. тр. Ин-та механики МГУ. 1973. № 25. 192 с.
2. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.
3. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 2. С. 20–25.
4. Бунов А. В., Демёхин Е. А., Шкадов В. Я. О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 691–696.
5. Демёхин Е. А., Шкадов В. Я. Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 63–67.
6. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 28–34.
7. Gjevik B. Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films // Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 8. P. 1918–1925.
8. Benney V. J. Long waves on liquid films // J. Math. and Phys. 1966. V. 45. № 2. P. 150–155.
9. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волнообразование при течении пленки жидкости на вертикальной стенке // ПМТФ. 1979. № 6. С. 77–87.
10. Буевич Ю. А., Кудымов С. В. Стационарные длинные волны в жидкой пленке на наклонной плоскости // ПМТФ. 1983. № 1. С. 15–20.
11. Шкадов В. Я., Холланов Л. П., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М. К нелинейной теории волновых течений пленки жидкости // Теор. основы хим. технологии. 1970. Т. 4. № 6. С. 859–867.
12. Демёхин Е. А., Демёхин И. А., Шкадов В. Я. Солитоны в стекающих слоях вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 9–16.
13. Pierson F. W., Whitaker S. Some theoretical and experimental observations of the wave structure of falling liquid films // Industr. Eng. Chem. Fundam. 1977. V. 16. № 4. P. 401–408.
14. Демёхин Е. А., Токарев Г. Ю., Шкадов В. Я. Двумерные нестационарные волны на вертикальной пленке жидкости // Теор. основы хим. технологии. 1987. № 2. С. 108–111.
15. Демёхин Е. А., Шкадов В. Я. К теории солитонов в системах с диссипацией // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 91–97.
16. Pimir A., Manneville P., Pomeau Y. On solitary waves running down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1983. V. 135. P. 27–50.
17. Цвелодуб О. Ю. Солитоны на стекающей пленке при умеренных расходах жидкости // ПМТФ. 1980. № 3. С. 64–66.
18. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В., Орлов В. В. Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости // Инж.-физ. журн. 1977. Т. 33. № 3. С. 399–404.
19. Радев К. Б. Гидродинамика и массоотдача при волновых режимах течения жидких пленок // Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1985. 16 с.

Москва  
Краснодар

Поступила в редакцию  
18.VII.1986