МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
И 6 · 1987

УДК 532.59:537.84

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ В ПРИСУТСТВИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

РУДЕРМАН М. С.

В [1, 2] было получено уравнение для стационарных нелинейных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной жидкости бесконечной глубины в предположении, что плотность меняется только в слое, толщина которого мала по сравнению с длиной волны. В [3] выведено уравнение Беньямина – Оно, являющееся обобщением уравнения для нелинейных внутренних волн на нестационарный случай. В [1, 3] были найдены стационарные решения уравнения Беньямина – Оно в виде солитонов и периодических волн. В [4] получено слабо неодномерное уравнение Беньямина – Оно, аналогичное уравнению Кадомцева – Петвиашвили [5], являющемуся обобщением на слабо неодномерный случай уравнения Кортевега – де Вриза [6] и исследована устойчивость солитона в жидкости бесконечной глубины относительно очень длинных изгибных возмущений.

Для интерпретации различных астрофизических наблюдений представляет интерес исследование распространения внутренних волн в присутствии магнитного поля. В частности, в последнее десятилетие активно исследуются так называемые «бегущие волны полутени», о наблюдении которых впервые сообщалось в [7]. «Бегущие волны полутени» наблюдаются в полутени солнечных пятен, где магнитное поле направлено почти горизонтально. В [8] развита линейная теория распространения внутренних захваченных волн в полутени солнечных пятен с использованием модели невозмущенной атмосферы, построенной на основе наблюдательных данных. Показано, что результаты этой теории хорошо согласуются с многочисленными наблюдениями «бегущих волн полутени». Отметим, что наблюдаемые длины «бегущих волн полутени» много больше высоты приведенной атмосферы, поэтому они адекватно описываются длинноволновым приближением.

Конечно, для астрофизических приложений необходим учет сжимаемости. Однако исследование распространения внутренних волн в несжимаемой стратифицированной жидкости может рассматриваться как первое грубое приближение к реальной ситуации. В то же время отказ от учета сжимаемости существенно упрощает исследование и позволяет достаточно далеко продвинуться с помощью аналитических методов. В [9] получено уравнение Беньямина – Оно для длинных поверхностных волн на мелкой воде в присутствии однородного магнитного поля. Рассмотренная в [9] ситуация соответствует распространению волн по поверхности, отделяющей среду, в которой скорость звука много больше альфвеновской скорости, от среды, в которой выполнено обратное неравенство. Подобные условия могут возникать, например, в переходной области Солнца.

В настоящей работе рассматривается распространение длинных нелинейных слабо неодномерных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной жидкости бесконечной глубины в присутствии горизонтального магнитного поля. Показано, что такие волны описываются уравнением, являющимся обобщением уравнения Беньямина – Оно на слабо неодномерный случай. Полученное уравнение отличается от уравнения, полученного в [4], что связано с анизотропией среды, вызываемой наличием магнитного поля. Исследована устойчивость солитона относительно изгиба. Проведено подробное исследование для одного частного случая изменения плотности с высотой при постоянной альфвеновской скорости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим волны в безграничной стратифицированной несжимаемой жидкости в присутствии магнитного поля. Движение жидкости описывается уравнениями магнитной гидродинамики

$$\nabla\mathbf{v}=0;\quad \nabla\mathbf{B}=0;\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\rho=0$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right)=-\nabla p+\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}+\rho\mathbf{g} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

где ρ — плотность, $\mathbf{v}=(u, v, w)$ — скорость, p — давление, $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести. В дальнейшем используем декартову систему координат с осью z, антипараллельной вектору $\mathbf{g}$.

В невозмущенном состоянии $\rho=\rho_0(z)$, $p=p_0(z)$, $\mathbf{B}=B_0(z)\mathbf{b}_0$, где $\mathbf{b}_0=(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\alpha=\text{const}$. Величины p_0, ρ_0 и B_0 связаны уравнением гидростатического равновесия

$$\frac{d}{dz}\left(p_0+\frac{B_0^2}{8\pi}\right)=-g\rho_0 \tag{1.2}$$

Предполагается, что $d\rho_0/dz<0$, причем $\rho_0(z)$ быстро меняется при $|z|\leqslant h$, а при $|z|\gg h$ почти постоянна. Соответственно частота Вяйсяля — Брендта $N(z)=(-(g/\rho_0)d\rho_0/dz)^{1/2}$ велика в области $|z|\leqslant h$ и близка к нулю в области $|z|\gg h$. Величина $B_0(z)$ также почти постоянна при $|z|\gg h$, но, вообще говоря, может сильно меняться в области $|z|\leqslant h$. При $|z|\to\infty$ все возмущения затухают.

2. Линейная теория. Рассмотрим распространение малых возмущений. Представляя все переменные, входящие в (1.1), в виде $f=f_0+f_*(z)\exp(i\mathbf{kr}-i\omega t)$, где $\mathbf{r}=(x, y, 0)$, $\mathbf{k}=(k_x, k_y, 0)$, и выражая все зависимые переменные через w_*, получим

$$\frac{d}{dz}\left\{\rho_0(\mathbf{kV}_A)^2\frac{dw_*}{dz}\right\}-\rho_0k^2\{N^2+(\mathbf{kV}_A)^2\}w_*=\omega^2\left(\frac{d}{dz}\rho_0\frac{dw_*}{dz}-\rho_0k^2w_*\right) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{V}=B_0\mathbf{b}_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$. Решение (2.1) должно удовлетворять граничным условиям $w_*\to0$ при $|z|\to\infty$.

Уравнение (2.1) с граничными условиями на бесконечности представляет собой спектральную задачу для линейного пучка сингулярных дифференциальных операторов со спектральным параметром ω^2. Из (2.1) следует равенство

$$\omega^2\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0\left\{\left(\frac{dw_*}{dz}\right)^2+k^2w_*^2\right\}dz=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0\left\{(\mathbf{kV}_A)^2\left(\left(\frac{dw_*}{dz}\right)^2+k^2w_*^2\right)+k^2N^2w_*^2\right\}dz \tag{2.2}$$

откуда сразу получаем неравенство

$$\omega^2\geqslant\inf(\mathbf{kV}_A)^2 \tag{2.3}$$

Из (2.3), в частности, следует, что все собственные значения спектральной задачи (2.1) неотрицательны.

В общем случае трудно надеяться получить какие-то общие утверждения о спектре задачи (2.1). Рассмотрим следующий пример. Пусть $\rho_0=\text{const}$ (приближение Буссинеска), $N^2=\text{const}\neq0$ при $|z|<h$, $N=0$ при $|z|>h$, $(\mathbf{kV}_A)^2=N^2kz+A$ при $|z|<h$, $(\mathbf{kV}_A)^2=N^2kh+A$ при $z>h$ и $(\mathbf{kV}_A)^2=-N^2kh+A$ при $z<-h$. Тогда решение уравнения (2.1), убывающее при $|z|\to\infty$, запишется в виде

$$w_*=C_-e^{kz}\quad(z<-h);\qquad w_*=C_+e^{-kz}\quad(z>h)$$

$$w_* = e^{kz}\left\{C_1 + C_2 \int_0^z \frac{e^{-2kz'}\,dz'}{N^2kz' + A - \omega^2}\right\} \quad (|z| < h)$$

причем если знаменатель интеграла, стоящего в фигурных скобках, обращается в нуль на интервале $|z|<h$, то $C_2=0$. Из условия непрерывности w_* и dw_*/dz при $z=\pm h$ получается дисперсионное уравнение для определения ω^2

$$\frac{e^{2kh}}{A - N^2kh - \omega^2} = 0$$

которое, очевидно, не имеет решений. Таким образом, в рассматриваемом случае спектральная задача (2.1) вообще не имеет собственных значений.

Однако в важном частном случае $V_A=\text{const}$, $\rho_0=\text{const}$ (приближение Буссинеска), $N>0$, N — непрерывная функция, спектр задачи (2.1) может быть описан полностью. Из теоремы, доказанной в [10], следует, что спектр задачи (2.1) состоит из однократных изолированных собственных значений, образующих монотонно убывающую последовательность с единственной предельной точкой $(\mathbf{kV}_A)^2$. Собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, образуют полную систему в гильбертовом пространстве функций, квадрат которых интегрируем по Лебегу на числовой оси.

3. Вывод уравнений для длинных нелинейных волн. Пусть характерный масштаб изменения всех величин по x есть k^{-1}. Рассматриваем длинные волны, полагая $kh=\varepsilon\ll1$. Считаем, что безразмерная амплитуда колебаний порядка ε. В [4] показано, что эффекты, связанные со слабой неодномерностью, одного порядка с дисперсионными эффектами в том случае, когда характерный масштаб изменения всех переменных в направлении неодномерности равен $\varepsilon^{-1/2}k^{-1}$.

Пусть фронт волны перпендикулярен оси x. Слабая зависимость от координаты y означает, что имеется модуляция параметров волны: амплитуды, фазовой скорости и т. д. Эти модуляции, как известно, переносятся с групповой скоростью. В изотропном случае в длинноволновом приближении групповая скорость совпадает с фазовой. Однако при наличии анизотропии с фазовой скоростью c совпадает только x-компонента групповой скорости. Имеется еще y-компонента групповой скорости, обозначаемая в дальнейшем V. Таким образом, модуляции переносятся со скоростями c и V в направлении осей x и y.

Величины c и V можно определить из линейной теории. Однако более последовательным представляется считать их неопределенными и найти из условий разрешимости первого и второго приближений по малому параметру.

Учитывая сказанное выше, аналогично [4] вводим новые растянутые переменные $\xi=\varepsilon(x-ct)$, $\eta=\varepsilon^{3/2}(y-Vt)$, $\tau=\varepsilon^2t$.

При $|z|\leqslant h$ характерным масштабом изменения всех переменных по z является h. Однако при $|z|\gg h$ характерным масштабом по z будет уже k^{-1}. Поэтому при $|z|\gg h$ вместо z вводится растянутая переменная $\zeta=\varepsilon z$. При z_1, удовлетворяющем условию $h\ll z_1\ll\varepsilon^{-1/2}h$, разложения во внешней и внутренней областях сращиваются, т. е. ставится условие непрерывности всех переменных и их производных по z при $|z|=z_1$. Полагая $\zeta_1=\varepsilon z_1$ и обозначая индексами плюс и минус переменные в областях $\zeta>0$, $\zeta<0$, имеем

$$w|_{z=\pm z_1} = w_\pm|_{\zeta=\pm\zeta_1}; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=\pm z_1} = \varepsilon \left.\frac{\partial w_\pm}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\pm\zeta_1} \tag{3.1}$$

В новых переменных во внутренней области уравнения (1.1) перепишутся в виде

$$
\begin{gathered}
\nabla_\perp \mathbf{v}_\perp + \varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \mathbf{V}_g\nabla_\perp\rho + \mathbf{v}_\perp\nabla_\perp\rho + \varepsilon^{-1}w\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \\
\rho\left(\varepsilon\frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial\tau} - (\mathbf{V}_g\nabla_\perp)\mathbf{v}_\perp + (\mathbf{v}_\perp\nabla_\perp)\mathbf{v}_\perp + \varepsilon^{-1}w\frac{\partial\mathbf{v}_\perp}{\partial z}\right) = \\
= -\nabla_\perp\left(p + \frac{B_\perp^2 + B_z^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}_\perp\nabla_\perp)\mathbf{B}_\perp + \varepsilon^{-1}\frac{B_z}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{B}_\perp}{\partial z} \\
\varepsilon\rho\left(\varepsilon\frac{\partial w}{\partial\tau} - \mathbf{V}_g\nabla_\perp w + \mathbf{v}_\perp\nabla_\perp w + \varepsilon^{-1}w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \\
= -\frac{\partial}{\partial z}\left(p + \frac{B_\perp^2}{8\pi}\right) + \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathbf{B}_\perp\nabla_\perp B_z - \rho g \\
\varepsilon\frac{\partial\mathbf{B}_\perp}{\partial\tau} - (\mathbf{V}_g\nabla_\perp)\mathbf{B}_\perp = (\mathbf{B}_\perp\nabla_\perp)\mathbf{v}_\perp + \varepsilon^{-1}B_z\frac{\partial\mathbf{v}_\perp}{\partial z} - (\mathbf{v}_\perp\nabla_\perp)\mathbf{B}_\perp - \varepsilon^{-1}w\frac{\partial\mathbf{B}_\perp}{\partial z} \\
\frac{\partial B_z}{\partial\tau} - \varepsilon^{-1}(\mathbf{V}_g\nabla_\perp)B_z = \varepsilon^{-1}\mathbf{B}_\perp\nabla_\perp w + \varepsilon^{-2}B_z\frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon^{-1}\mathbf{v}_\perp\nabla_\perp B_z - \varepsilon^{-2}w\frac{\partial B_z}{\partial z} \\
\mathbf{V}_g = (c, V, 0), \quad \mathbf{v}_\perp = (u, v, 0), \quad \mathbf{B}_\perp = (B_x, B_y, 0) \\
\nabla_\perp = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial\eta}, 0\right)
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Уравнение соленоидальности магнитного поля не выписано, поскольку оно не используется в дальнейшем.

Решение (3.2) ищем в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/2}$. Нетрудно показать, что $w \sim \varepsilon^2$, $B_z \sim \varepsilon^2$. Поэтому разложения для ρ, p, $\mathbf{v}_\perp$ и $\mathbf{B}_\perp$ записываем в виде $f = f_0 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^{3/2} f^{(2)} + \varepsilon^2 f^{(3)} + \ldots$ ($\mathbf{v}_{\perp 0} = 0$), а для w и B_z — в виде $f = \varepsilon^2 f^{(1)} + \varepsilon^{5/2} f^{(2)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \ldots$

Собирая в (3.2) члены порядка ε и выражая все переменные первого приближения через $w^{(1)}$, получим

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial\xi} = \frac{1}{c}\frac{d\rho_0}{dz}w^{(1)}; \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi} = -\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z}; \quad v^{(1)} = 0 \\
\frac{\partial p^{(1)}}{\partial\xi} = -\rho_0 c\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} - \frac{\rho_0 V_A^2}{cB_0}\frac{dB_0}{dz}w^{(1)}; \quad B_z^{(1)} = -\frac{B_0\cos\alpha}{c}w^{(1)} \\
\frac{\partial B_x^{(1)}}{\partial\xi} = \frac{\cos\alpha}{c}\frac{\partial}{\partial z}(B_0 w^{(1)}); \quad \frac{\partial B_y^{(1)}}{\partial\xi} = \frac{\sin\alpha}{c}\frac{dB_0}{dz}w^{(1)} \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 V_A^2\cos^2\alpha\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z}\right) - \rho_0 N^2 w^{(1)} = c^2\frac{\partial}{\partial z}\rho_0\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z}
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Ищем $w^{(1)}$ в виде $w^{(1)} = -\Phi(z)\,df(\tau, \xi, \eta)/d\xi$. Из последнего уравнения (3.3) имеем

$$
\frac{d}{dz}\left(\rho_0 V_A^2\cos^2\alpha\frac{d\Phi}{dz}\right) - \rho_0 N^2\Phi = c^2\frac{d}{dz}\rho_0\frac{d\Phi}{dz}
\tag{3.4}
$$

При $|z| \to \infty$ общее решение (3.4) есть линейная функция z. Поэтому в отличие от (2.1) на Φ нельзя наложить условие обращения в нуль при $|z| \to \infty$. Вместо этого ставим условие $d\Phi/dz \to 0$ при $|z| \to \infty$.

Как и в случае спектральной задачи (2.1), единственное общее утверждение, которое можно сделать о спектре задачи (3.4), заключается в том, что если c^2 — собственное значение, то $c^2 > \inf(V_A^2 \cos^2\alpha) \geqslant 0$. В последнем разделе подробно исследован один частный случай зависимости ρ_0 от z при $V_A = \mathrm{const}$.

Будем полагать, что c^2 — однократное изолированное собственное значение спектральной задачи (3.4).

Собирая в (3.2) члены порядка $\varepsilon^{3/2}$, после несложных вычислений получим с помощью (3.3) следующее уравнение для $w^{(2)}$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 V_A^2 \cos^2\alpha \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z}\right) - \rho_0 N^2 w^{(2)} - c^2 \frac{\partial}{\partial z}\rho_0 \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} = \\ = \frac{d}{dz}\left\{\rho_0 (V_A^2 \sin 2\alpha - 2c\dot{V})\frac{d\Phi}{dz}\right\}\frac{\partial f}{\partial \eta}\end{gathered} \tag{3.5}$$

Умножая (3.5) на Φ, интегрируя по z от $-\infty$ до ∞ и используя условие $d\Phi/dz \to 0$ при $|z| \to \infty$, получим условие существования ограниченного при $|z| \to \infty$ решения (3.5) в виде

$$V = \frac{\sin 2\alpha}{2cq}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 V_A^2 \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2 dz; \quad q = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2 dz \tag{3.6}$$

Общее решение уравнения (3.5), ограниченное при $|z| \to \infty$, записывается в виде

$$\begin{gathered} w^{(2)} = -\Phi(z)\left(\frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \Psi(z)\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\ \Psi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{dz_1}{\rho_0 \Phi^2 (c^2 - V_A^2 \cos^2\alpha)} \int_{-\infty}^{z_1} \Phi \frac{d}{dz_2}\rho_0 (V_A^2 \sin 2\alpha - 2cV)\frac{d\Phi}{dz_2}\, dz_2 \end{gathered} \tag{3.7}$$

где $f_2(\tau, \xi, \eta)$ — произвольная функция. Ограниченность $\Psi(z)$ при $|z| \to \infty$ следует из (3.6).

Соберем в (3.2) члены порядка ε^2. Исключая из полученных таким образом уравнений все переменные третьего приближения, кроме $w^{(3)}$, получим с учетом предыдущих результатов

$$\begin{gathered} c^2 \frac{\partial}{\partial z}\rho_0 \frac{\partial^2 w^{(3)}}{\partial z\, \partial \xi} + \rho_0 N^2 \frac{\partial w^{(3)}}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial z}\rho_0 V_A^2 \frac{\partial^2 w^{(3)}}{\partial z\, \partial \xi}\cos^2\alpha = \\ = -2c\frac{d}{dz}\left(\rho_0 \frac{d\Phi}{dz}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial \tau\, \partial \xi} + \frac{1}{c}\frac{d}{dz}\left\{(c^2 - V_A^2 \cos^2\alpha)\Phi \frac{d^2\Phi}{dz^2} - \right. \\ \left. - \frac{d\Phi}{dz}\frac{d}{dz}(c^2 - V_A^2\cos^2\alpha)\Phi - \rho_0 N^2 \Phi^2\right\}\frac{\partial}{\partial \xi} f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \\ + \frac{d}{dz}\left\{\rho_0 (2cV - V_A^2 \sin 2\alpha)\frac{d\Phi}{dz}\right\}\frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{d}{dz}\left\{(V^2 + V_A^2 \cos 2\alpha - c^2)\rho_0 \frac{d\Phi}{dz} + \right. \\ \left. + (2cV - V_A^2 \sin 2\alpha)\rho_0 \frac{d(\Phi\Psi)}{dz}\right\}\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \end{gathered} \tag{3.8}$$

Умножая (3.8) на Φ, интегрируя по частям и используя (3.4), (3.6) и условия при $|z| \to \infty$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} + \gamma f \frac{\partial f}{\partial \xi}\right) + \delta \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{\rho_0}{2q}(c^2 - V_A^2 \cos^2\alpha)\Phi \frac{\partial^2 w^{(3)}}{\partial z\, \partial \xi}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}$$

$$\gamma=\frac{3}{2c^2q}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0(c^2-V_A{}^2\cos^2\alpha)\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^3 dz \tag{3.9}$$

$$\delta=\frac{c^2-V^2}{2c}-V\operatorname{ctg}2\alpha-\frac{1}{2cq}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0(2cV-V_A{}^2\cos^2\alpha)\frac{d\Phi}{dz}\frac{d(\Phi\Psi)}{dz}dz$$

Для того чтобы найти величину, стоящую в правой части (3.9), необходимо найти решение во внешней области. Решение во внешней области, так же как и в [3, 4], ищется в виде $f_\pm=f_{0\pm}+\varepsilon^2 f_\pm{}^{(1)}+\varepsilon^{5/2}f_\pm{}^{(2)}+\ldots$ Переходя в (3.2) от z к $\zeta=\varepsilon z$, собирая члены наименьшего порядка по ε и выражая все переменные через $w_\pm{}^{(1)}$, получим

$$\frac{\partial^2 w_\pm^{(1)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w_\pm^{(1)}}{\partial\zeta^2}=0 \tag{3.10}$$

Из (3.1) следуют граничные условия, причем можно положить $z_1\to\pm\infty$, $\zeta_1\to\pm0$

$$w_\pm^{(1)}\Big|_{\zeta=\pm0}=-\Phi_\pm\frac{\partial f}{\partial\xi};\quad \frac{\partial w_\pm^{(1)}}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\pm0}=\frac{\partial w^{(3)}}{\partial z}\Big|_{z=\pm\infty} \tag{3.11}$$

$$\Phi_\pm=\lim_{z\to\pm\infty}\Phi(z)$$

Переходя к преобразованию Фурье, используя первое граничное условие (3.11) и учитывая условие затухания при $z\to\pm\infty$, находим

$$w_{k\pm}^{(1)}=-ik\Phi_\pm f_k e^{\mp|k|\zeta}$$

Теперь с помощью формулы $(H(f))_k=if_k\operatorname{sgn}k$ находим (H — преобразование Гильберта)

$$\frac{\partial w_\pm^{(1)}}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\pm0}=\mp\Phi_\pm\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}H(f);\quad H(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi')d\xi'}{\xi'-\xi} \tag{3.12}$$

Подставляя (3.13) в (3.9), возвращаясь к старым независимым переменным и вводя $F=\varepsilon f$, окончательно получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}+c\frac{\partial F}{\partial x}+V\frac{\partial F}{\partial y}+\gamma F\frac{\partial F}{\partial x}+\beta\frac{\partial^2 H(F)}{\partial x^2}\right)+\delta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$$

$$\beta=\beta_++\beta_-;\quad \beta_\pm=\frac{\rho_{0\pm}\Phi_\pm{}^2}{2cq}(c^2-V_{A\pm}{}^2\cos^2\alpha) \tag{3.13}$$

Уравнение (3.13) отличается от уравнения, полученного в [4], наличием члена, пропорционального V. Появление этого добавочного члена связано с присутствием анизотропии.

4. Устойчивость солитона относительно изгибных возмущений. Уравнение (3.13) имеет решение в виде алгебраического солитона [1, 3]. Сделаем в (3.13) замену переменных $y_*=(y-Vt)/\sqrt{2|\delta|}$, $x_*=(x-ct)\operatorname{sgn}\delta$. После этого уравнение (3.13) перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_*}\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\gamma_* F\frac{\partial F}{\partial x_*}+\beta_*\frac{\partial^2 H(F)}{\partial x_*{}^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_*{}^2}=0$$

$$\gamma_*=\gamma\operatorname{sgn}\delta;\quad \beta_*=\beta\operatorname{sgn}\delta \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) совпадает со слабо неодномерным уравнением Беньямина — Оно для изотропной среды, полученным в [4], где исследована устойчивость алгебраического солитона относительно изгибных возмущений и показано, что солитон устойчив при $\beta_*>0$ и неустойчив при $\beta_*<0$. Таким образом, в анизотропной среде солитон устойчив при $\beta\delta>0$ и неустойчив при $\beta\delta<0$.

Отметим, что данный результат противоречит анализу устойчивости солитонов, проведенному в [11] на основе качественных и геометрических соображений, из которого следует, что при $|V|\gg a=4\beta/\gamma\lambda$ (a — амплитуда солитона) солитоны всегда устойчивы. По-видимому, в [11] допущена ошибка, связанная с тем, что при рассмотрении движения волнового фронта не учтен перенос участков фронта в касательном к фронту направлении, имеющий место в анизотропном случае.

5. Пример: случай постоянной альфвеновской скорости. Пусть $V_A=\mathrm{const}$. Переходя от z к новой независимой переменной $\rho_0=\rho_0(z)$ и учитывая определение N^2, перепишем (3.4) в виде

$$\frac{d}{d\rho_0}\left(\psi(\rho_0)\frac{d\Phi}{d\rho_0}\right)+\chi\Phi=0$$
$$\psi(\rho_0)=-\rho_0\frac{d\rho_0}{dz};\quad \chi=\frac{g}{c^2-V_A^2\cos^2\alpha} \tag{5.1}$$

причем условия при $z\to\pm\infty$ сводятся к условию регулярности $\Phi(\rho_0)$ при $\rho_0\to\rho_{0\pm}$.

В силу условия $d\rho_0/dz\to0$ при $|z|\to\infty$ имеем $\psi(\rho_{0\pm})=0$. Уравнение (5.1) принимает особенно простой вид, если положить $\psi=-(\rho_0-\rho_{0+})(\rho_0-\rho_{0-})/h$. Тогда (5.1) сводится к уравнению Лежандра

$$\frac{d}{dX}(1-X^2)\frac{d\Phi}{dX}+h\chi\Phi=0;\quad X=\frac{2\rho_0-\rho_{0-}-\rho_{0+}}{\rho_{0-}-\rho_{0+}}$$
$$z=h\ln\left\{\frac{\rho_0-\rho_{0+}}{\rho_{0-}-\rho_{0+}}\left(\frac{\rho_{0-}-\rho_0}{\rho_0-\rho_{0+}}\right)^m\right\};\quad m=\frac{\rho_{0-}}{\rho_{0-}-\rho_{0+}} \tag{5.2}$$

с условием регулярности при $X=\pm1$. Регулярные решения (5.2) существуют только при $h\chi=n(n+1)$ ($n=1, 2,\ldots$) и записываются в виде $\Phi=P_n(X)$, где $P_n(X)$ — полином Лежандра. Таким образом, существует счетное количество мод, распространяющихся со скоростями

$$c_n^2=V_A^2\cos^2\alpha+\frac{gh}{n(n+1)}$$

Функции $\{P_n(X(z))\}$ образуют полную систему на числовой оси в линейном подпространстве функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\frac{d\rho_0}{dz}dz=0$$

которому, как нетрудно видеть, должны удовлетворять решения последнего уравнения (3.3). При этом P_n имеет ровно n нулей.

С помощью непосредственных вычислений легко получаем

$$\beta_n=\frac{gh(\rho_{0+}+\rho_{0-})}{2n(n+1)c_nq_n};\quad \delta_n=\frac{gh}{2n(n+1)c_n^3}\left(V_A^2+\frac{gh}{n(n+1)}\right)$$

откуда следует, что $\beta_n\delta_n>0$ и солитоны устойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benjamin B. T.* Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. Pt 3. P. 559–592.
2. *Davis R. E., Acrivos A.* Solitary internal waves in deep water // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. Pt 3. P. 593–607.
3. *Ono H.* Algebraic solitary waves in stratified fluids // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 39. № 4. P. 1082–1091.

4. *Ablowitz M. J., Segur H.* Long internal waves in fluids of great depth // Stud. Appl. Math. 1980. V. 62. № 3. P. 249–262.
5. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 753–756.
6. *Korteweg D. J., Vries G., de.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. 1895. V. 39. P. 422–443.
7. *Giovanelli R. G.* Oscillations and waves in a sunspot // Solar Phys. 1972. V. 27. № 1. P. 71–79.
8. *Cally P. S., Adam J. A.* On photospheric and chromospheric penumbral waves // Solar Phys. 1983. V. 85. № 1. P. 97–111.
9. *Данов К. Д., Рудерман М. С.* Нелинейные волны на мелкой воде в присутствии горизонтального магнитного поля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 110–115.
10. *Юдович В. И.* Спектральные свойства осцилляционного дифференциального оператора на прямой // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 205–206.
11. *Островский Л. А., Шрира В. И.* Неустойчивость и саморефракция солитонов // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1976. Т. 71. Вып. 4. С. 1412–1420.

Москва

Поступила в редакцию
8.I.1987