

УДК 532.546

## ФИЛЬТРАЦИЯ И ТЕПЛООБМЕН В ОКРЕСТНОСТИ ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА

КРИВОШЕИН Б. Л., МАРОН В. И., РАДЧЕНКО В. П.,  
ФЕДОРОВА А. А.

Рассматриваются фильтрация и теплообмен в окрестности подземного трубопровода на обводненных участках трассы. Фильтрация обусловлена тепловой конвекцией жидкости в поле сил тяжести, связанной с охлаждением или нагревом ее вблизи поверхности трубопровода.

Исследование представляет практический интерес в связи с проектированием и эксплуатацией трубопроводов Западной Сибири, проложенных на обводненной территории [1]. Обычно при исследовании теплообмена трубопровода с грунтом используют модель «эквивалентной» теплопроводности, согласно которой перенос тепла во влажных породах происходит только путем теплопроводности [1–4]. Для обводненного грунта такая постановка оказывается недостаточной. Здесь необходимо учитывать тепловую конвекцию жидкости.

Для описания процесса теплообмена в обводненных грунтах формулируется плоская задача о движении и теплопереносе в полубесконечной, двусвязной области, ограниченной свободной поверхностью грунта и поверхностью трубы. Движение жидкости описывается уравнениями фильтрации с учетом сил тяжести, а распределение температуры – уравнением теплопроводности с учетом конвективных членов. Плотность жидкости предполагается зависящей от температуры. Уравнение неразрывности принято в форме, предложенной Буссинеском. На поверхности трубы задается постоянная температура, отличная от температуры в невозмущенной области течения. Свободная поверхность грунта считается либо проницаемой, либо не проницаемой для жидкости. Соответственно этому формулируются кинематические условия и условия теплообмена.

1. Фильтрация жидкости в окрестности трубопровода возникает в результате ее разогрева и изменения плотности. Движение жидкости описывается законом Дарси

$$-\frac{\mu}{k} \mathbf{V} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (1.1)$$

Здесь  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $k$  – коэффициент проницаемости грунта;  $\mathbf{V}$  – вектор скорости;  $P$  – давление в жидкости;  $\rho$  – плотность жидкости, зависящая от температуры  $T$ ;  $\mathbf{g}(0, g)$  – вектор ускорения силы тяжести.

Плотность жидкости зависит от температуры. При этом для воды эта зависимость не монотонная, так как существует значение температуры  $T_i$ , для которой плотность воды достигает абсолютного максимума.

В соответствии с приближением Буссинеска будем считать, что отклонениями плотности от начального значения  $\rho_0$  из-за изменения температуры можно пренебречь во всех уравнениях, кроме уравнения движения (1.1). Тогда уравнение неразрывности для жидкости будет иметь вид

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1.2)$$

Отсюда для распределения давления получается следующее уравнение:

$$\Delta P = \operatorname{div} \rho \mathbf{g} \quad (1.3)$$

Уравнение притока тепла запишем в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 c_f (\mathbf{V} \nabla T) = \lambda \Delta T \quad (1.4)$$

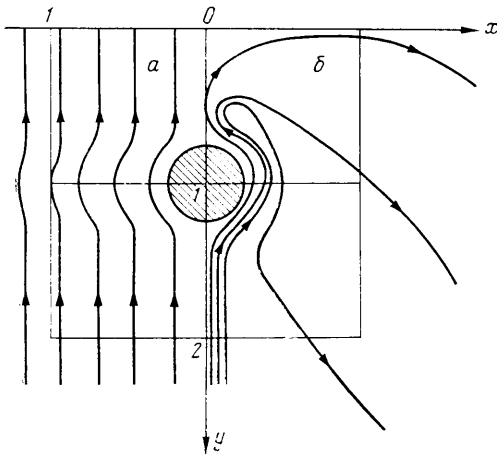
$$\rho c = \rho_s c_s (1-m) + \rho_0 c_f m$$

$$\lambda = \lambda_s (1-m) + \lambda_f m$$

Здесь  $\rho c$  — теплоемкость единицы объема водонасыщенного грунта;  $c_f$  — удельная теплоемкость воды;  $\rho_s c_s$  — теплоемкость единицы объема грунта;  $m$  — пористость;  $\lambda_s$  и  $\lambda_f$  — коэффициенты теплопроводности грунта и воды;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности водонасыщенного грунта.

Уравнения (1.1)–(1.4) описывают тепловую конвекцию в пористой среде.

2. Сформулируем предельные условия задачи. Принимаем, что начальная температура грунта постоянна. Область решения представлена на фиг. 1



Фиг. 1

$$T = T_0, \quad t \leq 0, \quad Y > 0, \quad \sqrt{X^2 + Y^2} \rightarrow \infty$$

Начальное распределение давления жидкости в грунте считаем гидростатическим

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \rho_0 g, \quad t \leq 0, \quad Y > 0,$$

$$\sqrt{X^2 + Y^2} \rightarrow \infty$$

На поверхности трубопровода задается постоянная температура

$$T = T_*, \quad t \geq 0, \quad \sqrt{X^2 + (Y-h)^2} = b$$

а также условие непроницаемости поверхности трубопровода

$$V_n = 0, \quad t \geq 0, \quad \sqrt{X^2 + (Y-h)^2} = b$$

Здесь  $h$  — расстояние от поверхности грунта до оси трубопровода;  $b$  — радиус трубопровода;  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к поверхности трубопровода.

На поверхности грунта рассматриваются следующие граничные условия, отвечающие различным реальным ситуациям теплообмена.

Поверхность грунта считается проницаемой для жидкости и на ней задаются граничные условия первого рода для температуры и постоянное давление. Имеем

$$T = T^+, \quad t > 0, \quad Y = 0$$

$$P = P^+, \quad t > 0, \quad Y = 0$$

Поверхность грунта полагается непроницаемой и на ней задается граничное условие третьего рода для температуры и постоянное давление. Имеем

$$\rho_0 c_f V_y T - \lambda \frac{\partial T}{\partial Y} = \alpha (T^+ - T), \quad t > 0, \quad Y = 0 \quad P = P^+, \quad t > 0, \quad Y = 0$$

где  $V_y$  — проекция вектора скорости фильтрации на ось  $Y$ ;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи;  $T^+$  — температура воздуха.

Если поверхность грунта непроницаема для жидкости, то рассматри-

ваются следующие условия:

$$V_Y=0, \quad T=T^+, \quad t>0, \quad Y=0$$

или

$$V_Y=0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial Y} = \alpha(T^+ - T), \quad t>0, \quad Y=0$$

Условия на бесконечности имеют вид

$$T=T_0, \quad \frac{\partial P}{\partial Y} = \rho_0 g, \quad t>0, \quad \sqrt{X^2+Y^2} \rightarrow \infty$$

Тепловые потери с единицы поверхности трубопровода в грунт определяются из решения задачи по закону Фурье

$$Q = -[\lambda \partial T / \partial n]_{\Gamma}$$

где  $\Gamma$  — контур трубы в плоскости  $XOY$ .

Средние по поверхности тепловые потоки с единицы поверхности трубопровода в грунт вычисляются по формуле

$$\langle Q \rangle = -\frac{\lambda}{2\pi b} \int_{\Gamma} \partial T / \partial n \, dl$$

В дальнейшем считаем  $T_0 > T_i$  и  $T > T_0$ .

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{h}, & y &= \frac{Y}{h}, & \tau &= \frac{\lambda t}{\rho_0 c_f h^2}, & \theta &= \frac{T - T_0}{T_* - T_0} \\ R &= \frac{b}{h}, & v_x &= \frac{\rho_0 c_f h}{\lambda} V_x, & v_y &= \frac{\rho_0 c_f h}{\lambda} V_y \\ p &= \frac{\rho_0 c_f k}{\lambda \mu} P_*, & q &= \frac{Qh}{\lambda(T_* - T_0)}, & \langle q \rangle &= \frac{\langle Q \rangle h^2}{\lambda(T_* - T_0)} \end{aligned}$$

Здесь  $P_* = P - P^+ - \rho_0 g Y$  — отклонение давления от гидростатического.

3. Стационарное решение рассматриваемой задачи о теплообмене в окрестности трубопровода ищется в двусвязной полубесконечной области. Переход к биполярным координатам позволяет упростить область решения, преобразовав ее во внутренность прямоугольника.

Связь между биполярными и декартовыми координатами имеет вид

$$x + iy = ci \operatorname{ctR}(\alpha + i\beta), \quad c = \sqrt{1 - R^2}$$

Область решения в плоскости  $(\alpha, \beta)$  ограничена отрезками прямых  $\alpha=0, \alpha=\alpha_0, \beta=0, \beta=\pi$ , где

$$\alpha_0 = \ln \left( \frac{1}{R} + \sqrt{(1/R)^2 - 1} \right)$$

При этом поверхность трубы и свободная поверхность грунта переходят в противоположные стороны прямоугольника. Подобное изменение области решения значительно упрощает применение численных методов для отыскания решения.

Система уравнений, описывающая теплообмен и конвекцию в биполярных координатах запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} &= - \left( \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \beta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right) + \frac{\theta \operatorname{Ra} c}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} \\ &\quad \left[ \sin \beta \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + (\operatorname{ch} \alpha \cos \beta - 1) \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2} = \frac{Ra c}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} \left[ (\operatorname{ch} \alpha \cos \beta - 1) \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \sin \beta \sin \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right]$$

$$v_x = \frac{1}{c} \left[ \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \frac{\partial p}{\partial x} - (\operatorname{ch} \alpha \cos \beta - 1) \frac{\partial p}{\partial \beta} \right]$$

$$v_y = -Ra \theta + \frac{1}{c} \left[ (\operatorname{ch} \alpha \cos \beta - 1) \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \frac{\partial p}{\partial \beta} \right]$$

$$Ra = \frac{k \rho_0^2 c_f g \beta h (T_* - T_0)}{\lambda \mu}$$

Граничные условия таковы. Условия теплообмена первого рода ( $v_\beta \neq 0$ )

$$\theta = \theta^+, \quad p = 0, \quad \tau > 0, \quad \alpha = 0, \quad 0 \leq \beta \leq \pi$$

Условия теплообмена третьего рода ( $v_\beta \neq 0$ )

$$-Ra \theta (\theta_* + \theta) + \frac{1}{c} (\theta_* + \theta) (\cos \beta - 1) \frac{\partial p}{\partial \alpha} -$$

$$- \frac{1 - \cos \beta}{c} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = Nu (\theta^+ - \theta), \quad p = 0$$

$$\alpha = 0, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad \theta_* = \frac{T_0}{T_* - T_0}, \quad Nu = \frac{\alpha h}{\lambda}$$

Условия теплообмена первого рода ( $v_\beta = 0$ )

$$\theta = \theta^+, \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha} = Ra \frac{c \theta}{\cos \beta - 1}, \quad \alpha = 0, \quad 0 \leq \beta \leq \pi$$

Условия теплообмена третьего рода ( $v_\beta = 0$ )

$$\frac{1 - \cos \beta}{c} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = -Nu (\theta^+ - \theta), \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha} = Ra \frac{c \theta}{\cos \beta - 1}$$

$$\alpha = 0, \quad 0 \leq \beta \leq \pi$$

На поверхности трубы

$$\frac{\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta}{c} \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{Ra}{R} \left( \frac{c \operatorname{sh} \alpha_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta} - 1 \right)$$

$$\theta = 1, \quad \alpha = \alpha_0, \quad 0 \leq \beta \leq \pi$$

Условия симметрии

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \beta} = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta = \pi, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0$$

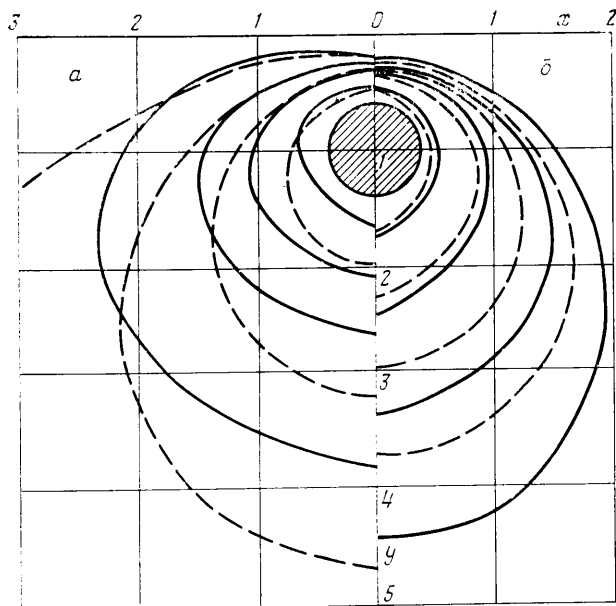
Тепловые потери с единицы поверхности трубопровода в грунт

$$q = \frac{\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta}{c} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_0}$$

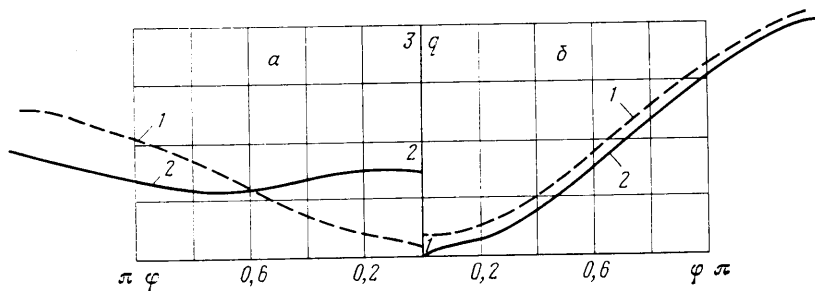
Средние по поверхности тепловые потери равны

$$\langle q \rangle = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_0} d\beta$$

4. Для рассматриваемой системы уравнений, описывающих теплоперенос в грунте с учетом свободной конвекции, не представляется возможным получить аналитические решения. Поэтому для решения сформулированных задач были предложены численные алгоритмы, позволяющие опреде-



Фиг. 2



Фиг. 3

лить температурное поле, распределение давления, линии тока грунтовой жидкости, поля скоростей, а также средние и локальные тепловые потери от трубопровода в грунт.

Были составлены конечно-разностные аппроксимации уравнений и краевых условий. Решение системы конечно-разностных уравнений с соответствующими граничными условиями находится методом итераций. При этом применяется поточечный метод верхней релаксации, обладающий более высокой скоростью сходимости итераций по сравнению с другими подобными методами [5]. Релаксационный параметр принимался равным 1,5. Расчеты выполнялись на ЭВМ ЕС-1033.

5. С использованием полученных зависимостей были рассчитаны поля температуры, давления и скорости движения жидкости при различных значениях внешних параметров и числа Рэлея, а также тепловые потоки от поверхности трубы. Результаты расчетов графически представлены на фиг. 1–3.

На фиг. 1, а представлены линии тока при граничном условии теплообмена 1-го рода на проницаемой для жидкости поверхности грунта. При этом здесь и далее  $Ra=2$ ,  $T^+=283$  К,  $T_0=278$  К,  $T_*=313$  К. На фиг. 1, б представлены линии тока при условии теплообмена 3-го рода и непроницаемой поверхности грунта ( $Ra=0,2$ ;  $T^+=283$  К,  $T_0=278$  К,  $T_*=313$  К). Изотермы при граничном условии 1-го рода и проницаемой поверхности грунта представлены на фиг. 2, а. Сплошные линии — с учетом конвекции,

пунктирные — без учета конвекции. Изотермы при условии теплообмена 1-го рода для непроницаемой свободной поверхности изображены на фиг. 2, б. На фиг. 3, а представлено распределение безразмерного теплового потока по периметру при условии теплообмена 1-го рода и проницаемой поверхности грунта, кривая 1 — без учета конвекции, 2 — с учетом конвекции. Распределение теплового потока по периметру трубы при граничном условии 3-го рода и непроницаемой поверхности трубы представлено на фиг. 3, б.

Из графиков видно, что в случае проницаемой поверхности грунта в верхней части трубопровода поток уменьшается, а в нижней части трубы увеличивается. В случае непроницаемой поверхности грунта поток тепла уменьшается по всему периметру трубы.

В целом свободная конвекция жидкости в окрестности трубопровода приводит к существенному перераспределению тепловых потоков по периметру трубопровода по сравнению с теплообменом без учета конвекции. Так, в случае проницаемой поверхности увеличивается теплоотдача в нижней части трубы ( $\varphi=0$ ) и распределение потока тепла в грунт по периметру становится более равномерным, чем в неводонасыщенном грунте, где отсутствует тепловая конвекция.

Особенно заметно влияние на величину потоков в грунт оказывает тепловая конвекция в случае свободной поверхности грунта, непроницаемой для воды. Здесь при  $Ra \geq 2$  тепловой поток может уменьшиться на 20–30% по сравнению с потоком тепла в «сухом» грунте. Поэтому при проведении тепловых расчетов в обводненных грунтах необходимо учитывать свободную конвекцию жидкости.

При малых числах Рэлея решение задачи можно искать в виде рядов по параметру  $Ra$ . При этом для отыскания коэффициентов ряда получается система неоднородных уравнений Пуассона. Нулевое приближение соответствует уравнению теплообмена в постановке Форхгеймера, не учитывающей свободную конвекцию [4]. Неоднородные части уравнений Пуассона для последующих приближений давления и температуры вычисляются с помощью решения задач более низкого приближения.

Два первых члена ряда в разложении по числу Рэлея дают совпадение с результатами численного решения стационарной задачи в пределах 10% при  $Ra < 0,2$  в зависимости от вида краевых условий задачи и конкретных значений параметров в этих условиях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кривошеин Б. Л. Теплофизические расчеты газопроводов. М.: Недра, 1982. 168 с.
2. Дубина М. М., Красовицкий Б. А., Лозовский А. С., Попов Ф. С. Тепловое и механическое взаимодействие инженерных сооружений с мерзлыми грунтами. Новосибирск: Наука, 1977. 141 с.
3. Новаковский В. И. Аналитический метод расчета нестационарного теплообмена в грунте с трубопроводом // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1985. № 1. С. 152–159.
4. Кривошеин Б. Л., Юфин В. А., Агликин В. М. Стационарные тепловые и гидравлические режимы магистральных нефтепроводов // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1976. № 2. С. 155–163.
5. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию  
10.III.1987