МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1987

УДК 532.529

СТЕРЖНЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА ВОЛОКНИСТОЙ СУСПЕНЗИИ МЕЖДУ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

БАБКИН В. А.

Течение волокнистой суспензии в пространстве между двумя бесконечными соосными круговыми цилиндрами давно привлекает внимание исследователей [1–6]. Пусть поверхности цилиндров гладкие. Внутренний цилиндр радиуса R_1 неподвижен, а внешний, радиуса R_2, вращается с постоянной угловой скоростью. Концентрация суспензии c выше концентрации седиментации, так что в суспензии может образовываться упругая сеть волокон [6–8]. Задача состоит в том, чтобы найти распределение скорости в пространстве между цилиндрами и функциональную связь между касательными напряжениями на поверхности цилиндров и угловой скоростью внешнего цилиндра.

Примем цилиндрическую систему координат r, φ, x: ось x направлена по общей оси цилиндров; положительные значения угла φ отсчитываются в сторону вращения внешнего цилиндра.

В зависимости от скорости вращения в пространстве между цилиндрами может установиться один из возможных режимов движения суспензии: стержневое, переходное или турбулентное течение [4, 6]. Ограничимся только стержневым течением. Этот режим устанавливается при небольших скоростях вращения, однако в зависимости от концентрации суспензии может охватывать весьма значительный диапазон скоростей, включая и те скорости, что встречаются на практике [6].

В стержневом режиме область течения суспензии $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ состоит из ядра, содержащего все волокна суспензии и движущегося как твердое тело, и областей чистой жидкости, прилегающих к твердым стенкам [4, 6, 7]. Пристеночные слои образуются за счет деформации сети волокон, входящей в ядро [7].

При вращении внутреннего цилиндра (внешний покоится) образуется только один пристеночный слой, прилегающий к внутреннему цилиндру, причем вся масса суспензии, за исключением жидкости в этом слое, покоится [4]. Однако автору неизвестны работы, в которых давалась бы такая же определенная информация о пристеночных слоях и движении ядра суспензии в случае вращения внешнего цилиндра. По этой причине в данной работе отдельно рассмотрены случаи течения с двумя пристеночными слоями и одним пристеночным слоем у внутреннего или внешнего цилиндра.

1. Два пристеночных слоя. Пусть при вращении внешнего цилиндра с угловой скоростью ω_2 в пространстве между цилиндрами, занятом суспензией, образуются пристеночные слои жидкой фазы суспензии толщиной d_1 у внутреннего цилиндра и d_2 — у внешнего, а также ядро течения $R_1+d_1 \leqslant r \leqslant R_2-d_2$. Ядро будем считать вращающимся как твердое тело, с постоянной угловой скоростью ω, которая, вообще говоря, не совпадает с ω_2 и должна быть найдена в ходе решения задачи.

Чтобы найти связь между касательными напряжениями на стенках цилиндров и угловой скоростью ω_2, ввиду расслоенности суспензии у стенок рассмотрим отдельно течение жидкой фазы в пристеночных слоях и деформацию сети волокон в ядре течения, поскольку касательные напряжения на стенках определяются движением жидкой фазы и, следовательно, толщиной пристеночных слоев d_1, d_2, а последние — деформацией сети волокон.

Взаимосвязь между течением жидкой фазы и деформацией сети волокон осуществляется посредством граничных условий на границах ядра с пристеночными слоями.

Здесь и далее влиянием силы тяжести будем пренебрегать.

В пристеночных слоях течение жидкой фазы суспензии ламинарное [4, 6]. Для ньютоновской жидкости, каковой и будет считаться жидкая фаза суспензии, распределение скорости v_φ ($v_r = v_x = 0$) в слоях дается известным решением [9]

$$v_\varphi = \frac{\omega R_1 (1+\delta_1)^2 (\xi^2 - 1)}{\xi \delta_1 (2+\delta_1)}, \qquad R_1 \leqslant r \leqslant R_1 + d_1 \tag{1.1}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega R_1 (h-\delta_2)^2 (h^2 - \xi^2) + \omega_2 h R_2 (\xi^2 - (h-\delta_2)^2)}{\xi \delta_2 (2h - \delta_2)} \tag{1.2}$$

$$R_2 - d_2 \leqslant r \leqslant R_2$$

$$\xi = \frac{r}{R_1}, \qquad h = \frac{R_2}{R_1}, \qquad \delta_1 = \frac{d_1}{R_1}, \qquad \delta_2 = \frac{d_2}{R_1}$$

По профилям скоростей (1.1) и (1.2) определяются касательные напряжения на границах пристеночных слоев [9]

$$r = R_1: \quad \tau_{\varphi r} = \frac{2\eta\omega (1+\delta_1)^2}{\delta_1 (2+\delta_1)}; \qquad r = R_1 + d_1: \quad \tau_{\varphi r} = \frac{2\eta\omega}{\delta_1 (2+\delta_1)} \tag{1.3}$$

$$r = R_2 - d_2: \quad \tau_{\varphi r} = \frac{2\eta h^2 (\omega_2 - \omega)}{\delta_2 (2h - \delta_2)};$$

$$r = R_2: \quad \tau_{\varphi r} = \frac{2\eta (\omega_2 - \omega)(h - \delta_2)^2}{\delta_2 (2h - \delta_2)} \tag{1.4}$$

Здесь η — динамическая вязкость жидкой фазы суспензии.

Величины δ_1, δ_2 и ω в формулах (1.1)—(1.4) неизвестны. Найдем их, решая задачу о деформации сети волокон в суспензии. Сеть волокон будем считать упругим континуумом, а деформации сети — конечными. За начальное, ненапряженное состояние примем состояние сети, когда система в покое.

Чтобы исключить смещения ядра как твердого тела, деформацию будем рассматривать в системе координат, вращающейся вместе с ядром с угловой скоростью ω. Учитывая симметрию деформации, перемещения u_r, u_φ, u_x точек сети волокон будем искать в виде $u_r = u_r(r)$, $u_\varphi = u_\varphi(r)$, $u_x = 0$, при этом конечные деформации ε_{ij} через перемещения выражаются формулами

$$2\varepsilon_{rr} = 2u_{r,r} - (u_{r,r}^2 + u_{\varphi,r}^2), \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} - \frac{u_r^2 + u_\varphi^2}{2r^2} \tag{1.5}$$

$$2\varepsilon_{\varphi r} = u_{\varphi,r} - \frac{1}{r}(u_\varphi + u_r u_{\varphi,r} - u_\varphi u_{r,r})$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{rx} = \varepsilon_{\varphi x} = 0, \qquad u_{i,r} = du_i/dr$$

Связь между эффективными напряжениями в сети волокон σ_{ij} и деформациями ε_{ij} зададим формулами, которые введены в [7] и обоснованы в [10]

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(1 - \varepsilon_{\alpha\alpha}) + 4\varkappa\varepsilon_{i\alpha}\varepsilon_{\alpha j}; \qquad i, j, \alpha = r, \varphi, x \tag{1.6}$$

где μ и $\varkappa$ — упругие константы, зависящие от сорта волокон и концентрации. По одинаковым индексам, стоящим рядом, предполагается суммирование.

Подставляя выражения (1.5) в уравнения состояния (1.6), найдем, что не равны нулю только напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\varphi r}$. Тогда уравнения равновения сети волокон имеют вид

$$\frac{d\sigma_{\varphi r}}{dr}+\frac{2\sigma_{\varphi r}}{r}=0,\qquad \frac{d\sigma_{rr}}{dr}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r}=-\rho\omega^2 r \tag{1.7}$$

$$\rho=\rho_2 qc(\rho_1-\rho_2) \tag{1.8}$$

Здесь ρ — эффективная плотность сети волокон, ρ_1, ρ_2 — плотности твердой и жидкой фаз суспензии, q — удельный объем твердой фазы. Формула (1.8) справедлива только при небольшой разнице плотностей фаз, что, однако, всегда выполняется в случае водных суспензий целлюлозных и древесных волокон [8].

Граничные условия

$$\begin{aligned} r=R_1+d_1:&\quad \sigma_{\varphi r}=\tau_{\varphi r},\quad \sigma_{rr}=0,\quad u_r=d_1;\\ r=R_2-d_2:&\quad \sigma_{\varphi r}=\tau_{\varphi r},\quad \sigma_{rr}=0,\quad u_r=-d_2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Первое уравнение (1.7) интегрируется сразу

$$\sigma_{\varphi r}=C/r^2 \tag{1.10}$$

где C — постоянная интегрирования. Однако систему (1.5)—(1.7) в целом будем решать методом разложения в ряд по малым параметрам. Из системы уравнений (1.7) и граничных условий (1.9) видно, что деформированное состояние сети волокон определяется касательными напряжениями на границе, например $\tau_1=\tau_{\varphi r}(R_1)$, и угловой скоростью ядра ω. Введем поэтому два безразмерных параметра, которые будем считать малыми

$$\beta_1=\tau_1/\mu,\qquad \beta_2=\rho\omega^2(R_2^2-R_1^2)/\mu \tag{1.11}$$

Предположим, что перемещения u_r и u_φ можно представить в виде ряда

$$\psi=\psi_1^{(1)}\beta_1+\psi_2^{(1)}\beta_2+\psi_1^{(2)}\beta_1^{(2)}+\psi_{12}^{(2)}\beta_1\beta_2+\psi_2^{(2)}\beta_2^2+\ldots \tag{1.12}$$

где ψ — общее обозначение для перемещений, $\psi_1^{(1)}$, $\psi_2^{(1)}$, ...— не зависящие от β_1 и β_2 функции. В формуле (1.12) учтено, что $\psi=0$ при $\beta_1=\beta_2=0$. Из формул (1.5), (1.6) и (1.9) следует, что тогда и ε_{ij}, σ_{ij}, d_1, d_2 также можно представить в виде рядов (1.12). Раскладывая указанные величины в ряды, подставляя их затем в систему (1.5)—(1.7) и граничные условия (1.9) и приравнивая выражения при одинаковых степенях $\beta_1^m\beta_2^n$, m, $n=0, 1, 2, \ldots$, получим уравнения и граничные условия для определения $\psi_1^{(1)}$, $\psi_2^{(1)}$, ... В данной работе ограничимся первыми ненулевыми приближениями рассматриваемых величин.

В принятом приближении формула (1.10) и первое граничное условие (1.9) дают (см. также (1.11))

$$\sigma_{\varphi r}=\tau_1 R_1^2/r^2=\beta_1\mu R_1^2/r^2 \tag{1.13}$$

Подставляя выражение (1.13) в (1.5), (1.6), получим уравнение

$$\frac{du_\varphi}{dr}-\frac{u_\varphi}{r}=\beta_1\frac{R_1^2}{r^2},\qquad u_\varphi=u_{\varphi 1}^{(1)}\beta_1+u_{\varphi 2}^{(1)}\beta_2 \tag{1.14}$$

Его решение, если пренебречь перемещениями сети волокон как твердого тела, имеет вид

$$u_\varphi=-\beta_1 R_1^2/2r \tag{1.15}$$

Рассмотрим теперь второе уравнение (1.7). Подставляя в него уравнения состояния (1.6) в виде разложения (1.12), с учетом решения (1.15) получим

$$\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{d}{dr}\left[\left(2e-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{du_r}{dr}\right)^2-\frac{u_r}{r}\frac{du_r}{dr}\right]+ \tag{1.16}$$

$$+\left(2e-\frac{3}{2}\right)\left[\frac{1}{r}\left(\frac{du}{dr}\right)^2-\frac{u_r^2}{r^3}\right]=\frac{(4e-1)R_1^4\beta_1^2}{2r^5}-\frac{r\beta_2}{2R_1^2(h^2-1)}$$

$$u_r=u_{r1}^{(1)}\beta_1+u_{r2}^{(1)}\beta_2+u_{r12}^{(2)}\beta_1\beta_2+u_{r2}^{(2)}\beta_2^2$$

где $e=\varkappa/\mu$. В разложении u_r оставлены члены с первой и второй степенями β_1 и β_2, так как эти же степени входят в первое ненулевое приближение, составляющее правую часть уравнения (1.16).

Приравнивая выражения при одинаковых степенях β_1 и β_2 и решая полученные уравнения с условиями $\sigma_{rr}=0$ при $r=R_1+d_1$ и $r=R_2-d_2$ (см. (1.9)), получим $u_{r1}^{(1)}=u_{r12}^{(2)}=0$ и

$$\begin{gathered}
u_r=u_{r1}^{(2)}\beta_1^2+u_{r2}^{(1)}\beta_2=A_1r+\frac{A_2}{r}+\frac{a_1}{r^3}+a_2r^3\\
A_1=\frac{(1-4e)\beta_1^2}{16h^2}+\frac{3(h^2+1)\beta_2}{16(h^2-1)}\\
\frac{A_2}{R_1^2}=\frac{(1-4e)(h^2+1)\beta_1^2}{16h^2}+\frac{3h^2\beta_2}{16(h^2-1)}\\
a_1=\frac{(4e-1)R_1^4\beta_1^2}{16},\quad a_2=-\frac{\beta_2}{16R_1^2(h^2-1)}
\end{gathered}\tag{1.17}$$

Решение (1.17) вместе с последними граничными условиями (1.9) позволяет найти величины δ_1 и δ_2

$$\delta_1=\frac{(1-4e)\tau_1^2}{8\mu^2h^2}+\frac{\rho\omega^2(3h^2+1)R_1^2}{8\mu}\tag{1.18}$$

$$\delta_2=\frac{(4e-1)\tau_1^2}{8\mu^2h}-\frac{\rho\omega^2h(h^2+3)R_1^2}{8\mu}\tag{1.19}$$

Здесь параметры β_1 и β_2 заменены своими выражениями (1.11).

В формулы (1.18) и (1.19) входит не определенная пока угловая скорость вращения ядра ω. В рассматриваемом приближении первая формула (1.3) дает $\tau_1\delta_1=\omega\eta$. Подставляя сюда формулу (1.18), получим уравнение для определения $\omega=\omega(\tau_1)$

$$\rho\mu\tau_1R_2^2(1+3h^2)\omega^2-8\eta\mu^2h^2\omega-(4e-1)\tau_1^3=0\tag{1.20}$$

По имеющимся данным [10], по крайней мере для целлюлозных и древесных волокон, $e>1/4$, и тогда уравнение (1.20) имеет два решения. Для физически допустимого решения $\omega(\tau_1)\to0$ при $\tau_1\to0$, т. е. вращение ядра замедляется, если уменьшается приложенное касательное напряжение, и $\omega(\tau_1)>0$, т. е. вращение ядра происходит в сторону вращения внешнего цилиндра. Обоим этим условиям не удовлетворяет ни одно из решений уравнения (1.20), так как одно из них отрицательно, а другое не стремится к нулю при $\tau_1\to0$. Поэтому стержневое течение с двумя пристеночными слоями для суспензий с $e>1/4$ физически нереализуемо.

2. Пристеночный слой у внешнего цилиндра. Общий случай. Пусть пристеночный слой толщины d_2 образуется только у внешнего цилиндра. Предположим, что ядро суспензии $R_1\leqslant r\leqslant R_2-d_2$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega\neq\omega_2$ в том же направлении, что и внешний цилиндр.

Касательные напряжения $\tau_{\varphi r}$ в жидкой фазе на границах пристеночного слоя $r=R_2-d_2$ и $r=R_2$ определяются по формулам (1.4). Касательное напряжение на поверхности внутреннего цилиндра τ_1, характеризующее силу взаимодействия этой поверхности и суспензии, зависит от скорости вращения ядра ω. Связь $\tau_1=\tau_1(\omega)$ представляет собой граничное условие при $r=R_1$.

Деформированное состояние сети волокон определяется при решении системы (1.5)–(1.7) с граничными условиями

$$r=R_1:\quad \sigma_{\varphi r}=\tau_1(\omega),\quad u_r=0;$$

$$r=R_2-d_2:\quad \sigma_{\varphi r}=\tau_{\varphi r},\quad \sigma_{rr}=0,\quad u_r=-d_2 \tag{2.1}$$

Формула (1.10) с граничными условиями (2.1) дает решение (1.13) и условие равномерного вращения ядра суспензии

$$\tau_1 R_1^2=(R_2-d_2)^2\tau_{\varphi r}(R_2-d_2) \tag{2.2}$$

Повторяя далее выкладки разд. 1, получим, что u_φ определяется формулой (1.15), а u_r удовлетворяет уравнению (1.16). Решая его с граничными условиями (2.1), найдем вначале перемещение u_r, а затем и толщину пристеночного слоя δ_2, которая в рассматриваемом приближении имеет вид

$$\delta_2=\frac{(4e-1)(h^2-1)\tau_1^2}{8\mu^2 h(h^2+1)}-\frac{\rho\omega^2 R_1 R_2(2h^4-h^2+1)}{16\mu(h^2+1)} \tag{2.3}$$

И уменьшаемое и вычитаемое в формуле (2.3) при $e>1/4$ положительны, так как $h>1$. Формула (2.3) имеет смысл, если разность в ее правой части положительна.

Зависимость $\tau_1(\omega_2)$ определяется из равенств (1.4), (2.2) и (2.3), если в явном виде известна связь $\tau_1=\tau_1^{-}(\omega)$.

Особый случай: $\omega=0$. Пусть ядро суспензии неподвижно. Вращение внешнего цилиндра приводит в движение только жидкую фазу в пристеночном слое. Из-за различия граничных условий на границе ядра $r=R_1$, этот случай не является частным случаем предыдущего общего случая и должен рассматриваться отдельно.

Напряжения на границах пристеночного слоя $r=R_2-d_2$ и $r=R_2$ определяются формулами (1.4), а деформированное состояние сети волокон в ядре – уравнениями (1.7) при $\omega=0$.

Граничные условия для определения деформации сети волокон не совпадают с условиями (2.1), а имеют вид

$$r=R_1:\quad u_\varphi=0,\ u_r=0;\qquad r=R_2-d_2:\quad \sigma_{\varphi r}=\tau_{\varphi r},\ \sigma_{rr}=0,\ u_r=-d_2 \tag{2.4}$$

Формула (1.10) с граничным условием (2.4) на $\sigma_{\varphi r}$ дает

$$r^2\sigma_{\varphi r}=(R_2-d_2)^2\tau_{\varphi r}(R_2-d_2) \tag{2.5}$$

Поскольку $\sigma_{\varphi r}(R_1)=\tau_1$, то отсюда при $r=R_1$ получается равенство (2.2).

Напряжение $\sigma_{\varphi r}$ в формуле (2.5) выразим через перемещения по формулам (1.5), (1.6), а правую часть равенства (2.5) заменим на левую часть формулы (2.2). Тогда равенство (2.5) перейдет в уравнение (1.14). Интегрируя его с условием $u_\varphi(R_1)=0$, получим

$$u_\varphi=\frac{\beta_1}{2}\left(r-\frac{R_1^2}{r}\right) \tag{2.6}$$

Так как в данном случае $\omega=0$, то $\beta_2=0$, и поэтому неизвестные u_r и d_2 отыскиваются в виде рядов по β_1. Выкладки, аналогичные изложенным в разд. 1, с учетом решения (2.6) дают, что $u_{r1}^{(1)}=0$ и уравнение для u_r имеет вид

$$\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r^2}=\frac{(4e-1)R_1^4\beta_1^2}{2r^5},\quad u_r=u_{r1}^{(2)}\beta_1^2 \tag{2.7}$$

Решая уравнение (2.7) с граничными условиями (2.4), найдем вначале перемещение u_r, а затем толщину пристеночного слоя δ_2

$$\delta_2=\frac{(h^2-1)(4e-3-h^2)\tau_1^2}{8\mu^2 h(h^2+1)} \tag{2.8}$$

Условие $\delta_2>0$ приводит к необходимому условию существования рассматриваемого течения: $4e-3-h^2>0$.

Связь $\tau_1=\tau_1(\omega_2)$ устанавливается с помощью формул (2.2), (2.8) и (1.4) при

$\omega=0$. В рассматриваемом приближении

$$\omega_2=\frac{(h^2-1)(4e-3-h^2)\tau_1^3}{8\eta\mu^2h^4(h^2+1)} \tag{2.9}$$

3. Пристеночный слой у внутреннего цилиндра. Общий случай. Пусть пристеночный слой толщины d_1 образуется только у внутреннего (неподвижного) цилиндра. Предположим, что ядро суспензии $R_1+d_1\leqslant r\leqslant R_2$ вращается с постоянной угловой скоростью ω в том же направлении, что и наружный цилиндр.

Касательное напряжение $\tau_{\varphi r}$ на границах пристеночного слоя $r=R_1$ и $r=R_1+d_1$ определяется формулами (1.3). Пусть τ_2 — касательное напряжение на поверхности $r=R_2$ ядра суспензии. Будем предполагать, что угловая скорость ядра ω меньше угловой скорости ω_2 наружного цилиндра, тогда $\tau_2>0$. Напряжение τ_2 характеризует силу взаимодействия суспензии и внутренней стенки наружного цилиндра и зависит кроме параметров суспензии от угловых скоростей ω и ω_2. Явная зависимость $\tau_2=\tau_2(\omega,\ \omega_2)$ представляет собой граничное условие при $r=R_2$.

Деформация сети волокон определяется из системы уравнений (1.5) — (1.7) с граничными условиями

$$\begin{aligned} &r=R_1+d_1: \quad \sigma_{\varphi r}=\tau_{\varphi r}, \quad \sigma_{rr}=0, \quad u_r=d_1 \\ &r=R_2: \quad \sigma_{\varphi r}=\tau_2(\omega,\ \omega_2), \quad u_r=0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Интеграл (1.10) с граничными условиями (3.1) для $\sigma_{\varphi r}$ приводит к равенству

$$(R_1+d_1)^2\tau_{\varphi r}(R_1+d_1)=\tau_2R_2^2 \tag{3.2}$$

Поскольку дальнейшие выкладки проводятся так же, как и в разд. 1 и для общего случая разд. 2, то сразу же приведем результаты. Перемещение u_φ определяется формулой (1.15). Перемещение u_r удовлетворяет уравнению (1.16). Его решение с граничными условиями (3.1) дает и само перемещение u_r, и толщину пристеночного слоя δ_1

$$\delta_1=\frac{(4e-1)(h^2-1)\tau_1^2}{8\mu^2h^2(h^2+1)}+\frac{\rho\omega^2R_1^2(h^4-h^2+1)}{8\mu(h^2+1)} \tag{3.3}$$

При $h>1$ всегда $\delta_1>0$.

Связь $\tau_1=\tau_1(\omega_2)$ устанавливается из формул (1.3), (3.2), (3.3), если известна явная зависимость $\tau_2=\tau_2(\omega,\ \omega_2)$.

Особый случай: $\omega=\omega_2$. Ядро суспензии вращается вместе с внешним цилиндром с угловой скоростью ω_2.

Напряжения на границах пристеночного слоя $r=R_1$ и $r=R_1+d_1$ определяются по формулам (1.3) при $\omega=\omega_2$. Деформированное состояние сети описывается уравнениями (1.7), в которых $\omega=\omega_2$.

Граничные условия

$$r=R_1+d_1: \quad \sigma_{\varphi r}=\tau_{\varphi r}, \quad \sigma_{rr}=0, \quad u_r=d_1; \quad r=R_2: \quad u_\varphi=0, \quad u_r=0 \tag{3.4}$$

Из формулы (1.10) и условия (3.4) для $\sigma_{\varphi r}$ следует:

$$r^2\sigma_{\varphi r}=(R_1+d_1)^2\tau_{\varphi r}(R_1+d_1) \tag{3.5}$$

$$(R_1+d_1)^2\tau_{\varphi r}(R_1+d_1)=\tau_2R_2^2, \quad \tau_2=\sigma_{\varphi r}(R_2) \tag{3.6}$$

Уравнение для u_φ получается из равенства (3.5) после подстановки в него формул (1.3) при $\omega=\omega_2$, (1.6) и разложения в ряд по параметрам β_1, $\beta_2=\rho\omega_2^2(R_2^2-R_1^2)/\mu$. В первом ненулевом приближении оно имеет вид (1.14). Его решение с граничным условием $u_\varphi(R_2)=0$ таково

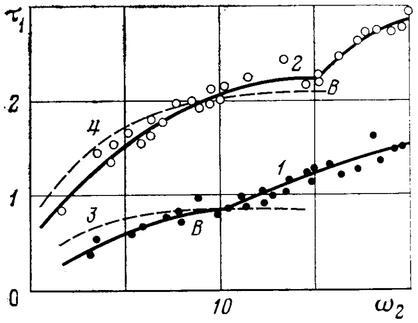
$$u_\varphi=\frac{\beta_1R_1^2}{2}\left(\frac{r}{R_2^2}-\frac{1}{r}\right) \tag{3.7}$$

Уравнение для определения u_r совпадает с уравнением (1.16). Решая его с граничными условиями (3.4), найдем перемещение u_r и толщину пристеночного слоя δ_1

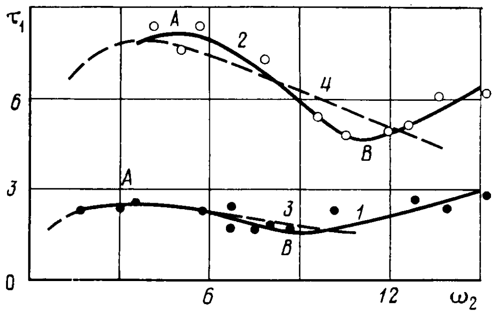
$$\delta_1=\frac{a\tau_1^2}{G^2}+\frac{\rho a\omega_2^2R_2^2(h^2-1)}{\mu} \tag{3.8}$$

$$G^2=\frac{\mu^2h^2}{(4e-3)h^2-1},\quad a=\frac{h^2-1}{8h^2(h^2+1)}$$

Величина G совпадает с эффективным упругим модулем G_1, полученным для стержневого течения Куэтта с внутренним вращающимся цилиндром [7]. Если $e>1$, то формула, определяющая G, имеет смысл.



Фиг. 1



Фиг. 2

Суспензии с таким значением e существуют [10]. Условие $\delta_1>0$ не накладывает никаких ограничений на τ_1 и ω_2.

Явная зависимость $\omega_2(\tau_1)$ следует из формул (1.3), (3.6), (3.8) и в рассматриваемом приближении является решением уравнения

$$\rho aG^2R_2(h^2-1)\tau_1\omega_2^2-\mu\eta G^2\omega_2+a\mu\tau_1^3=0 \tag{3.9}$$

Анализ уравнения (3.9) показывает, что функция $\tau_1(\omega_2)$ немонотонная: τ_1 растет, если $0<\omega_2<\omega_{20}$, и убывает при $\omega_2>\omega_{20}$, где $\omega_{20}=(2\eta^2\mu^3/a^2b^3G^2)^{1/4}$, $b=2\rho R_2^2(h^2-1)$. В точке ω_{20} функция $\tau_1(\omega_2)$ достигает максимума, причем $\tau_1(\omega_{20})=(\mu\eta^2G^2/2a^2b)^{1/4}$.

4. Сравнение с экспериментом. Монография [6] является одной из немногих работ, рассматривающих течение Куэтта волокнистой суспензии с внешним вращающимся цилиндром, в которой дана достаточно полная информация и о результатах экспериментов, и об установке, на которой они получены,– так называемом ротационном вискозиметре. Ротационный вискозиметр состоит из двух соосных гладких цилиндров. Наружный цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω_2. Касательное напряжение τ_1 в зависимости от ω_2 снимается с внутреннего цилиндра. Конструкция прибора предусматривает уменьшение влияния концевых эффектов.

На фиг. 1 и 2 приведены экспериментальные зависимости $\tau_1-\omega_2$, где τ_1 в Па и ω_2 в 1/с, полученные при испытаниях суспензий беленой сульфитной целлюлозы разной концентрации c [6]. Чтобы подчеркнуть характер зависимости, кроме точек даны осредняющие кривые: на фиг. 1 кривые *1*, *2* для $c=0{,}5$; 0,8%, на фиг. 2 кривые *1*, *2* для $c=1{,}0$; 2,0% соответственно. Очевидно, вид кривых на фиг. 1, 2 различен. Например, на фиг. 1 кривая *2* монотонно растет во всей области изменения ω_2, имея излом в точке B, тогда как на фиг. 2 кривая *2* вначале растет до точки A, затем убывает до точки B, а перейдя ее, вновь начинает расти.

Сопоставим эти результаты с полученными выше решениями. Ограничимся только особыми решениями, которые в отличие от общих дают связь $\tau_1-\omega_2$ в явном виде (2.9), (3.9). Из этих двух формул только (3.9) качественно отражает характер зависимости $\tau_1-\omega_2$ для всех кривых на фиг. 1, 2, тогда как формула (2.9) дает монотонный рост τ_1 при всех ω_2, что не соответствует графикам на фиг. 2.

Кривые *3* и *4* – это результаты расчета по формуле (3.9): на фиг. 1 для $c=0{,}5$; 0,8%; на фиг. 2 для $c=1{,}0$; 2,0% соответственно. Расчеты проведены при следующих параметрах: $\rho_1=1150$ кг/м^3, $\rho_2=1000$ кг/м^3, $q=2{,}37\cdot10^{-3}$ м^3/кг, $\eta=1{,}005\cdot10^{-3}$ кг/(м·с), $R_1=0{,}119$ м, $R_2=0{,}130$ м [6, 8]; $\mu=1{,}63$; 5,67; 1,78; 13,23 Н/м^2, $G=0{,}85$; 3,17; 8,60;

15,12 Н/м^2 для c=0,5; 0,8; 1,0; 2,0% соответственно. Как видно, расчетные кривые вполне удовлетворительно согласуются с экспериментальными кривыми *1*, *2*. Наибольшие отклонения наблюдаются при малых ω_2, когда режим еще не вполне установился, и вблизи точки B, в которой стержневое течение сменяется переходным.

Константы μ и G, характеризующие упругие свойства сети волокон, по порядку величины совпадают с аналогичными константами для суспензий беленой березовой крафт-целлюлозы, вычисленными в [10] по результатам опытов [5], и с модулями сдвига, найденными экспериментально в [3, 11]. Следует отметить, что в ряду значений μ значение $\mu(1,\ 0)=1{,}78$ должно, вообще говоря, быть меньше, чем $\mu(0,\ 8)=5{,}67$. Здесь же ситуация противоположная. Такое отклонение, возможно, связано с не совсем одинаковыми условиями проведения эксперимента, так как хорошо известно [6], что свойства суспензии весьма заметно зависят от условий эксперимента.

Различный характер графиков на фиг. 1, 2 можно объяснить следующим образом. Пусть ω_{2*} – угловая скорость в точке B, в которой происходит смена режимов течения и ω_{20} – точка максимума кривой $\tau_1(\omega_2)$. Если $\omega_{20}>\omega_{2*}$, то зависимость $\tau_1-\omega_2$ имеет вид кривых на фиг. 1, а если $\omega_{20}<\omega_{2*}$ – кривых на фиг. 2.

В заключение отметим, что с экспериментальными результатами сопоставлено одно из возможных решений разд. 3 и 4. Теоретически допустимая неоднозначность решения задачи Куэтта при вращении внешнего цилиндра требует дополнительных экспериментальных исследований, которые позволят выбрать подходящее случаю решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Durst R. E., Jenness L. C.* The flow properties of paper pulp stocks. 1. Relationship of shear value to pipe friction for bleached sulphite pulp slurries // Tappi. 1954. V. 37. № 10. P. 417–422.
2. *Durst R. E., Jenness L. C.* The flow properties of paper pulp stocks. 2. Relationship of shear value to pipe friction for soda kraft and groundwood slurries // Tappi. 1955. V. 38. № 4. P. 193–198.
3. *Шайдуров Г. Ф.* О вязкости и упругости бумажной массы // Коллоид. журн. 1955. Т. 17. № 5. С. 397–402.
4. *Baines W. D.* Laminar flow of dilute fibre suspensions // Svensk Papperstidn. 1959. V. 62. № 22. P. 823–828.
5. *Moller K., Duffy G. G., Titchener A. L.* The prediction of pipe friction losses from rotational viscometry // Svensk Papperstidn. 1973. V. 76. № 13. P. 493–499.
6. *Терентьев О. А.* Гидродинамика волокнистых суспензий в целлюлозно-бумажном производстве. М.: Лесная пром-сть. 1980. 248 с.
7. *Бабкин В. А.* Сдвиг волокнистой суспензии между коаксиальными цилиндрами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 2. С. 80–85.
8. *Emmons H. W.* The continuum properties of fiber suspensions // Tappi. 1965. V. 48. № 12. P. 679–687.
9. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидродинамика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
10. *Бабкин В. А.* Уравнения состояния сети волокон в суспензии. Петрозаводск, 1981. С. 1–16.– Деп. в ВИНИТИ 29.01.82, № 400–82.
11. *Thalén N., Wahren D.* Shear modulus and ultimate shear strength of some paper pulp fibre networks // Svensk Papperstidn. 1964. V. 67. № 7. P. 259–264.

Петрозаводск

Поступила в редакцию 19.I.1987