

УДК 532.542

**УДАРНЫЕ ВОЛНЫ ПРИ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
В СХЛОПЫВАЮЩИХСЯ ТРУБКАХ: ПРИЛОЖЕНИЕ
К КРУПНЫМ КРОВЕНОСНЫМ СОСУДАМ**

СААКЯН Ю. З.

Течение жидкости в схлопывающихся трубках представляет большой интерес для задач механики кровообращения, поскольку схлопывание может происходить во многих кровеносных сосудах. На этом эффекте основано большое число диагностических и лечебных методик, а также методов исследования системы кровообращения. Поэтому в последнее время механика схлопывающихся трубок интенсивно изучается [1], но имеющиеся исследования далеко не исчерпывают ни теоретических, ни прикладных аспектов проблемы. Это относится и к изучению разрывных решений типа ударных волн, описывающих крутые фронты раскрытия или сужения кровеносного сосуда. Наиболее изучено нестационарное течение, вызываемое изменением внешнего давления [2]. В [3-6] выяснялось влияние на процесс образования скачков в схлопывающихся трубках таких факторов, как трение на стенке, распределенный боковой отток, наличие застойной зоны в потоке, вязкоупругость стенки. С распространением скачков связывают происхождение некоторых акустических явлений в артериях, в том числе звуков Короткова, используемых при определении артериального давления крови [1, 7].

В представленной работе рассмотрено квазиодномерное течение вязкой несжимаемой жидкости в схлопывающейся трубке конечной длины из нелинейного вязкоупругого материала, изучены условия возникновения скачков в таких системах и исследована структура ударных волн с учетом влияния окружающих тканей.

1. Уравнения движения жидкости с постоянной плотностью ρ по трубке с площадью сечения A и периметром Γ запишем в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uA) = -\psi \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = -\varphi \quad (1.2)$$

Здесь x — осевая координата ($0 \leq x \leq L$, L — длина трубки), $\varphi = (\Gamma \tau_w / A)$; u , ρ — средние по сечению осевая скорость и давление, ψ — удельный отток жидкости через боковую поверхность трубки, τ_w — среднее по периметру вязкое касательное напряжение на ней.

Считаем, согласно [8], что зависимость ψ от параметров задачи имеет вид $\psi = \alpha(p - p_c) + \gamma u A$, где p_c — давление на выходе трубки, а $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$ — постоянные коэффициенты. Для τ_w постулируем линейную зависимость от u , соответствующую мгновенному пуазейлевскому профилю скорости для течения жидкости с динамическим коэффициентом вязкости μ по трубке эллиптического поперечного сечения: $\varphi = 4\pi\mu(\delta + 1/\delta)(u/A)$, $\delta(\Gamma, A)$ — отношение малой и большой осей эллипса.

Уравнения (1.1), (1.2) необходимо дополнить соотношением, связывающим давление p с площадью сечения A и отражающим реологические свойства и характер движения трубки и окружающей ее среды. Будем считать, что трубка помещена в несжимаемую анизотропную сплошную среду с плотностью ρ_m , занимающую в недеформированном состоянии область между соосными цилиндрами с радиусами R_0 и r_0 (r_0 является

одновременно недеформированным радиусом срединной поверхности оболочки, моделирующей трубку). Считаем, кроме того, что на некотором отрезке $l_1 \leq x \leq l_2$ приложено внешнее давление $p_e(x)$. Тогда из решения задачи об осесимметричной деформации такой составной трубы под действием внешнего давления $p_e(x)$ и внутреннего давления $p(x, t)$ имеем [7]

$$p = p_e + f(A) + \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\rho_w \frac{h}{r_0} + \rho_m \ln \frac{R_0}{r_0} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{T_0}{r_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2 \frac{\mu_{ef}}{r_0^2} \frac{\partial A}{\partial t} \right\} \quad (1.3)$$

где ρ_w , h , T_0 — плотность, толщина и осевое натяжение трубки, μ_{ef} — эффективный коэффициент динамической вязкости трубки и окружающей среды; функция $f(A)$ описывает связь $p - p_e$ с площадью сечения трубки при однородном статическом нагружении.

Безразмерная система, соответствующая уравнениям (1.1), (1.2), (1.3), имеет вид [7]

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uA) = -\psi, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\varphi \quad (1.4)$$

$$p = p_e + f(A) + L(\varepsilon, A)$$

где

$$L(\varepsilon, A) = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) + 2\beta\varepsilon \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\varepsilon = \frac{r_0}{l} \sqrt{\frac{\rho_w h + \rho_m r_0 \ln(R_0/r_0)}{2\rho r_0}}$$

$$\psi = \alpha \frac{\rho c_*^2}{l A_*} (p - p_c) + \frac{\gamma u A}{l}$$

$$\varphi = 4\pi \left(\delta + \frac{1}{\delta} \right) \frac{\mu l}{\rho c_* r_0^2} \frac{u}{A}$$

$$A_* = \pi r_0^2, \quad l = l_2 - l_1$$

Здесь c_* — характерная скорость распространения малых возмущений в системе, c_0 имеет смысл скорости распространения поперечных волн в трубке без жидкости, ε — малый параметр.

Граничные и начальные условия задачи зададим в виде

$$p(0, t) = p_0(t), \quad p(L, t) = p_c + Zu(L, t) \quad (1.5)$$

$$p(x, 0) = p_a, \quad u(x, 0) = 0$$

где Z — сопротивление на конце трубки, а $p_0(t)$ — периодическая функция, задающая давление на входе и имеющая вид, показанный на фиг. 1, а. Для одного цикла будем аппроксимировать ее кривой третьего порядка

$$p_0(t) = \begin{cases} p_a + \Delta p \frac{t^2}{t_0^2} \left(3 - 2 \frac{t}{t_0} \right), & 0 \leq t \leq t_0 \\ p_a + \Delta p \frac{(T-t)^2}{(T-t_0)^2} \left(3 - 2 \frac{T-t}{T-t_0} \right), & t_0 \leq t \leq T \end{cases}$$

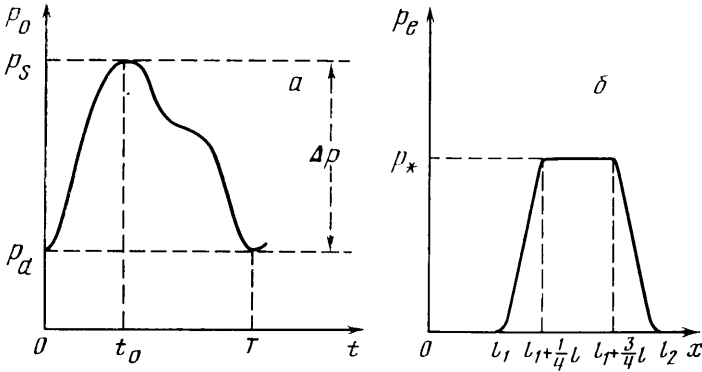
Кривая, аппроксимирующая зависимость $p_e(x)$, показана на фиг. 1, б.

Для детального количественного анализа условий образования ударных волн и исследования их структуры необходимо располагать весьма подробной информацией не только о самой функции $f(A)$, но и о связан-

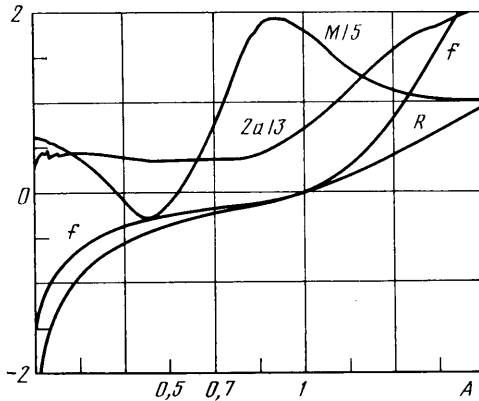
ных с ней безразмерных функциях

$$a(A) = \sqrt{Af'(A)}, \quad R(A) = \int_1^A \sqrt{\frac{f'(\alpha)}{\alpha}} d\alpha, \quad M(A) = 3 + \frac{f''(A)A}{f'(A)} \quad (1.6)$$

где $a(A)$ — скорость распространения малых возмущений в системе, $R(A)$ — функция давления, входящая в инварианты Римана соответствующей



Фиг. 1



Фиг. 2

щей системы гидравлических уравнений, $M(A)$ определяет условия опрокидывания простых волн и образования скачков [2].

На фиг. 2 представлены зависимости $f(A)$, $a(A)$, $R(A)$, $M(A)$, полученные в опытах на крупной артерии человека [9], которые в дальнейшем будут использованы для численных расчетов.

2. Если положить $\epsilon=0$, то система (1.4) превращается в квазилинейную гиперболическую систему второго порядка, аналогичную уравнениям одномерного движения сжимаемого газа. Такие системы допускают решения типа ударных волн, структура которых описывается полной системой (1.4).

Введем координату ударного слоя $\eta = (Ut - x)/\epsilon$, где U — безразмерная скорость ударной волны, и перейдем в системе (1.4) к переменным t и η . Отбрасывая члены порядка ϵ и выше, получим систему уравнений внутреннего разложения. Интересующие нас решения типа ударной волны должны удовлетворять граничным условиям

$$A \rightarrow A_1, \quad \eta \rightarrow -\infty; \quad A \rightarrow A_2, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (2.1)$$

где A_1, A_2 — значения A перед ударной волной и за ней соответственно. Первые два уравнения системы интегрируются и с учетом (2.1) и соотношений $p(A_i) = p_e + f(A_i)$, $i=1, 2$, дают

$$u(A) = U - \frac{A_1 A_2}{A} \sqrt{2 \frac{f(A_2) - f(A_1)}{A_2^2 - A_1^2}} \quad (2.2)$$

$$p(A) = p_e + \frac{f(A_2) A_2^2 - f(A_1) A_1^2}{A_2^2 - A_1^2} - \frac{(U-u)^2}{2}$$

а задача об исследовании структуры ударной волны сводится к нахождению решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$(U^2 - c_0^2) \frac{d^2 A}{d\eta^2} + 2\beta U \frac{dA}{d\eta} + g(A) = 0 \quad (2.3)$$

$$g(A) = p_e + f(A) - p(A) \quad (2.4)$$

с граничными условиями (2.1).

Введем в рассмотрение потенциальную функцию $G(A)$ такую, что $G'(A) = g(A)$, и сформулируем достаточные условия существования и единственности структуры ударной волны с заданными значениями A_1, A_2 и произвольными $U \neq c_0, \beta > 0$: 1) A_1, A_2 — соседние нули функции $g(A)$, причем $g'(A_2) > 0$, а $g'(A_1) < 0$; 2) существует $A_0 > 0$ такое, что $G(A_0) = G(A_i)$, а A_j лежит между A_0 и A_i и является единственным нулем функции $g(A)$ на этом интервале; здесь $i=1, j=2$ при $U > c_0$ и $i=2, j=1$ при $U < c_0$.

При невыполнении этих условий решение вопроса о существовании ударной волны зависит не только от вида функции $f(A)$, но и от значений параметров β и c_0 . Условие 1) позволяет определить типы особых точек A_1, A_2 и провести исследование структуры ударной волны. При выполнении 1), 2) одна из точек A_i (при $U > c_0$) или A_2 (при $U < c_0$) является седлом, а другая — узлом или фокусом уравнения (2.3). В последнем случае в структуре скачка будут наблюдаться осцилляции, необходимым условием возникновения которых является выполнение в этой точке неравенства

$$\beta^2 U^2 - g'(A_i)(U^2 - c_0^2) < 0 \quad (2.5)$$

Эти осцилляции движутся вместе с фронтом ударной волны, причем при $U > c_0$ они движутся перед ней, а при $U < c_0$ — за ней.

В [2] показано, что опрокидывание простых волн определяется знаком функции $M(A)$: волны распрямления опрокидываются при $M > 0$, а волны схлопывания — при $M < 0$. При выполнении условия 1) этот вывод остается справедливым не только для простых волн и условие постоянства знака $M(A)$ на каком-то интервале, содержащем точки A_1 и A_2 , эквивалентно условию 1). Однако выполнение условия знакопостоянства $M(A)$ (так же как и условия 1)) не гарантирует существования скачков. Для этого необходимо выполнение условия 2).

Кроме того, если выполняется условие 1), то из (2.4) с использованием (1.6), (2.2) получим, что $u_1 + a_1 < U < u_2 + a_2$, т. е., так же как и в газовой динамике, скорость распространения волны по частицам до скачка «сверхзвуковая», а за скачком — «дозвуковая», где местная «скорость звука» определяется формулой (1.6).

3. Перейдем к рассмотрению внешнего разложения и перепишем уравнения в характеристической форме

$$\frac{\partial(u+R)}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial(u+R)}{\partial x} = -\left(\varphi + \frac{a}{A} \psi\right) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(u-R)}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial(u-R)}{\partial x} = -\left(\varphi - \frac{a}{A} \psi\right)$$

Сначала исследуем случай слабых ударных волн в предположении, что $\varphi = \psi = 0$, если в начальный момент времени $t=0$ при $x \geq l_1$, $u = u_\infty$, $A = A_\infty$. Поскольку при этом второй инвариант Римана изменяется на скачке на величину порядка z^3 ($z = (A_2 - A_1)/A_1$ — интенсивность скачка), его можно считать постоянным во всей области, т. е.

$$u(A) = u_\infty + \int_{A_\infty}^A \frac{a(\alpha)}{\alpha} d\alpha \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что любые две из величин u , A и p можно представить как функции третьей, а первое уравнение системы (3.1) будет описывать кинематическую волну, распространяющуюся вниз по течению. Тогда, пользуясь методами газовой динамики [10], определим место образования разрыва параметров течения

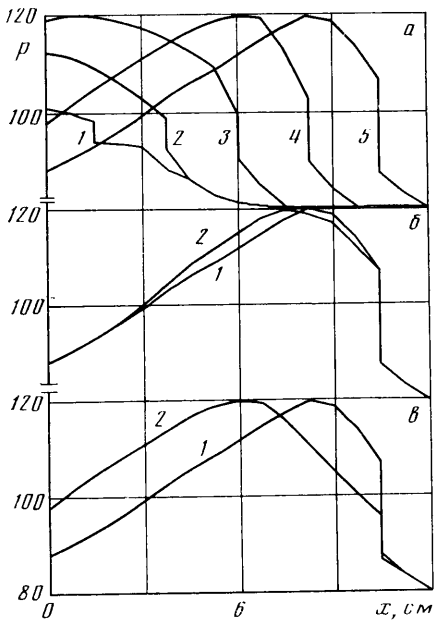
$$x_s = l_1 + \min_t \frac{2[a(A) + u(A)]^2 a(A)}{M(A) p_0'(t)} \quad (3.3)$$

Для случая $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$ можно проинтегрировать второе уравнение (3.1) вдоль характеристики второго семейства и получить интеграл, подобный соотношению (3.2), а из первого уравнения аналогичным способом определить x_s . Однако получающиеся при этом соотношения имеют в отличие от (3.2) и (3.3) вид довольно громоздких интегральных уравнений. Их анализ показывает, что учет распределенного бокового оттока и вязкого трения на стенке увеличивает x_s и, следовательно, препятствует образованию скачка.

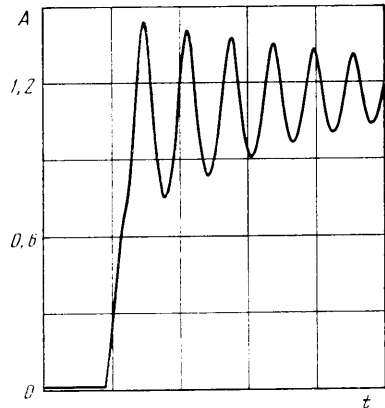
Проведем численное интегрирование уравнений (3.1) методом характеристик с граничными и начальными условиями (1.5). На равномерной по времени и пространству сетке аппроксимируем уравнения конечно-разностными соотношениями с точностью порядка $o(\tau^2, \xi^2)$ где τ , ξ — величины шагов по времени и пространству соответственно [8]. Определив на каждом шаге значения u и R , по экспериментальным данным (фиг. 2) находим значения p , A и a для последующих вычислений.

В качестве примера приведем результаты, полученные для задачи со следующими значениями размерных параметров: $p_s = 120$, $p_d = 80$, $p_* = 100$, $p_c = 25$ мм рт. ст.; $l_1 = 30$, $l_2 = 42,5$, $L = 72,5$, $r_0 = 0,25$, $R_0 = 5$ см; $t_0 = 0,08$, $T = 0,8$ с; $c_* = 0,75$ м/с; $T_0 = 40$ Н/м; $\rho_w = \rho_m = \rho \approx 10^3$ кг/м³. Были рассчитаны распределения давления и площади сечения в области $l_1 \leq x \leq l_2$, а также значения U , A_1 , A_2 в каждый момент времени. На фиг. 3, а показана эволюция профиля давления в рассматриваемой области в моменты времени t_1, \dots, t_5 , соответствующие значениям 0,068, 0,083, 0,093, 0,101, 0,108 для случая $\mu = 0$. Для этого случая ударная волна распрямления образуется на расстоянии $x_s = 0,41$ см от начала рассматриваемой области. Влияние вязкости на процесс распространения ударной волны и параметры течения показано на фиг. 3, б, где представлены профили давления в момент времени t_5 при $\mu = 0$ (кривая 1) и $\mu = 0,49$ дин·с/см² (кривая 2). Был также проведен расчет течения для случая $L = 47,5$ см, $u(L, t) = 0$, результат которого представлен на фиг. 3, в (кривая 2). Очевидно, что изменения условий отражения существенным образом влияют на образование и эволюцию скачка, в то время как влияние вязкости жидкости на эти процессы пренебрежимо мало.

Численное исследование позволяет сделать некоторые заключения о зависимости скорости U и интенсивности ударной волны z от параметров



Фиг. 3



Фиг. 4

задачи. Так, обе эти величины растут по мере распространения волны давления, а их значения при $x=l_2$ увеличиваются с ростом длины интервала. С другой стороны, при увеличении t_0 возникновение ударной волны затягивается, а ее скорость и интенсивность в некотором фиксированном сечении уменьшаются. Зависимость U , z и x_s от давления p_* более сложная: при увеличении p_* от величин, близких к p_d , до $p_* \approx (p_d + p_s)/2$ скорость и интенсивность скачка растут, а x_s уменьшается. При дальнейшем увеличении p_* первые две величины уменьшаются, в то время как образование скачка затягивается.

Вычисленные значения U , A_1 , A_2 используем для исследования структуры скачка путем численного интегрирования уравнения (2.3) методом Рунге — Кутты с четвертым порядком аппроксимации и постоянным шагом. Пример зависимости $A(t)$, полученной в результате расчета для значений параметров в момент времени t_5 и имеющей выраженный осциллирующий характер, показан на фиг. 4 (для этого случая $A_1=0,01$, $A_2=1, 2$).

Таким образом, исходя из результатов проведенного исследования, можно сделать следующие выводы. В рассмотренной системе возможны только скачки распрямления. Когда нарастающее давление жидкости приближается к величине внешнего давления, происходит распрямление сдавленной внешней давлением трубки. Из-за нелинейности статической зависимости разности давлений $p-p_e$ от площади сечения трубки, т. е. функции $f(A)$, этот процесс сопровождается образованием ударной волны. Она возникает, когда значение $p-p_e$ близко к нулю и сечение трубки восстанавливает круговую форму. В первые моменты после образования скачка его структура монотонна, а затем, когда его интенсивность достигает порогового значения, определяемого соотношением (2.5), на фронте ударной волны возникают высокочастотные осцилляции давления, сечения и скорости, которые движутся вместе с фронтом ударной волны (так как $U > c_0$, то они движутся перед фронтом скачка). Эти осцилляции, по всей видимости, и есть звуки Короткова, регистрация которых лежит в основе метода определения артериального давления крови.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир. 1983. 400 с.
2. *Kamm R. D., Shapiro A. H.* Unsteady flow in a collapsible tube subjected to external pressure or body forces // *J. Fluid. Mech.* 1979. V. 95. № 1. P. 1–78.
3. *Forbes L. K.* On the evolution of shock waves in mathematical models of the aorta // *J. Austral. Math. Soc.* 1981. V. B22. № 3. P. 257–269.
4. *Rudinger G.* Shock waves in fluid-filled distensible tubes // *Trans. ASME. J. Biomech. Eng.* 1980. V. 102. № 1. P. 23–27.
5. *Collins R., Kivity Y.* Dynamic rheology of viscoelastic tubes // *Biorheology.* 1978. V. 15. № 3–4. P. 173–179.
6. *Smith C. H.* On the introduction of viscoelasticity into onedimensional models of arterial blood flow // *Acta mech.* 1982. V. 43. № 1–2. P. 15–26.
7. *Григорян С. С., Саакян Ю. З., Цатурян А. К.* К теории метода Короткова // *Биомеханика (НРБ).* 1984. Кн. 15–16. С. 54–75.
8. *Anliker M., Stettler J. C., Niederer P., Holenstein R.* Prediction of shape changes of propagation flow and pressure pulses in human arteries // *The arterial system. Dynamics, control theory and regulation.* Berlin: Springer-Verlag, 1978. P. 15–34.
9. *Саакян Ю. З., Цатурян А. К., Касьянов В. А., Мунгалов Д. Д.* Податливость плечевой артерии человека при малых трансмуральных давлениях: Приложение к теории метода Короткова // *Физиология человека.* 1985. Т. 11. № 1. С. 83–89.
10. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977. 622 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.III.1987