

УДК 532.529.5:612.13

ТЕЧЕНИЕ СУСПЕНЗИИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

ЛОСЕВ Е. С., ПИЧУГИНА И. А., РЕГИРЕР С. А.

При течении суспензии в канале с пористыми стенками, когда размер частиц взвешенной фазы много меньше ширины канала, но существенно превосходит размер пор (в частности, при течении крови в сепараторе плазмы, используемом в системе искусственной почки [1, 2]), наблюдаются явления, для объяснения которых применение известных решений задач о движении ньютоновской жидкости [3] оказывается недостаточным. Например, расход жидкой фазы суспензии через стенки зависит от скорости основного потока и не зависит от перепада давления на стенке при достаточно больших его значениях [1, 2].

Ниже представлены постановка и объясняющее этот эффект приближенное решение задачи о течении несжимаемой двухфазной суспензии в длинной щели с непроницаемыми для взвешенной фазы пористыми стенками, через которые осуществляется отсос жидкой фазы. Учитываются некоторые эффекты, обусловленные высокой объемной концентрацией взвешенной фазы.

1. Рассмотрим течение суспензии в плоском канале с пористыми стенками, когда по всей его длине через стенки происходит отсос жидкой фазы. Очевидно, что в реальных условиях даже при постоянных давлениях на концах канала и вне его течение не обязательно будет стационарным. Возможен, например, нестационарный режим, когда на стенках канала будет во времени нарастать слой осевших частиц, неспособных двигаться вдоль канала столь быстро, чтобы компенсировать приток частиц через входное сечение. В дальнейшем будет принята гипотеза о существовании стационарного течения. Предполагается также, что все сечение канала заполнено взвесью частиц в ньютоновской жидкости, т. е. на стенках нет слоя «осадка», подобного пористому телу. Истинные плотности частиц и жидкости считаются постоянными и одинаковыми.

Пусть канал имеет высоту $2h$, много большую характерного размера частиц a . Для описания течения используем уравнения движения двухфазной среды (фаза 1 — частицы, фаза 2 — несущая жидкость). Обозначим через u_α, v_α ($\alpha=1, 2$) соответственно скорости фаз в направлении оси канала (ось x) и перпендикулярно стенкам (ось y). Уравнение неразрывности для среды в целом имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u = H u_1 + (1-H) u_2, \quad v = H v_1 + (1-H) v_2 \quad (1.1)$$

где H — объемная концентрация частиц. Из (1.1) можно получить отношение средней скорости отсоса V на всем участке отсоса $0 \leq x \leq l$ (сечение $x=l$ определяется условием равенства нулю средней продольной скорости) к средней скорости U суспензии в начальном сечении [3]: $V/U = h/l$. Будем предполагать, что V/U — малая величина порядка ϵ .

Для медленного стационарного течения кроме названных условий

$$\frac{h}{a} \gg 1, \quad \frac{V}{U} = \frac{h}{l} = \epsilon \ll 1 \quad (1.2)$$

примем также $u_1 = u_2 = u$ и $hV/aV \ll 1$. Для среды в целом уравнение дви-

жения вдоль канала запишем в приближении Пуазейля

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu(H) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (1.3)$$

Здесь $\mu(H)$ — вязкость суспензии, зависящая от концентрации частиц. Уравнения движения фаз в направлении y можно записать в виде [4, 5]

$$0 = -H \frac{\partial p}{\partial y} - FH(v_1 - v_2) - \frac{\partial p_f^1 H}{\partial y} \quad (1.4)$$

$$0 = -(1-H) \frac{\partial p}{\partial y} + FH(v_1 - v_2) - \frac{\partial p_f^2 (1-H)}{\partial y}$$

Здесь F — коэффициент вязкого межфазного взаимодействия, для которого из соображений размерностей примем выражение $F = \beta \psi(H) \eta a^{-2}$, где $\beta = \text{const}$, η — вязкость несущей жидкости; p_f^α ($\alpha=1, 2$) — эффективные диффузионные давления фаз, определяемые через внутренние флуктуационные энергии фаз $U_f^\alpha(H^\alpha, S_f^\alpha)$ ($H^1=H, H^2=1-H, S_f^\alpha$ — флуктуационные энтропии фаз) соотношениями $p_f^\alpha = \partial U_f^\alpha / \partial H^\alpha$. Будем предполагать, что флуктуационной термодиффузией [5] можно пренебречь по сравнению с диффузией, вызванной градиентом концентрации частиц. Тогда, исключая $\partial p / \partial y$ из (1.4), получим

$$F(v_1 - v_2) + \frac{(1-H)}{H} P_f \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad P_f = p_f^1 + \frac{H}{1-H} p_f^2 + \frac{\partial (p_f^1 - p_f^2)}{\partial H} \quad (1.5)$$

Учитывая (1.2) и неравенство $hV/aV \ll 1$, из (1.4) найдем, что в нулевом приближении по ϵ в (1.3) можно положить $p = p(x)$.

Уравнения (1.1), (1.3) вместе с уравнением неразрывности для взвешенной фазы $\partial H u_i / \partial x + \partial H v_i / \partial y = 0$, записанным с учетом (1.1), (1.5), образуют окончательную систему

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu(H) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

$$u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1-H)^2}{F} P_f \frac{\partial H}{\partial y} \right] \quad (1.7)$$

Считая распределения скорости и концентрации симметричными относительно оси канала $y=0$, будем рассматривать только область $y \geq 0$, причем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0 \quad (y=0) \quad (1.8)$$

Поскольку стенки канала непроницаемы для взвешенных частиц, а отсос несущей жидкости обеспечивается разностью давлений внутри и вне канала, то положим

$$v_{1w} = 0, \quad v_{2w} = \alpha(H_w)(p - p_T)$$

Здесь p_T — давление вне канала, $\alpha(H_w)$ — коэффициент, зависимость которого от H_w отражает эффект «забивания пор». Индекс w здесь и далее означает, что величина определена на границе $y=h$. Учитывая (1.8) и следующее из (1.1), (1.5) соотношение

$$v_1 = v - \frac{(1-H)^2}{FH} P_f \frac{\partial H}{\partial y} \quad (1.9)$$

условия на стенке для системы (1.6), (1.7) запишем в виде

$$u = 0, \quad v = \alpha(1-H)(p - p_T), \quad v - \frac{(1-H)^2}{FH} P_f \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (y=h) \quad (1.10)$$

На входе в канал задаются давление и концентрация, на выходе из канала — давление

$$p=p_n=\text{const}, \quad H=H_+(y) \quad (x=0), \quad p=p_b=\text{const} \quad (x=L) \quad (1.11)$$

При этом предполагается, что $L < l$, т. е. на длине канала не вся поступающая жидкость покидает его через стенки. Первое из условий (1.11) при $x=0$ может быть заменено на условие заданного расхода

$$2 \int_0^h u|_{x=0} dy = 2Uh \quad (1.12)$$

2. Рассмотрим задачу (1.6)–(1.10) для случая $\mu = \text{const}$ и малого коэффициента диффузии $D \sim D_* \ll v_* h$, где D_* , v_* — характерные значения соответственно $\bar{D} = (1-H)^2 P_i / FH$ и скорости отсоса жидкости. Из системы уравнений (1.6) с граничными условиями (1.10), (1.11) стандартным образом [3] находятся составляющие скорости и уравнение для давления

$$u = -\frac{1}{2\mu} (h^2 - y^2) \frac{dp}{dx}, \quad v = \frac{1}{2\mu} \left(y h^2 - \frac{y^3}{3} \right) \frac{d^2 p}{dx^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{3\mu\alpha(1-H_w)}{h^3} (p - p_T) \quad (2.2)$$

В силу малости коэффициента диффузии при исследовании уравнения (1.7) можно воспользоваться представлениями теории пограничного слоя и область течения разбить на ядро $|y| < h - \delta(x)$, в котором уравнение (1.7) следует рассматривать с нулевой правой частью, и пограничный слой, где необходимо рассматривать полное уравнение (1.7). Для ядра $H = H(\psi)$, где $\psi(x, y)$ — функция тока, определенная из (2.1) формулой

$$\psi = -\frac{dp}{dx} \frac{y}{2\mu} \left(h^2 - \frac{y^3}{3} \right)$$

Далее будем считать, что концентрация H_0 в сечении $x=0$ постоянна. В этом случае $H = H_0$ во всей центральной области.

Для приближенного решения уравнения (1.7) применим метод интегральных соотношений. Аппроксимируем непрерывный профиль концентрации следующими выражениями:

$$H = H_0 \quad (0 \leq y \leq h - \delta), \quad H = \frac{H_w - H_0}{\delta} (y - h) + H_w \quad (h - \delta \leq y \leq h) \quad (2.3)$$

где $\delta(x)$ — толщина пограничного слоя. Для определения $H_w(x)$ и $\delta(x)$ используем интегральные соотношения, следующие из (1.7). Учитывая (1.1), перепишем (1.7) в виде

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H v_1}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

где v_1 определено соотношением (1.9). Интегрируя по y исходное уравнение (2.4) и уравнение (2.4), домноженное на y , с учетом симметрии течения и условия непротекания частиц через стенку получим два интегральных соотношения

$$\frac{d}{dx} \int_0^h H u dy = 0, \quad \frac{d}{dx} \int_0^h H u y dy = \int_0^h H v_1 dy \quad (2.5)$$

При вычислении интегралов, входящих в (2.5), используем зависи-

мости (2.1), (2.3) и в соответствии с данными о зависимости диффузии эритроцитов в крови от скорости сдвига [6] положим $P_i/FH = D_* \varphi(H) \times (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}^*)^n$, где $\dot{\gamma}^*$ — постоянная с размерностью скорости сдвига; $\dot{\gamma} = |\partial u/\partial y|_w$; $\varphi(H)$ — функция, характеризующая зависимость диффузии от концентрации, определенная так, что $\varphi(H_0) = 1$. После вычисления интегралов соотношения (2.5) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{dp}{dx} \left[1 + \frac{H_w - H_0}{2H_0} \left(\frac{\delta^2}{h^2} - \frac{\delta^3}{4h^3} \right) \right] \right\} = 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left\{ \frac{dp}{dx} \left[1 + 4 \frac{H_w - H_0}{H_0} \left(\frac{1}{3} \frac{\delta^2}{h^2} - \frac{1}{4} \frac{\delta^3}{h^3} \right) \right] \right\} = \\ & = - \frac{8\mu}{h^4 H_0} \left\{ \frac{5}{8} v_w H_0 h + \frac{1}{2} v_w (H_w - H_0) \delta - D_* \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}^*} \right)^n [\theta(H_w) - \theta(H_0)] \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

В выписанных выражениях учтена малость относительной толщины пограничного слоя $\delta/h \ll 1$, однако сохранены члены, соответствующие второму приближению по параметру δ/h , поскольку при дальнейших операциях члены, соответствующие первому приближению по δ/h , могут обращаться в нуль. Уравнения (2.2), (2.6), (2.7) определяют функции $p(x)$, $H_w(x)$, $\delta(x)$ при задании для p граничных условий (1.11) и $H_w(0) = H_0$, $\delta(0) = 0$. Затем расход жидкой фазы через стенки может быть определен с учетом соотношения $v_w = v_{zw}(1 - H_w)$ формулой

$$Q = b \int_0^L \alpha [H_w(x)] [1 - H_w(x)] [p(x) - p_T] dx \quad (2.8)$$

где b — ширина канала.

3. Дальнейшее решение задачи рассмотрим при следующих ограничениях на длину канала и перепад давлений на стенке: $L/l \ll 1$, $(p_B - p_H)/(p_H - p_T) \ll 1$. Выпишем предварительно решение уравнения (2.2) при постоянной концентрации H_w частиц на стенке

$$p = p_T + (p_H - p_T) \operatorname{ch}(\lambda x) + [(p_B - p_T) - (p_H - p_T) \operatorname{ch}(\lambda L)] \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda L} \quad (3.1)$$

$$\lambda = [3\mu\alpha(1 - H_w)h^{-3}]^{1/2}$$

Отсюда следует

$$\frac{dp}{dx} = \lambda(p_H - p_T) \operatorname{sh} \lambda x + \lambda [(p_B - p_T) - (p_H - p_T) \operatorname{ch} \lambda L] \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda L} \quad (3.2)$$

Используя (3.2) и определение средней по сечению скорости $\langle u \rangle$, легко определить длину участка полного отсоса, т. е. сечение l , в котором $\langle u \rangle = 0$ [3]

$$l = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{(p_H - p_T)\lambda h^2}{3\mu U}, \quad \langle u \rangle = \frac{2}{h} \int_0^l u dy = \frac{h^2}{3\mu} \frac{dp}{dx}, \quad U = \langle u \rangle|_{x=0}$$

Из этого соотношения следует, что $\lambda l \ll 1$, так что при условии $L/l \ll 1$ для всех $0 \leq x \leq L$ имеем $\lambda x \ll 1$. Следовательно, в нулевом приближении по малому параметру λL , учитывая, что $(p_B - p_H)/(p_H - p_T) \ll 1$, из соотношений (3.1), (3.2) будем иметь

$$p = p_H + O(\lambda L)^2, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p_B - p_H}{L} + O(\lambda L)^2 \quad (3.3)$$

Эти соотношения не зависят от H_w и, таким образом, в принятых приближениях будут справедливы при любых H_w , в том числе и переменных по x .

Уравнения (2.6), (2.7) с учетом (2.2), (3.3) можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\frac{d}{dX} [(H_w - H_0) \Delta^2] = 6A(1 - H_w)H_0$$

$$\frac{d}{dX} [(H_w - H_0) \Delta^3] = -6A(1 - H_w)(H_w - H_0)\Delta + 12B[\theta(H_w) - \theta(H_0)]$$

$$X = \frac{x}{h}, \quad \Delta = \frac{\delta}{h}, \quad A = \frac{\alpha(p_H - p_T)}{\dot{\gamma}h}, \quad B = \frac{D_*(\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_*)^n}{\dot{\gamma}h},$$

$$\dot{\gamma} = \frac{(p_B - p_H)h}{\mu L} \quad (3.4)$$

Система (3.4) соответствует нулевому приближению для всех упомянутых выше малых параметров и поэтому справедлива при любых соотношениях между этими параметрами. Вместе с начальными условиями $H_w = H_0, \Delta = 0$ при $x = 0$ уравнения (3.4) определяют переменные H_w и Δ . В точке $x = 0$ система (3.4) имеет особенность. Асимптотическое решение системы (3.4) для малых x в случае $\alpha = \text{const}, \varphi(H) = 1$ имеет вид

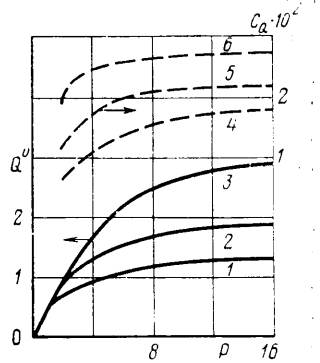
$$H_w - H_0 = H_0 A \left[\frac{8}{3(1 - H_0)B^2} \right]^{1/3} X^{1/3},$$

$$\Delta = [9(1 - H_0)^2 B]^{1/3} X^{1/3} \quad (3.5)$$

Решение (3.5) справедливо в случае $(H_w - H_0) \ll H_0, \Delta \ll B/A$. Оба эти условия выполнены в области $x/h \ll B^2/A^3$.

На фигуре приведены результаты численного расчета при $\alpha = \text{const}, \varphi(H) = 1$ расхода жидкости через стенку Q по (2.8), где H_w определяется из (3.4), в зависимости от скорости сдвига основного потока $\dot{\gamma}$ и безразмерного перепада давления на стенке $P = \alpha(p_H - p_T)/v_*$. Эти упрощения, как и постоянство вязкости, приняты как приближенные для первоначального качественного описания явления. Для определенности положено $v_* = 10^{-5}$ м/с, $L/h = 200, H_0 = 0,4; D_* = 0,5 \cdot 10^{-9}$ м²/с, $n = 1/2$. Расход представлен в безразмерном виде как $Q^0 = Q/bLv_*$. Кривые 1-3 соответствуют значениям $\dot{\gamma} = 500, 1000, 2000$ с⁻¹. Приведенные результаты качественно соответствуют экспериментальным данным по фильтрации плазмы крови [1, 2] и демонстрируют существование зависимости расхода жидкой фазы через стенки от скорости основного потока, а также выход расхода на предельные значения при больших значениях перепада давления на стенке.

Результаты, приведенные на фигуре, получены для $D \sim \dot{\gamma}^{1/2}$. Такой выбор позволил добиться количественного согласия значения расхода Q^0 при больших P с экспериментальными данными работы [1]. В [2] наблюдалась близкая к линейной зависимость расхода от $\dot{\gamma}$, что, как показали расчеты, соответствует $D \sim \dot{\gamma}$. Подобные различия могут быть связаны с неодинаковым при различных геометрических параметрах влиянием пристеночных эффектов, приводящих, в частности, к образованию пристеночного слоя, обедненного частицами [6]. Отметим, что зависимость расхода жидкости через стенки от $\dot{\gamma}$ имеет место как за счет зависимости



коэффициента диффузии от $\dot{\gamma}$, так и за счет усиления уноса частиц вдоль канала при увеличении $\dot{\gamma}$.

Эффективность сепарации можно характеризовать коэффициентом $C_Q = 3Q/b\dot{\gamma}h^2$, равным отношению объема профильтрованной жидкости к расходу в основном потоке. На фигуре штриховыми линиями представлена зависимость C_Q от P при значениях $L/h = 100, 200, 400$ (кривые 4–6, $H_0 = 0,4$; $D_* = 0,5 \cdot 10^{-9}$ м²/с; $n = 1/2$; числа у кривых – значения L/h). Эффективность сепарации растет с ростом L/h . Однако следует помнить, что рассматриваемое решение справедливо при упомянутых выше условиях $(p_B - p_H)/(p_H - p_T) \ll 1$, $\lambda L \ll 1$ или, согласно (3.1), (3.4), при

$$\frac{\mu \dot{\gamma}}{(p_H - p_T)} \frac{L}{h} \ll 1, \quad \left[\frac{3\mu\alpha(1-H_w)}{h} \right]^{1/2} \frac{L}{h} \ll 1$$

При достаточно больших значениях L/h необходимо учитывать падение перепада давления на стенке вдоль канала, что приведет к относительному уменьшению эффективности сепарации.

4. Из рассмотрения нестационарных уравнений, соответствующих системе (3.4), можно показать, что характерное время установления исследованного стационарного решения $t^* \leq L/\delta\dot{\gamma}$. Для использованных выше характерных числовых данных $t^* \sim 10-100$ с, что много меньше времени работы подобных систем (для крови). Этим оправдывается принятая в разд. 1 гипотеза о стационарности течения.

В рассмотренной задаче не учитывались пристеночные силы, которые вместе с диффузией противодействуют скоплению эритроцитов у стенки. Пристеночные силы могли бы быть эффективно учтены сохранением в (1.5) члена, связанного с флуктуационной термодиффузией, а также, возможно, введением соответствующих дополнительных членов в уравнения (1.4), однако в рамках предложенной постановки задачи вклады в окончательный результат от пристеночных сил и от диффузии неразличимы. Поэтому во всех численных расчетах диффузию следует рассматривать как эффективную, отражающую как сдвиговой механизм, так и пристеночные силы. В то же время интенсивность сдвиговой диффузии достаточна для объяснения экспериментально наблюдаемых эффектов. Отсюда следует, что пристеночные силы по порядку величины не превышают диффузионных сил.

Для отделения жидкой фазы суспензий (в частности, плазмы крови) используются также устройства, в которых в отличие от рассмотренного случая имеется дополнительное сдвиговое течение Куэтта в трансверсальном направлении. Такое течение осуществляется при продольном протоке в тонком зазоре между вращающимися коаксиальными цилиндрами [7]. Если зазор узкий, то локально можно пользоваться декартовой прямоугольной системой координат и предположить независимость параметров от координаты z , перпендикулярной плоскости канала. Тогда получим для компонент скоростей u, v выражения (2.1) и $w = \dot{\gamma}_1 y$, $\dot{\gamma}_1 = \partial w / \partial y$. Полагая тензорный эффективный коэффициент диффузии D_{ij} изотропной функцией компонент метрического тензора и тензора скоростей деформаций e_{ij} , в декартовых прямоугольных координатах будем иметь [8]

$$D_{ij} = f^{-1}(I_2) \delta_{ij} + f^2(I_2) e_{ij} + f^3(I_2) e_{ik} e_{kj}$$

где I_2 – второй инвариант тензора скоростей деформаций. В этом случае, если выполнены все ограничения, при которых выведены уравнения (3.4), считая

$$A = \alpha(p_H - p_T) / \dot{\gamma} h, \quad D = D_* f(I_2) / \dot{\gamma} h^2, \quad I_2 = \dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}_1^2$$

для определения H_w и Δ можно также воспользоваться системой (3.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shirane K., Funakubo H.* Fundamental studies on miniaturization of plasma separator // *J. Fac. Eng. Univ. Tokio.* 1980. V. B35. № 3. P. 389–393.
2. *Gupta B. B., Jaffrin M. Y., Ding L. H., Dobi T.* Membrane plasma separation through small-area, hollow-fiber filters // *Artif. Organs.* 1986. V. 10. № 1. P. 45–51.
3. *Регирер С. А.* О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с пористыми стенками // *Изв. вузов. Математика.* 1962. № 5. С. 65–74.
4. *Низматуллин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука. 1978. 336 с.
5. *Регирер С. А.* К вопросу о континуальных моделях суспензий // *ПММ.* 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 679–688.
6. *Левтов В. А., Регирер С. А., Шадрин Н. Х.* Реология крови. М.: Медицина, 1932. 270 с.
7. *Захарченко В. Н., Ларионов С. М., Лопухин Ю. М. и др.* Устройство для разделения крови: А. с. 902753 СССР. // *Опубл. в Б. И.* 1982. № 5.
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.III.1987