МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1987

УДК 532.59

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ ПРИ ТРЕХВОЛНОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

МАРЧЕНКО А. В., СИБГАТУЛЛИН Н. Р.

В различных физических ситуациях возникает задача о взаимодействии в нелинейной среде трех волновых пакетов с характерными частотами ω_1, ω_2, ω_3 и волновыми векторами k_1, k_2, k_3, удовлетворяющими условиям синхронизма

$$\omega_3=\omega_1+\omega_2; \qquad k_3=k_1+k_2 \tag{0.1}$$

Физическая природа пакетов может быть совершенно различной. Взаимодействие, характеризующееся условиями (0.1), играет основную роль в процессах вынужденного и мандельштам-бриллюэновского рассеяния, в разнообразных процессах обмена энергией между волнами в плазме, в процессах взаимодействия между планетарными волнами в океане [1–4]. Впервые на возможность взаимодействия трех монохроматических волн, распространяющихся в тяжелой жидкости под ледяным покровом, было указано в [5]. Было показано, что в отсутствие диссипации развитие распадного процесса (0.1) приводит к периодическому обмену энергией между взаимодействующими волнами.

Исследование резонансного взаимодействия волновых пакетов конечной интенсивности было проведено в [6–8] методом обратной задачи рассеяния. Свойства решений системы, описывающей трехволновое взаимодействие, в случае, когда все коэффициенты при квадратичных членах имеют одинаковый знак, существенным образом зависят от соотношения между групповыми скоростями резонансно взаимодействующих волновых пакетов [6]. Если $\omega_3'\in(\omega_2', \omega_1')$, то осуществляется распадное взаимодействие, в противном случае не найдено точных нетривиальных решений системы без особенностей.

В [9] был предложен новый метод интегрирования некоторых типов нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на явной конструкции алгебр и групп Ли – Беклунда с помощью интегралов с ядром Коши. С помощью этого метода можно просто находить точные решения солитонного типа системы трехволнового взаимодействия.

В первой части данной работы исследуется эволюция первоначально сгенерированного плоского волнового пакета в тяжелой жидкости конечной глубины, находящейся подо льдом, в линейном приближении. Показано, что метод стационарной фазы неприменим в окрестности всех длин волн. В связи с этим картина эволюции начального возмущения в жидкости под ледяным покровом отлична от картины эволюции в жидкости со свободной границей.

Во второй части статьи исследуется взаимодействие трех волновых пакетов малой, но конечной амплитуды, спектр которых сосредоточен в ε-окрестности трех волновых чисел, удовлетворяющих (0.1). Выводится система нелинейных уравнений, описывающих это взаимодействие. С помощью метода, развитого в [9], найден класс точных решений данной системы и применительно к волнам подо льдом показано, что все найденные решения обладают особенностями в какой-то точке пространства в каждый фиксированный момент времени.

В третьей части статьи выведена система уравнений трехволнового взаимодействия, уточненная членами с высшими производными. Найден класс стационарных решений этой системы. Показано, что волновые пакеты с огибающими в виде солитонов распространяются с минимальной групповой скоростью без изменений формы. Доказательство устойчивости солитонов не приводится в связи с ограниченным объемом данной статьи.

1. Система уравнений, описывающая движения тяжелой жидкости под тонкой упругой пластиной, которая моделирует лед, в безразмерном виде выглядит следующим образом [5]

$$\varphi_{xx}+\varphi_{zz}=0, \qquad -H\lambda^{-1}<z<\varepsilon\eta$$

$$\varphi_z=0, \quad z=-H\lambda^{-1} \tag{1.1}$$
$$\eta_t+\varepsilon\eta_x\varphi_x=\varphi_z, \quad z=\varepsilon\eta$$
$$\varphi_t+{}^1/_2\varepsilon(\varphi_x^2+\varphi_z^2)+\eta+\gamma\eta_x^{(4)}+\beta\eta_t^{(2)}=f(t), \quad z=\varepsilon\eta$$

где φ — потенциал скоростей жидкости; η — возвышение пластины над положением равновесия; x, z, t — горизонтальная, вертикальная координаты и время; H, λ — глубина жидкости и характерный горизонтальный масштаб движения. В задаче существуют следующие параметры:

$$\varepsilon=a\lambda^{-1}, \quad \beta=\frac{\rho_i h}{\rho_w\lambda}, \quad \gamma=\frac{Eh^3}{12\rho_w g(1-\nu^2)\lambda^4} \tag{1.2}$$

Здесь a — характерная амплитуда колебаний; h — толщина ледяного покрова; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона льда, ρ_w, ρ_i — плотность жидкости и плотность льда.

Характерными параметрами морского льда являются величины [10]

$$\begin{aligned} &E=\alpha\cdot10^9 \text{ Н/м}^2 \quad (1<\alpha<10), \ \nu\approx0{,}3 \\ &h=\beta', \text{ м}, \quad 0{,}2<\beta'<10 \end{aligned} \tag{1.3}$$

В качестве характерного горизонтального масштаба выберем величину

$$\lambda=[Eh^3/(12\rho_w g(1-\nu^2))]^{1/4} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.3) в (1.4), имеем $\lambda\approx(\alpha\beta'^3)^{1/4}10$ м. Если $a<1$ м, то $\varepsilon\ll1$ и является малым параметром задачи. Будем считать, что глубина жидкости удовлетворяет условию $H>17{,}5(\alpha\beta'^3)^{1/4}$ м, тогда численное значение $\sqrt{thH\lambda^{-1}}$ лежит между 0,97 и 1 и в линейном дисперсионном соотношении [5] можно с высокой степенью точности заменить $\operatorname{th} kH\lambda^{-1}$ на 1 при $k\geqslant1$ и с учетом (1.4), (1.2) записать его в виде $\omega^2\approx k(1+k^4)$.

Применение метода стационарной фазы для изучения эволюции произвольного начального возмущения, которое можно записать в виде

$$\eta(x,0)=\int_0^\infty a(k)\exp ikx\,dk, \quad \arg a(k)=c(k)$$

приводит к тому, что в каждой точке пространства через достаточно большой промежуток времени будет наблюдаться квазимонохроматическая волна, волновой вектор которой находится по формуле [11]

$$\omega'(k)=(x+c'(k))/t\equiv x'/t$$

При $\omega'(k_0)<x'/t<H\lambda^{-1}$, $\omega''(k_0)=0$ это уравнение имеет два положительных корня $0<k_1<k_2$. Волну k_1 обычно называют гравитационной, а волну k_2 — изгибной. Если $x'/t>H\lambda^{-1}$, то имеется лишь один корень, соответствующий изгибной волне. Амплитуда квазимонохроматической волны в каждой точке пространства уменьшается пропорционально $[|t\omega''(k)-c''(k)|]^{-1/2}$. Отсюда видно, что вблизи $k=k'$ выполняется соотношение $t\omega''(k')-c''(k')=0$ и метод стационарной фазы дает физически бессмысленный результат. При $t\to\infty$ $k'\to k_0\approx(30)^{-1/4}$. Кривая $\omega'(k)=x'/t$ при условии $t\omega''(k)-c''(k)=0$ в плоскости (x, t) представляет собой каустику — кривую, разграничивающую область со сложной волновой картиной с соседней областью, не содержащей никаких волн. Вблизи каустики будет наблюдаться квазимонохроматическая волна, модулированная функцией Эйри, причем ее амплитуда будет уменьшаться пропорционально $[t\omega'''(k')-c'''(k')]^{-1/3}$ [11].

Таким образом, через достаточно большой промежуток времени волновой пакет, сгенерированный в начальный момент времени, будет представлять собой следующее образование. В области $x'/t>H\lambda^{-1}$ распространяются изгибные волны, их амплитуда затухает пропорционально $t^{-1/2}$. В области $\omega'(k_0)<x'/t<H\lambda^{-1}$ распространяются два типа волн — изгибные и гравитационные, их амплитуда затухает пропорционально $t^{-1/2}$. В окрестности $\omega'(k')=x'/t$ распространяются волны с волновым вектором k', модулированные функцией Эйри, их амплитуда уменьшается пропорционально $t^{-1/3}$. Отметим, что в жидкости со свободной границей условие $\omega''(k)=0$ не выполняется ни при каких значениях k.

2. В связи с тем что полная система уравнений гидродинамики (1.1) нелинейна, представляется интересным изучить влияние нелинейных эффектов на эволюцию волнового пакета. При распространении периодических волновых пакетов нелинейность приводит к периодическому обмену энергией между различными частями спектра волнового пакета, а именно между волнами, волновые векторы которых удовлетворяют условиям синхронизма (0.1) [5].

Ниже для уравнений гидродинамики будет рассмотрено взаимодействие волновых пакетов конечной интенсивности, спектр которых лежит в ε-окрестности резонансно взаимодействующих волн. Такие волновые пакеты можно представить в виде интегралов Фурье

$$\psi_j(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} a_j(\varepsilon t,k)\exp i(kx-\omega(k)t)\,dk,\quad j=1-3 \tag{2.1}$$

Здесь предполагается, что амплитуды a_j слабо зависят от времени и отличны от нуля лишь в ε-окрестности $k=k_j$. Разлагая в (2.1) $\omega(k)$ в ряд Тейлора, получаем, что ψ_j можно представить в виде

$$\psi_j(x,\,t)=\varphi_j(\varepsilon x,\,\varepsilon t)\exp i\theta_j,\quad \theta_j=k_jx-\omega(k_j)t$$

Если a_j удовлетворяют системе уравнений, описывающей взаимодействие трех монохроматических волн [5]

$$i\dot a_1=V_1a_2{}^*a_3,\quad \dot a_j=\frac{d}{dT}a_j,\quad T\equiv\varepsilon t$$

$$i\dot a_2=V_2a_1{}^*a_3,\quad V_j=V(k_j)>0,\quad i\dot a_3=V_3a_1a_2$$

то φ_j с точностью до $O(\varepsilon)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
i\varphi_{1T}+i\omega_1{}'\varphi_{1X}=V_1\varphi_2{}^*\varphi_3,\qquad \omega_j{}'=\frac{\partial}{\partial k}\omega(k_j)\\
i\varphi_{2T}+i\omega_2{}'\varphi_{2X}=V_2\varphi_1{}^*\varphi_3,\qquad X\equiv\varepsilon x\\
i\varphi_{3T}+i\omega_3{}'\varphi_{3X}=V_3\varphi_1\varphi_2
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Будем рассматривать волновые пакеты при волновых числах k, таких, что $k>k_0$ $\omega''(k_0)=0$. Отметим, что волновые векторы любых трех резонансно взаимодействующих волн удовлетворяют условию $k_1\leqslant k_*$, $k_2\geqslant k_*$, $k_3>k_*$, где k_* — волновой вектор волны, которая за бесконечно большое время передает всю свою энергию волне вдвое меньшей длины; k_* находится из условия $\omega(2k_*)=2\omega(k_*)$ и равно $\sim 14^{-1/4}$. Отсюда видно, что $k_*>$ $>k_0$ и условию $k_j>k_0$, $j=1-3$, можно удовлетворить, подбирая нужным образом k_1 и k_2. Так как $\omega''(k)>0$ при $k>k_0$, то $\omega_3{}'>\omega_2{}'>\omega_1{}'$. Система (2.2) может быть представлена как условие совместности двух линейных дифференциальных уравнений на матричную функцию $(3\times3)\psi$, зависящую от спектрального параметра λ [6—8]

$$\begin{gathered}
-i\psi_X=(J\lambda+[J,\,Q])\psi,\quad -i\psi_T=(I\lambda+[I,\,Q])\psi\\
J=\mathrm{diag}(a_1,\,a_2,\,a_3),\quad I=\mathrm{diag}(b_1,\,b_2,\,b_3)
\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$[A,\,B]=AB-BA$$

Действительно, после исключения перекрестным дифференцированием производных ψ_X, ψ_T из (2.3) имеем

$$[J, Q]_T-[I, Q]_X+i[[J, Q], [IQ]]=0 \tag{2.4}$$

Эта система совпадает с (2.2), если принять редукцию $Q^+=-BQB$ (плюс означает эрмитово сопряжение), $B=\mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ и положить $Q_{12}=\varphi_3{}^*$, $Q_{13}=\varphi_2{}^*$, $Q_{23}=\varphi_1$. Условия на групповые скорости $\omega_3'>\omega_2'>\omega_1'$ и условия $V_j>0$, $j=1-3$, выполняются автоматически, если a_j, b_j удовлетворяют неравенствам

$$a_1>a_2>a_3, \quad b_1>b_2>b_3,$$

$$a_2b_3-a_3b_2-a_1b_3+a_3b_1+a_1b_2-a_2b_1<0$$

Нахождение решений классов уравнений, куда входит и система (2.3), автоморфных данному $\psi^\circ(\lambda)$ по группе Ли — Беклунда, сводится к решению интегрального уравнения для матричной функции $\psi_+(\lambda)$, аналитичной внутри контура L, содержащего точки $\lambda=0$ и $\lambda=\mu$ [9]

$$\oint_L \psi_+(\lambda)\exp\Gamma(\lambda)\,[\psi^\circ(\lambda)\lambda(\lambda-\mu)]^{-1}\,d\lambda=0 \tag{2.5}$$

Матричная функция $\Gamma(\lambda)$ удовлетворяет редукции $B\Gamma^+B=-\Gamma$. Условие (2.5) можно истолковать как условие существования аналитической вне контура L матричной функции $\chi(\lambda)$, линейно связанной на контуре L с функцией $\psi_+(\lambda)$

$$\chi=\psi_+\exp\Gamma(\psi^\circ)^{-1} \tag{2.6}$$

Принимая для χ каноническую нормировку $\chi(\infty)=E$, для искомого решения Q имеем $Q=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(\chi-E)$. Используя (2.6), можно написать

$$\oint_L \psi_+\exp\Gamma(\psi^\circ\lambda)^{-1}\,d\lambda=2\pi i\chi(\infty)=2\pi i \tag{2.7}$$

Уравнения (2.5) с условием (2.7) образуют замкнутую систему для нахождения ψ_+, после чего Q находится по формуле

$$Q=\oint_L \psi_+\exp\Gamma(\psi^\circ)^{-1}\,d\lambda \tag{2.8}$$

В качестве затравочного решения ψ° возьмем простейшее: $\psi^\circ=\exp i\lambda(JX+IT)$. Из условия $B\Gamma^+B=-\Gamma$ следует, что $\Gamma=B\Delta$, где Δ — произвольная антиэрмитова матрица. Экспонента от Γ $\gamma=\exp\Gamma$, очевидно, удовлетворяет условиям

$$B\gamma^+B\gamma=E \tag{2.9}$$

Покажем возможность данного подхода на примере явного построения трехсолитонного решения. Итак, пусть

$$\gamma=\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda-a^*}{\lambda-a}, \frac{\lambda-b^*}{\lambda-b}, \frac{\lambda-c^*}{\lambda-c}\right)\alpha$$

где α — постоянная матрица, удовлетворяющая условиям (2.9). При таком виде γ условия (2.9) удовлетворяются автоматически. Обозначим $\theta=JX+IT$. Тогда по теореме о вычетах уравнение (2.5) перепишется в виде

$$\psi_+(\mu)\gamma(\mu)e^{-i\mu\theta}=\mu\left[\frac{Q_1}{a(\mu-a)}+\frac{Q_2}{b(\mu-b)}+\frac{Q_3}{c(\mu-c)}\right]+Q_0;$$
$$Q_1=\psi_+(a)\,\mathrm{diag}(a-a^*, 0, 0)\,\alpha e^{-i\theta a} \tag{2.10}$$

$$Q_2 \equiv \psi_+(b)\,\mathrm{diag}(0,\, b-b^*,\, 0)\,\alpha e^{-i\theta_b}$$

$$Q_3 \equiv \psi_+(c)\,\mathrm{diag}(0,\, 0,\, c-c^*)\,\alpha e^{-i\theta_c}$$

$$Q_0 \equiv \psi_+(0)\,\mathrm{diag}\left(\frac{a}{a^*}, \frac{b}{b^*}, \frac{c}{c^*}\right)\alpha$$

Из условия канонической нормировки (2.7) имеем

$$\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{b} + \frac{Q_2}{c} + Q_0 = E \tag{2.11}$$

По известным Q_1, Q_2, Q_3 искомое решение Q, согласно (2.8), найдется по формуле $Q=Q_1+Q_2+Q_3$. Исключая из (2.10) Q_0 с помощью (2.11), имеем

$$\psi_+(\mu)\,\mathrm{diag}\left(\frac{\mu-b^*}{\mu-a}, \frac{\mu-b^*}{\mu-b}, \frac{\mu-c^*}{\mu-c}\right) = \left(E + \frac{Q_1}{\mu-a} + \frac{Q_2}{\mu-b} + \frac{Q_3}{\mu-c}\right) e^{i\mu\theta} B\alpha^+ B \tag{2.12}$$

Используя вырождение матриц $\gamma(\mu)$ при $\mu=a^*$, b^*, c^*, из (2.12) получаем девять нетривиальных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}\left(E + \frac{Q_1}{a^*-a} + \frac{Q_2}{a^*-b} + \frac{Q_3}{a^*-c}\right) e^{ia^*\theta} B\alpha^+ B\,\mathrm{diag}(1,0,0) = 0 \\ \left(E + \frac{Q_1}{b^*-a} + \frac{Q_2}{b^*-b} + \frac{Q_3}{b^*-c}\right) e^{ib^*\theta} B\alpha^+ B\,\mathrm{diag}(0,1,0) = 0 \\ \left(E + \frac{Q_1}{c^*-a} + \frac{Q_2}{c^*-b} + \frac{Q_3}{c^*-c}\right) e^{ic^*\theta} B\alpha^+ B\,\mathrm{diag}(0,0,1) = 0\end{gathered} \tag{2.13}$$

Введем матрицы (Y_{kj}) и (S_{kj}), k, $j=1-3$, по следующим формулам:

$$Y_{k1} = (a-a^*)\,\psi_{+k1}(a), \quad Y_{k2} = (b-b^*)\,\psi_{+k2}(b)$$

$$Y_{k3} = (c-c^*)\,\psi_{+k3}(c), \quad S_{kj} = \alpha_{kj}\exp(-i\theta_j a_k'),$$

$$a_1' = a, \quad a_2' = b, \quad a_3' = c.$$

Тогда из (2.13) следует, что (Y_{kj}) удовлетворяет линейному уравнению для квадратных (3×3) матриц

$$BS^+B = YA, \quad A_{ij} = \frac{(SBS^+B)_{ij}}{a_j'^* - a_i'} \tag{2.14}$$

По известной матрице Y решение для Q можно найти по формуле $Q=YS$.

Таким образом, проблема сводится к задаче обращения матрицы A. Отметим, что трехполюсное решение, когда все полюсы сливаются в один, соответствует тривиальному. В частном случае, когда отлично от нуля только одно из чисел a, b, c, скажем, $a_k'=a$, из (2.14) получаются известные однополюсные решения Захарова — Манакова [6, 7]

$$Q_{lm} = r_l(a-a^*)\,\alpha_{kl}^*\alpha_{km}\exp i(\theta_l a^* - \theta_m a)\,\left\{\sum_{j=1}^{3} r_j|\alpha_{kj}^*|^2 \exp[i\theta_j(a^*-a)]\right\}^{-1} \tag{2.15}$$

Здесь $r_1=r_2=r_3=1$. В (2.15) суммирование по k отсутствует. Отметим, что при $\alpha_{k1}\neq0$ решения (2.15) при всех T имеют особенность при некотором X из-за нуля в знаменателе. Напомним, что из условия $B\alpha^+B\alpha = E$ следует

$$\sum_{j=1}^{3} r_j|\alpha_{kj}|^2 = r_k.$$

Рассмотрим теперь двухполюсные решения, скажем, $a\neq0$, $b\neq0$, $c=0$. Тогда из (2.14) имеем

$$
\begin{gathered}
Q_{ij}=r_i\{-\eta_{12}\eta_{21}p_{11}p_{12}+\eta_1\eta_2p_{12}p_{21}\}^{-1}\times\\
\times\{\alpha_{1i}{}^*e^{i\theta_ia^*}[-\eta_{12}\eta_{21}\eta_1\alpha_{1i}e^{-i\theta_ja}p_{22}+\eta_1\eta_2\eta_{21}\alpha_{2j}e^{-i\theta_jb}p_{12}]+\\
+\alpha_{2i}{}^*e^{i\theta_ib^*}[\eta_1\eta_2\eta_{12}\alpha_{1j}e^{-i\theta_ja}p_{21}-\eta_2\eta_{12}\eta_{21}\alpha_{2j}e^{-i\theta_jb}p_{22}]\}
\end{gathered}
\tag{2.16}
$$

$$\eta_1=a-a^*,\quad \eta_2=b-b^*,\quad \eta_{12}=-\eta_{21}{}^*=a-b^*$$

$$p_{11}=\sum_{j=1}^{3}r_j|\alpha_{1j}|^2e^{i\theta_j(a^*-a)},\quad p_{22}=\sum_{j=1}^{3}r_j|\alpha_{2j}|^2e^{i\theta_j(b^*-b)},$$

$$p_{12}=p_{21}{}^*=\sum_{j=1}^{3}r_j\alpha_{1j}\alpha_{2j}{}^*e^{i\theta_j(b^*-a)}$$

При слиянии полюсов: $\eta_1=\eta_2=\eta_{21}=\eta_{21}\equiv\eta=a-a^*$, выражение (2.16) может быть записано в виде

$$Q_{ij}=r_i\eta\alpha_{si}{}^*\alpha_{tj}e^{i(\theta_ia^*-\theta_ja)}(p^{-1})^{st},\quad s,\ t=1,\ 2$$

Определитель (p_{st}) равен

$$
\begin{gathered}
\sum_{k<j}^{3}r_kr_j|\alpha_{1j}\alpha_{2k}-\alpha_{1k}\alpha_{2j}|^2\exp i(\theta_j+\theta_k)=r_2r_3\exp i(\theta_2+\theta_3)|\alpha_{31}|^2+\\
+r_1r_2\exp i(\theta_1+\theta_2)|\alpha_{33}|^2+r_1r_3\exp i(\theta_1+\theta_3)|\alpha_{32}|^2
\end{gathered}
$$

В случае редукции $B=\mathrm{diag}(-1,\ 1,\ 1)$ это выражение при $\alpha_{31}\neq0$ в любой момент времени T в некоторой точке пространства X обращается в ноль. Это говорит о том, что двухполюсные решения со слившимися полюсами всегда обладают особенностями, за исключением случая $\alpha_{31}=0$. В этом случае, так же как и в случае односолитонных решений без особенностей ($\alpha_{k1}=0$), решение вырождается в солитоны простой волны φ_1, а $\varphi_2=\varphi_3\equiv0$. В окрестности особенностей существенны высшие производные, поэтому система уравнений (2.2) неверна в данном приближении и ее надо подправлять членами с высшими производными.

3. Если в разложении $\omega(k)$ в (2.1) учесть члены со вторыми производными, то, проведя такие же рассуждения, как в разд. 2, получим, что φ_j удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$
\begin{gathered}
i\varphi_{jT}+i\omega_j{}'\varphi_{jX}-{}^1/_2\varepsilon\omega_j{}''\varphi_{jXX}=V_jN_j\\
N_1=\varphi_2{}^*\varphi_3,\quad N_2=\varphi_1{}^*\varphi_3,\quad N_3=\varphi_1\varphi_2\\
\omega_j{}''=\frac{\partial^2}{\partial k^2}\omega(k_j)
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Сделаем в (3.1) следующую замену переменных: приведем (3.1) к виду

$$X\to X-vT,\quad \varphi_j\to\varphi_j\exp i(r_jX+s_jT)$$

$$r_1+r_2=r_3,\quad s_1+s_2=s_3$$

$$i\varphi_{jT}+i\tau_j\varphi_{jX}+\alpha_j\varphi_j-{}^1/_2\varepsilon\omega_j{}''\varphi_{jXX}=V_jN_j \tag{3.2}$$

$$
\begin{gathered}
\tau_j=v+\omega_j{}'-\varepsilon\omega_j{}''r_j\\
\alpha_j=-s_i-\omega_j{}'r_j+{}^1/_2\varepsilon\omega_j{}''r_j^2
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия $\tau_j=0$, $j=1, 2, 3$, которые представляют собой три уравнения на три неизвестные величины v, r_1, r_2. Решая их, получаем

$$v=(\omega_3''\omega_2''\omega_1'+\omega_3''\omega_1''\omega_2'-\omega_1''\omega_2''\omega_3')N^{-1}$$
$$r_1=(\omega_3''(\omega_2'-\omega_1')+\omega_2''(\omega_1'-\omega_3'))(\varepsilon N)^{-1}$$
$$r_2=(\omega_3''(\omega_1'-\omega_2')+\omega_1''(\omega_2'-\omega_3')(\varepsilon N)^{-1}$$
$$N=\omega_1''\omega_2''-\omega_1''\omega_3''-\omega_2''\omega_3'' \tag{3.4}$$

Стационарные решения (3.2) при условии (3.4) удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\alpha\varphi_j-{}^1/_2\varepsilon\varphi_{jXX}=V_j/\omega_j''N_j,\quad j=1-3 \tag{3.5}$$

$$\alpha=\frac{\alpha_1}{\omega_1''}=\frac{\alpha_2}{\omega_2''}=\frac{\alpha_3}{\omega_3''} \tag{3.6}$$

Решения (3.5) будем искать в виде

$$\varphi_j=\beta\sqrt{\frac{V_j}{V_kV_l}}\varphi\quad (j,k,l)=(1,2,3) \tag{3.7}$$

Из (3.5), (3.7) следует, что φ можно искать в виде действительной функции, удовлетворяющей уравнению

$$-{}^1/_2\varphi_{XX}+\alpha\varphi=\beta\varphi^2 \tag{3.8}$$

Рассмотрим случай $k_1=k_2=k_*$. Из разрешения (0.1) следует, что $k_*\approx\approx0{,}5$ и $\alpha\approx-0{,}09\varepsilon^{-1}$. В этом случае ограниченными решениями (3.8) являются периодические функции с периодом P

$$\begin{gathered}\varphi=b+(a-b)\,\mathrm{cn}^2\left[X\sqrt{\frac{a-c}{b}},s\right],\quad s^2=\frac{a-b}{a-c}\\ P=4\sqrt{\frac{3}{2(a-c)}}\int_0^1\frac{dq}{\sqrt{(1-s^2q^2)(1-q^2)}}\end{gathered} \tag{3.9}$$

Постоянные $a>b>c$ являются корнями уравнения $2\alpha y^2-{}^4/_3\beta y^3+C=0$, где C — постоянная интегрирования.

Эти решения соответствуют волнам огибающих в виде кноидальных волн. Параметры этих волн (длина, период, амплитуда) зависят от двух констант β, C и от малого параметра ε.

Рассмотрим случай взаимодействия волновых пакетов, спектр одного из которых лежит в окрестности $k=k_0$. В этом случае стационарные решения (3.2) удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}-{}^1/_2\varepsilon\omega_2''\varphi_{2XX}+\alpha_2\varphi_2=V_2V_1\alpha_1^{-1}|\varphi_3|^2\varphi_2\\ -{}^1/_2\varepsilon\omega_3''\varphi_{3XX}+\alpha_3\varphi_3=V_3V_1\alpha_1^{-1}|\varphi_2|^2\varphi_3\end{gathered} \tag{3.10}$$

Из условия $\omega''(k_0)=0$ получаем, что $k_0\approx0{,}4$, $\omega'(k_0)\approx0{,}9$. Из условия $\tau_j=0$ имеем $v=-\omega'(k_0)$. Решение системы уравнений (3.10) будем искать в виде

$$\varphi_2^{(1)}=a_2\,\mathrm{ch}^{-1}\,bX,\quad \varphi_3^{(1)}=a_3\,\mathrm{ch}^{-1}\,bX \tag{3.11}$$

$$\varphi_2^{(2)}=A_2\,\mathrm{th}\,BX,\quad \varphi_3^{(2)}=A_3\,\mathrm{th}\,BX \tag{3.12}$$

Подставляя (3.11) и (3.12) в (3.10), получаем соотношения на a_2, a_3,

b и A_2, A_3, B

$$2\alpha_2=\varepsilon\omega_2''b^2,\quad \alpha_1\omega_2''b^2=a_3^2V_1V_2$$
$$2\alpha_3=\varepsilon\omega_3''b^2,\quad \alpha_1\omega_3''b^2=a_2^2V_1V_3 \tag{3.13}$$

$$\alpha_2=-\varepsilon\omega_2''B^2,\quad \alpha_1\omega_2''B^2=-V_1V_2A_3^2$$
$$\alpha_3=-\varepsilon\omega_3''B^2,\quad \alpha_1\omega_3''B^2=-V_1V_3A_2^2 \tag{3.14}$$

Из (3.13), (3.14) видно, что в случае $\alpha_j>0$ система (3.10) имеет решения в виде солитонов (3.11), а в случае $\alpha_j<0$ – решения типа ударных волн со структурой (3.12). Отметим, что α_j зависят от двух произвольных постоянных s_1 и s_2. Из (3.13), (3.14) следует, что $\omega_3''\alpha_2=\omega_2''\alpha_3$. Подставляя сюда зависимость α_j от $s_{1,2}$ из (3.6), имеем

$$s_1=s_2(\omega_3''/\omega_2''-1)+\omega_3''/\omega_2''(\omega_2'r_2-{}^1/_2\varepsilon\omega_2''r_2^2)-$$
$$-\omega_3'r_3+{}^1/_2\varepsilon\omega_3''r_3^2 \tag{3.15}$$

С учетом (3.13)–(3.15) условие $\alpha_j\gtrless0$ можно переписать в виде

$$-s_2-\omega_2'r_2+{}^1/_2\varepsilon\omega_2''r_2^2\gtrless0$$

$$-s_2\left(\frac{\omega_3''}{\omega_2''}-1\right)-\frac{\omega_3''}{\omega_2''}(\omega_2'r_2-{}^1/_2\varepsilon\omega_2''r_2^2)+\omega_3'r_3-{}^1/_2\varepsilon\omega_3''r_3^2-\omega_1'r_1\gtrless0$$

Так как $\omega_3''>\omega_2''$, этим двум условиям всегда можно удовлетворить, подбирая нужным образом s_2.

Доказательство устойчивости солитонов (3.11) в данной работе опускается в связи с ограниченным объемом данной статьи. Отметим, что существуют решения системы (3.2), близкие к солитонам (3.11) и зависящие от произвольной достаточно медленно меняющейся функции времени. На основании этого можно сказать, что учет нелинейных эффектов приводит к тому, что из «хвоста» первоначально сгенерированного локализованного возмущения с течением времени формируется солитоноподобное образование, перемещающееся в пространстве с минимальной групповой скоростью $\omega'(k_0)$. Это образование представляет собой три связанных волновых пакета со спектром, расположенным в окрестности $k_1=k_0\approx0{,}4$, $k_2\approx0{,}6$, $k_3\approx1$, и огибающей в виде солитонов (3.11) или в виде близких к ним кривых.

Авторы благодарят А. А. Бармина, А. Г. Куликовского за полезные замечания по результатам данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966. 424 с.
2. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
3. *Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Филлипчук Т. С.* О новом классе связанных солитонов в диспергирующей среде с квадратичной нелинейностью // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1978. Т. 19. № 4. С. 91–98.
4. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 2. М.: Мир, 1981. 365 с.
5. *Марченко А. В., Сибгатуллин Н. Р.* О резонансном взаимодействии волн в тяжелой жидкости, находящейся под упругой пластиной // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. 1986. № 4. С. 94–97.
6. *Захаров В. Е., Манаков С. В.* К теории резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1975. Т. 69. Вып. 5. С. 1654–1673.
7. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: Методы обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
8. *Каир D. J., Reiman A., Bers A.* Space-time evolution of nonlinear three-wave interactions. I. Interaction in a homogeneous medium // Rev. Modern Phys. 1979. V. 51. № 2.
9. *Сибгатуллин Н. Р.* Группы Ли – Беклунда некоторых модельных уравнений механики сплошной среды и классических полей // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 2.
10. *Богородский В. В., Гаврило В. П.* Лёд. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеоиздат. 1980. 384 с.
11. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.I.1986