

УДК 532.526.5

ЛОКАЛЬНЫЙ ОТРЫВ НА ТОНКОМ КОНУСЕ, ПРЕДШЕСТВУЮЩИЙ ПОЯВЛЕНИЮ ВИХРЕВОЙ ПЕЛЕНЫ

ЗАМЕТАЕВ В. Б.

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около тонкого тела, имеющего конический носок. Тело установлено под малым углом атаки α . Решение уравнений пограничного слоя на тонком конусе существует не при всех α . Если $\alpha = \varepsilon \alpha_*$, где ε — угол полураствора конуса и $\alpha_* = 0,6$, то решение автономных уравнений пограничного слоя особое [1]. Особенность характеризуется изломом в окружном напряжении трения τ_1 и в толщине вытеснения при некотором $\varphi = \varphi_*$, φ — угловая координата, отсчитываемая от линии растекания. Отметим, что $\tau_1(\varphi_*) = 0$. При больших углах атаки решение автономных уравнений пограничного слоя непродолжимо вплоть до подветренной линии стекания, и соответственно необходимо менять картину потенциального течения, чтобы построить рациональную теорию. Примером такого изменения может быть учет образования вихревой пелены.

В работе изучена область течения жидкости в пограничном слое в окрестности точки $\varphi = \varphi_*$, когда угол атаки стремится к критическому значению. Учтено взаимодействие пограничного слоя с внешним потенциальным потоком, обусловленное изломом толщины вытеснения, как это сделано в [2–4]. Установлено, что в области взаимодействия течение существенно трехмерно в отличие от пограничного слоя, формирующего эту область [1]. Для окружного напряжения трения получено интегродифференциальное уравнение; решения его построены численно. Если угол атаки меньше или равен критическому, то решения указанного уравнения существуют вдоль всего конуса — они безотрывны; если же угол больше критического, то на конечном расстоянии от носика конуса появляются возвратные токи для окружного движения. Отрицательное окружное напряжение трения по мере продвижения вдоль конуса возрастает по величине и на конечном расстоянии от носика обращается в бесконечность. Эта особая точка, соответственно точке зарождения вихревой пелены на поверхности конуса. С увеличением приращения угла атаки к критическому особая точка быстро перемещается в носик, что соответствует случаю «больших углов» атаки. Таким образом, взаимодействие позволяет установить грань между присоединенным течением и отрывным и указывает координату точки схода вихревой пелены.

1. Вытесняющее действие пограничного слоя и индуцированное потенциальное движение. Будем далее считать, что обезразмеривание всех гидродинамических функций выполнено так же, как и в [1]. В работе [1] получено распределение скоростей и давления на конусе из рассмотрения потенциального потока, выведены уравнения пограничного слоя. Там же исследованы решения уравнений пограничного слоя при $\Delta\alpha \rightarrow 0$, $\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha_*$ в окрестности точки нулевого окружного трения $\varphi = \varphi_*$. Указаны размеры характерных областей течения в зависимости от величины $\Delta\alpha$. На фиг. 1 указана картина течения: фигура $OO'ABCD$ схематически моделирует любую из подобластей области взаимодействия. Разные подобласти различаются только радиальным размером, конкретные масштабы указываются при непосредственном рассмотрении всех зон. Отметим, что взаимодействие существенно, если $\varphi - \varphi_* = O(\varepsilon^{-2/5} R^{-1/5})$. При этих размерах индуцированное давление будет управлять вязким течением на дне области взаимодействия.

Введем малый параметр $\tau = \varepsilon^{-2/5} R^{-1/5}$, тогда в основной части пограничного слоя асимптотическое разложение решения следующее [1]:

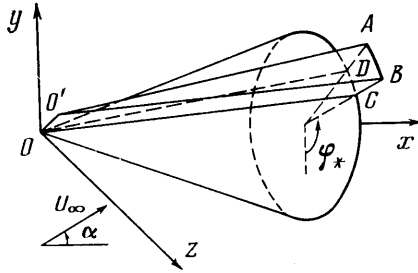
$$\psi = \psi_{00}(\eta) + \tau \psi_{10}(x, \varphi_1, \eta) + \dots$$

$$F = F_{00}(\eta) + \tau F_{10}(x, \varphi_1, \eta) + \dots, \quad \varphi = \varphi_* + \tau \varphi_1$$

В отличие от [1] в этих формулах содержится явная зависимость от координаты x вдоль конуса, тем не менее ψ_{10} и F_{10} выражаются соответствующими формулами [1], а x содержится в произвольной функции $B(x, \varphi_1)$. В результате радиальная компонента скорости на внешней границе пограничного слоя будет иметь вид

$$w = \varepsilon + \dots + R^{-1/2} x^{-1/2} \left(-V_* \frac{\partial B}{\partial \varphi_1} \right) + \dots \quad (1.1)$$

В (1.1) указана переменная часть индуцированной пограничным слоем вертикальной скорости; в формуле содержится зависимость от x , кото-



Фиг. 1

рая и вызывает неавтономность индуцированного давления. Через V_* обозначено значение окружной скорости потенциального течения при $\varphi = \varphi_*$.

Рассмотрим потенциальное течение вне пограничного слоя, вызванное скоростью (1.1). Асимптотическое разложение решения уравнений Навье — Стокса, записанных в цилиндрической системе координат [5], в соответствующей этому случаю области $OO'ABCD$ (фиг. 1), имеет вид

$$w = \varepsilon + \dots + R^{-1/2} w_1 - \dots, \quad u = 1 + \dots + \varepsilon R^{-1/2} u_1 + \dots \quad (1.2)$$

$$v = \varepsilon V_* + \dots + R^{-1/2} v_1 + \dots, \quad p = -\varepsilon^2 \ln \varepsilon + \dots + \varepsilon R^{-1/2} p_1 + \dots$$

$$\varphi = \varphi_* + \tau \varphi_1, \quad r = \varepsilon x + \varepsilon \tau y_1, \quad x = x_1$$

Подстановка (1.2) в уравнения Навье — Стокса дает следующую систему уравнений относительно членов с индексом 1:

$$\begin{aligned} \frac{V_*}{x_1} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial p_1}{\partial y_1} &= 0, & V_* \frac{\partial v_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_1} &= 0 \\ \frac{V_*}{x_1} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} &= 0, & \frac{\partial w_1}{\partial y_1} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi_1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Нетрудно проверить, что (1.3) не противоречит уравнению Бернулли. Из системы (1.3) вытекают условия Коши — Римана для функции $f(z)$, определяемой следующим образом:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{V_*} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi_1} + i \frac{\partial w_1}{\partial \varphi_1}, & z &= \varphi_1 + i \frac{y_1}{x_1} \\ \text{Im } f &= -V_* x_1^{-1/2} \frac{\partial^2 B}{\partial \varphi_1^2}, & y_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

В [1] установлено, что $B(x_1, \varphi_1)$ ведет себя линейно по φ_1 при $\varphi_1 \rightarrow \pm \infty$.

В этом случае задача (1.4) отыскания функции $f(z)$, аналитичной в верхней полуплоскости, по заданной мнимой ее части на действительной оси достаточно проста. В частности, найдя $\operatorname{Re} f(z)$ на действительной оси, можно определить неизвестный градиент давления

$$\frac{\partial p_1}{\partial \varphi_1} = - \frac{V_*^2}{\pi \sqrt{x_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \frac{dt}{t - \varphi_1} \quad (1.5)$$

Отметим, что, вообще говоря, давление p_1 меняется поперек основной части пограничного слоя; однако, как это может быть показано из результатов [1], градиент давления (1.5) остается неизменным.

2. Вязкий подслои области взаимодействия. Исходя из вида разложения [1] для функций тока, в вязком подслое будем искать неавтономное решение в виде

$$\begin{aligned} u &= \tau^{1/2} \tau_{00} \frac{Y}{x^{1/2}} + \tau u_1(x, Y, \varphi_1) + \dots \\ v &= \tau^{1/2} \frac{1}{2} p_{00} \frac{Y^2}{x} + \tau^{5/4} v_1 + \tau^{3/2} v_2 + \dots \\ w &= \tau^{1/2} \left[- \frac{\tau_{00} Y^2}{4x^{3/2}} + w_1 \right] + \tau^{5/4} w_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$p = -\varepsilon^2 \ln \varepsilon + \dots + \varepsilon R^{-1/2} p_2(x, \varphi_1) + \dots, \quad \varphi = \varphi_* + \tau \varphi_1, \quad r = \varepsilon x + R^{-1/2} \tau^{1/4} Y$$

Подставляя (2.1) в уравнения Навье – Стокса, получим относительно v_1 краевую задачу, решение ее дается (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial Y^2} - \frac{1}{2} p_{00} \frac{Y^2}{x^2} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi_1} - p_{00} \frac{Y}{x} w_1 &= - \frac{1}{4} \tau_{00} p_{00} \frac{Y^3}{x^{5/2}} \\ \frac{1}{x} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial w_1}{\partial Y} &= 0 \\ v_1 = w_1 = 0, \quad Y = 0, \quad v_1 = O(Y^\alpha), \quad Y \rightarrow +\infty \\ v_1 = p_{00} B(x, \varphi_1) \frac{Y}{x^{1/2}} - \frac{\tau_{00} p_{00}}{80} \left(\frac{Y}{x^{1/2}} \right)^5 \\ w_1 &= - \frac{p_{00}}{2} \frac{\partial B}{\partial \varphi_1} \frac{Y^2}{x^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

С учетом (2.2) краевая задача для u_1 примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} - \frac{1}{2} p_{00} \frac{Y^2}{x^2} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi_1} &= - \left(\frac{3}{4} \tau_{00}^2 + \frac{1}{2} \tau_{00} p_{00} \frac{\partial B}{\partial \varphi_1} \right) \frac{Y^2}{x^2} \\ u_1 = 0, \quad Y = 0, \quad u_1 = O(Y^\alpha), \quad Y \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

После введения новой переменной $\eta = Y/x^{1/2}$ и замены переменных (2.3) краевая задача для u_1 примет вид (2.4)

$$u_1 = \frac{\tau_{00}}{24} \left(a_0 - \frac{3}{2} \tau_{00} \right) \eta^4 + \frac{\tau_{00}}{p_{00}} (a_0 \varphi_1 + p_{00} B) + g \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} p_{00} \eta^2 \frac{\partial g}{\partial \varphi_1} = 0 \quad (2.4)$$

$$g = -\tau_{00}/p_{00} (a_0 \varphi_1 + p_{00} B), \quad \eta = 0, \quad g = 0, \quad \eta \rightarrow +\infty$$

В [1] установлено, что $B = O(|\varphi_1|)$ при $\varphi_1 \rightarrow \pm\infty$, причем $g = 0$ при

$\varphi_1 \rightarrow -\infty$. Определяя преобразование Фурье по формуле (2.5), решение задачи (2.4) можно представить в виде (2.6).

$$\bar{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\varphi_1) e^{i\omega\varphi_1} d\varphi_1 \quad (2.5)$$

$$\frac{\overline{\partial^2 g}}{\partial \varphi_1^2} = \frac{\pi i g^*}{\sqrt{2} \Gamma(1/4)} \left(\frac{1}{2} p_{00} i \omega \right)^{1/4} \eta^{1/2} H_{1/4}^{(1)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p_{00} i \omega \right)^{1/2} \eta^2 \right] \quad (2.6)$$

В формуле (2.6) g^* — вторая производная функции g при $\eta=0$, $H_{1/4}^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля [6], в комплексной плоскости ω разрез проведен вдоль отрицательной мнимой полуоси.

После соответствующих преобразований краевая задача относительно v_2 примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_2}{\partial Y^2} - \frac{1}{2} p_{00} \frac{Y^2}{x^2} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi_1} - p_{00} \frac{Y}{x} w_2 &= \frac{1}{x} \frac{\partial p_2}{\partial \varphi_1} + p_{00} \left[\tau_{00} x \frac{\partial B}{\partial x} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} p_{00} B \frac{\partial B}{\partial \varphi_1} + \frac{1}{4} \tau_{00} B \right] \frac{Y^2}{x^2} + \frac{1}{160} \tau_{00} p_{00} \left[\frac{11}{2} \tau_{00} + 3 p_{00} \frac{\partial B}{\partial \varphi_1} \right] \frac{Y^6}{x^4} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi_1} + \frac{u_1}{x} + \frac{\partial w_2}{\partial Y} &= 0 \\ v_2 = w_2 = 0, \quad Y = 0, \quad v_2 = O(Y^\alpha), \quad Y \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (2.7)$$

Как и в (2.4), введем переменную η , а также две функции тока по формулам $v_2 = \partial \psi_2 / \partial \eta$, $u_1 = \partial F_2 / \partial \eta$. Функцию F_2 можно определить с помощью (2.3). Введем дополнительно функцию F : $g = \partial F / \partial \eta$. Формулируя задачу (2.7) для ψ_2 , выполняя необходимые преобразования и делая замену переменных (2.8), окончательно получим задачу (2.9)

$$\begin{aligned} \psi_2 = \psi + \frac{p_{00}}{80640} \left[\frac{7}{2} \tau_{00}^2 - \frac{8}{3} a_0 \tau_{00} + 2 a_0^2 \right] \eta^3 + \\ + \left[\frac{a_0}{120} (a_0 - 2 \tau_{00}) \varphi_1 - \frac{\tau_{00} p_{00}}{80} B \right] \eta^5 + \left[\frac{1}{2} p_{00} B^2 - \frac{a_0^2}{2 p_{00}} \varphi_1^2 \right] \eta \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} - \frac{1}{2} p_{00} \eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_1 \partial \eta} + p_{00} \eta \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial p_2}{\partial \varphi_1} + p_{00} \eta \left[\frac{1}{2} \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{3}{2} F - x \frac{\partial F}{\partial x} \right] \\ \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = - \left[\frac{1}{2} p_{00} B^2 - \frac{a_0^2}{2 p_{00}} \varphi_1^2 \right] = -c(\varphi_1, x), \quad \eta = 0 \\ \psi = 0, \quad \eta \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

Решение задачи (2.9) можно построить методом преобразования Фурье, предварительно продифференцировав ее нужное число раз. В результате определяется условие, при котором решение краевой задачи (2.9) существует. После применения обратного преобразования Фурье получим

$$\int_{-\infty}^{\varphi_1} \left[\mu E_1 g(0) - \mu D_1 x \frac{\partial g(0)}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial \varphi_1} \right] d\varphi_1 = - \frac{(-1/4)!}{2\sqrt{2} p_{00} (1/4)!} \int_{-\infty}^{\varphi_1} \frac{\partial p_2}{\partial t} \frac{dt}{\sqrt{\varphi_1 - t}}$$

$$\mu = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{[\Gamma(1/4)]^2}, \quad E_1 = \int_0^{\infty} s^2 H_{-1/4}^{(1)} \left[H_{-1/4}^{(1)} - \frac{1}{s} H_{1/4}^{(1)} \right] ds = - \frac{2^{3/2} [\Gamma(1/4)]^2}{3\pi^2}$$

$$D_1 = \int_0^{\infty} s^{1/2} H_{-\frac{3}{4}}^{(1)} H_{\frac{1}{4}}^{(1)} ds = \frac{[\Gamma(1/4)]^2}{\pi^2 \sqrt{2}}, \quad \arg s = \frac{\pi}{4}$$

Здесь $g(0)$ — значение функции g при $\eta=0$, указанное в (2.4), функция s приведена в (2.9). Учитывая вид градиента давления из потенциального потока (1.5), получим уравнение

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\varphi_1} \left[p_{00} B \frac{\partial B}{\partial \varphi_1} - \frac{a_0^2}{p_{00}} \lambda \varphi_1 + a_0 (1-\lambda) B + a_0 \frac{3}{4} (1-\lambda) x \frac{\partial B}{\partial x} \right] d\varphi_1 = \\ & = \frac{1}{2} \frac{(-1/4)! V_*^2}{\sqrt{2 p_{00}} (1/4)!} \frac{1}{\sqrt{x_{\varphi_1}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \frac{dt}{\sqrt{t-\varphi_1}}, \quad \lambda = 1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_{00}}{a_0} \\ & B = \frac{a_0}{p_{00}} (-\varphi_1) - \frac{(-a_1) \alpha_1}{p_{00}} (-\varphi_1)^{-\lambda} + \dots, \quad \varphi_1 \rightarrow -\infty, \\ & B = \frac{a_0}{p_{00}} \lambda \varphi_1 + \dots, \quad \varphi_1 \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Краевые условия для функции B взяты из [1]; параметр λ ранее в [1] вычислялся приближенно, здесь же указано его точное значение. Параметр α_1 представляет собой приращение угла атаки и вводится по формуле $\alpha = \varepsilon (\alpha_* + \tau^{1+\lambda} \alpha_1)$. Окончательно можно сформулировать следующую краевую задачу:

$$B = \frac{a_0}{p_{00}} k A, \quad \varphi_1 = k \varphi, \quad k = \frac{\Gamma(-1/4)! V_*^2}{\sqrt{2 p_{00}} (1/4)! a_0} \Big]^{2/5}, \quad \Gamma = \frac{(-a_1) \alpha_1}{a_0 k^{1+\lambda}} \quad (2.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\varphi} \left[A \frac{\partial A}{\partial t} - \lambda t + (1-\lambda) A + \frac{3}{4} (1-\lambda) x \frac{\partial A}{\partial x} \right] dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_{\varphi}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \frac{dt}{\sqrt{t-\varphi}}$$

$$A = -\varphi - \Gamma (-\varphi)^{-\lambda} + \dots, \quad \varphi \rightarrow -\infty, \quad A = \lambda \varphi + \dots, \quad \varphi \rightarrow +\infty$$

Таким образом, поверхностное окружное напряжение трения $A(x, \varphi)$ в области взаимодействия при $\alpha = \varepsilon (\alpha_* + \tau^{1+\lambda} \alpha_1)$ должно удовлетворять (2.10). Решение зависит от двух параметров: λ — наклона трения вниз по потоку от области взаимодействия и Γ — приращения угла атаки.

3. Численное и асимптотическое исследование задачи (2.10). Предварительно укажем, что параметр Γ может быть исключен аффинным преобразованием вида

$$A = (\pm \Gamma)^{1/(1+\lambda)} A_1, \quad \varphi = (\pm \Gamma)^{1/(1+\lambda)} \varphi_2, \quad x = (\pm \Gamma)^{-5/(1+\lambda)} x_1$$

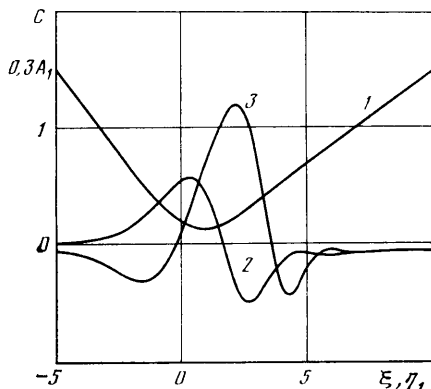
Следовательно, возможны три случая: $\Gamma < 0$, $\Gamma = 0$, $\Gamma > 0$. Относительно A имеется интегродифференциальное уравнение от двух переменных, а краевые условия заданы только при $|\varphi| \rightarrow \infty$. Из пограничного слоя, охватывающего область взаимодействия, никаких условий в каком-либо сечении по x не следует, соответственно необходимо исследовать само уравнение. Из правой части (2.10) следует, что при $x \rightarrow 0$ действие индуцированного давления неограниченно возрастает, что вызывает формирование соответствующего автомодельного решения. Ищем это решение в виде

$$\begin{aligned} & A = x^{-1/5} A_1(\xi) + x^{\beta} A_2(\xi) + \dots, \quad \xi = x^{1/5} \varphi = O(1), \quad x \rightarrow 0 \\ & \int_{-\infty}^{\xi} \left[A_1 A_1' - \lambda t + \frac{17}{20} (1-\lambda) A_1 + \frac{3}{20} (1-\lambda) t A_1' \right] dt = \frac{1}{2} \int_{\xi}^{+\infty} \frac{A_1''(t) dt}{\sqrt{t-\xi}} \quad (3.1) \end{aligned}$$

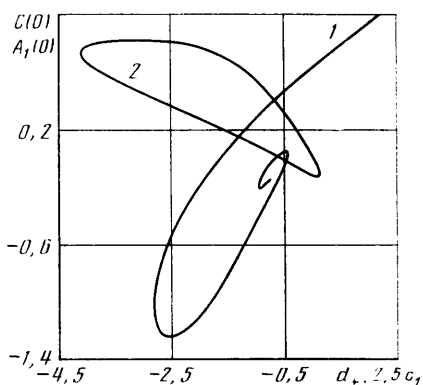
$$A_1 = -\xi + c_1 (-\xi)^{-(17\lambda+3)/(17+3\lambda)} + \dots, \quad \xi \rightarrow -\infty, \quad A_1 = \lambda \xi + \dots, \quad \xi \rightarrow +\infty$$

Отметим, что асимптотика в (3.1) содержит собственную функцию, коэффициент c_1 остается произвольным. На фиг. 2 представлена зависимость $A_1(\xi)$ при $c_1=0$,

$\lambda=0,5$ (кривая 1). На фиг. 3 указана зависимость $A_1(0)$ от величины c_1 (кривая 1), эта зависимость качественно похожа на соответствующие кривые в [4, 7]. В автономном пограничном слое перед областью взаимодействия отсутствуют члены с $c_1 \neq 0$, поэтому физический смысл имеет решение с $c_1=0$. Отметим, что если исходный пограничный слой возмущен неавтономным градиентом давления, так



Фиг. 2



Фиг. 3

что $c_1 \neq 0$, то соответственно существенно поменяется A_1 , более того, решение задачи (3.1) существует не при всех c_1 (фиг. 3).

Для численного анализа (2.10) было преобразовано к виду

$$A = x^{-1/2} T(x, y), \quad y = -x^{1/2} \varphi$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^y \frac{G(x, t) dt}{\sqrt{y-t}} \quad (3.2)$$

$$G = \left(T - \frac{3}{20}(1-\lambda)y \right) \frac{\partial T}{\partial y} - \lambda y - \frac{17}{20}(1-\lambda)T - \frac{3}{4}(1-\lambda)x \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$T = -\lambda y + \dots, \quad y \rightarrow -\infty$$

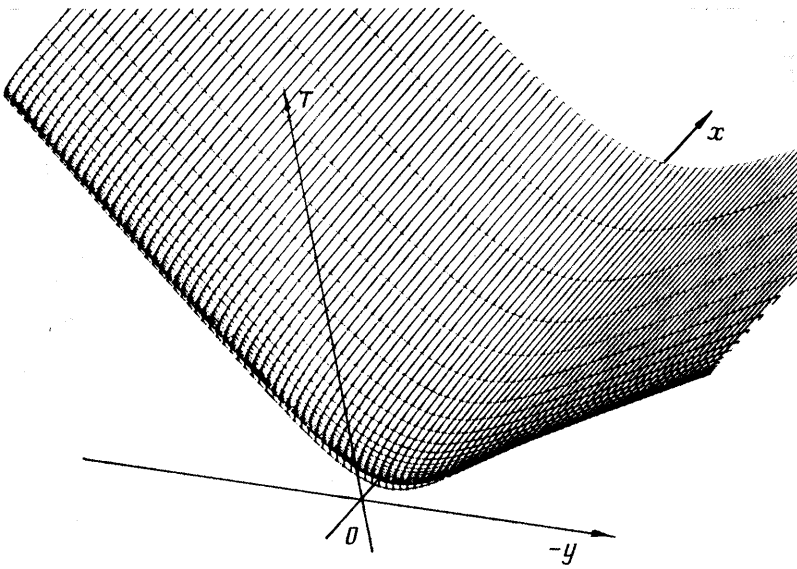
$$T = y - x^{1/2(1+\lambda)} \Gamma y^{-\lambda} + 2(1+\lambda)/(9-5\lambda) y^{-7/2} + \dots, \quad G = -1/4(1+\lambda) y^{-7/2} + \dots, \quad y \rightarrow +\infty$$

$$T = A_1(-y), \quad x=0, \quad c_1=0$$

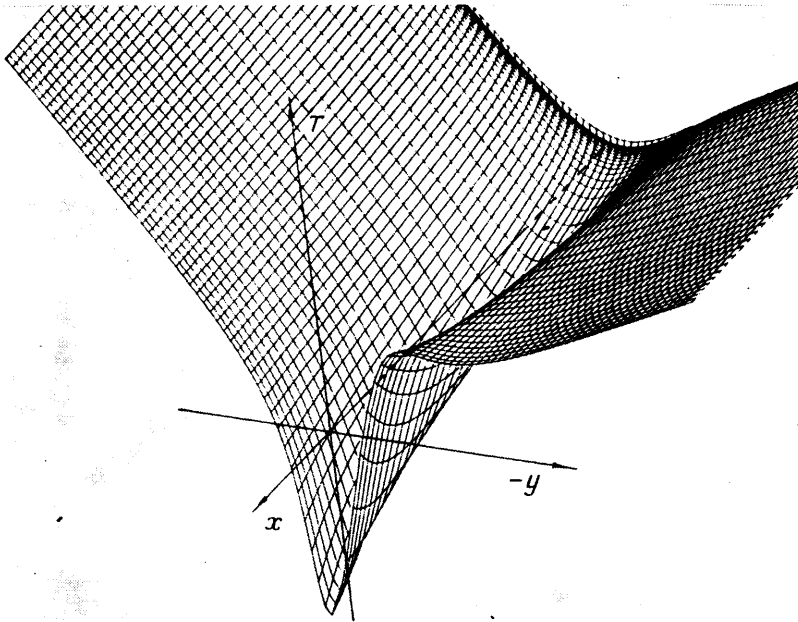
Если $\Gamma=0$, то решение не зависит от x , $T=A_1(-y)$. Численный расчет полного уравнения (3.2) подтверждает этот факт. Во всех расчетах $\lambda=0,5$.

Для расчета уравнение (3.2) заменялось системой нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функции $T(x, y)$ в узлах. Использовалась полностью неявная, трехслойная схема по переменной x . Производные по y и интеграл вычислялись со вторым порядком точности аналогично тому, как это делалось в [8]. Первая производная по x в точке x_i вычислялась через известные значения функции в точках x_{i-2} , x_{i-1} и через искомое значение в точке x_i . Расчет выполнялся маршевым методом по переменной x : на слоях x_1 и x_2 решение бралось из асимптотики решения при $x \rightarrow 0$ (3.1), затем система нелинейных уравнений относительно значений функции на слое x_3 решалась с помощью метода Ньютона; при известных решениях на слоях x_2 и x_3 процедура повторялась для слоя x_4 и т. д. По переменной y сетка была равномерна $y_{\min} = -10$, $y_{\max} = 10$, $\Delta y = 0,2$; по переменной x шаг переменный. Уменьшение Δy в 2 раза приводило к изменению результатов на 0,5%, однако увеличение размера сетки по y в 2 раза приводило к изменению решения до 5% в определенных точках сетки. По описанной методике решение было построено для $\Gamma = \pm 2$. Параллельная проекция функции $T(x, -y)$ для $\Gamma = -2$, $\lambda = 0,5$, $x = [0; 2]$, $y = [-10; 10]$ представлена на фиг. 4, а для $\Gamma = 2$ — на фиг. 5. В процессе расчета исследовался вопрос о накоплении ошибки при движении от слоя к слою. В некотором сечении x_i , близком к начальному, задавалось возмущение $\delta T_{i,m}$ и изучалась его эволюция по уже построенному решению расчетным способом, т. е. возмущение пересчитывалось от слоя к слою с использованием известной матрицы перехода, вычисленной по исходному невозмущенному решению.

Установлено, что для $\Gamma = -2$ норма возмущения $\max |\delta T_{i,m}|$ убывает от слоя к слою. Для $\Gamma = 2$ норма возмущения также убывает, не только до $x=1,7$. Рельеф функции T (фиг. 5) становится довольно крутым при $x > 1,5$, а абсолютные значе-



Фиг. 4



Фиг. 5

ния производных достигают величин $O(10)$. Расчет при $x > 2$ затруднен, так как глубина «оврага» функции T быстро нарастает и численная схема работает неудовлетворительно. В решении формируется особенность в точке $x_* = 2,3$, $y_* = 0,7$ для $\Gamma = 2$, $\lambda = 0,5$.

Построим решение (3.2) при $x \rightarrow x_*$, ищем его в виде

$$T = (x_* - x)^{-3/5} \frac{\pi}{2} \left[\frac{3(1-\lambda)x_*}{2\pi} \right]^{3/5} C(\eta_i) + \dots,$$

$$\eta_1 = \left[\frac{3(1-\lambda)x_*}{2\pi} \right]^{2/3} \frac{y-y_*}{(x_*-x)^{2/3}} \quad (3.3)$$

$$C'' = \int_{-\infty}^{\eta_1} \left[\left(C - \frac{2}{5}t \right) C' - \frac{3}{5}C \right] \frac{dt}{\sqrt{\eta_1-t}}, \quad C = d_{\pm} (\pm \eta_1)^{-3/2} + \dots, \quad \eta_1 \rightarrow \pm \infty$$

Краевые условия для функции $C(\eta_1)$ получены исходя из предположения, что $T(x, y)$ регулярна при $x \rightarrow x_*$ и $y - y_* = O(1)$. В общем случае произвольных d_+ задача (3.3) должна решаться численно, величина параметра d_+ определяется полным расчетом (3.2). На фиг. 2 изображена $C(\eta_1)$ для $d_+ = -1$, кривые 2-3. Кривая 2 соответствует верхней ветви кривой 2 на фиг. 3, а кривая 3 — нижней. На фиг. 3 (кривая 2) изображена зависимость $C(0)$ от d_+ , видно, что решение (3.3) существует не при всех d_+ и неединственно. При малых d_+ решение (3.3) может быть построено аналитически, так как нелинейный член выпадает

$$C = d_+ S(\eta_1) + \dots, \quad d_+ \rightarrow 0$$

$$S = \text{Im} \left[\exp \left(\frac{3\pi i}{4} \right) \int_0^{+\infty} \sqrt{t} \exp(i\eta_1 t + \pi^{-1/2} e^{3/2} t^{3/2}) dt \right]$$

Выполнив полное численное и аналитическое исследование краевой задачи (2.10), можно сделать определенные выводы о свойствах течения, описываемого сформулированной задачей.

В рассматриваемой ситуации $\alpha \rightarrow \epsilon \alpha$. взаимодействие пограничного слоя с потенциальным потоком оказывается очень существенным, в частности при заданном $\Delta \alpha(\epsilon) > 0$ относительно α . вязкие уравнения с учетом взаимодействия выбирают характерную длину вдоль конуса, на протяжении которой течение присоединенное, хотя в физической постановке задачи характерный размер может отсутствовать. При $x > x_*$ рассмотренная модель неприменима — по всей видимости, должен иметь место «глобальный отрыв» — вихревая пелена, сошедшая из точки с координатами $x = x_*$, $\varphi = -y_*$. Важно отметить, что если вихревая пелена тонкая, как и тело, то она не возмущает пограничный слой в области присоединенного течения в главном приближении и соответственно не может повлиять на полученные результаты. Отметим также, что если $\Gamma \gg 1$, то точка зарождения вихревой пелены сдвигается в носик конуса и срыв с него происходит обычным — коническим образом.

Автор выражает благодарность за полезные советы и обсуждение результатов В. В. Сычеву и А. И. Рубану.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заметаев В. Б. Особое решение уравнений пограничного слоя на тонком конусе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2.
2. Рубан А. И. Асимптотическая теория коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 42—51.
3. Stewartson K., Smith F. T., Kaups K. Marginal separation // Stud. in Appl. Math. 1982. V. 67. № 1. P. 45—61.
4. Brown S. N. Marginal separation of a three-dimensional boundary layer on a line of symmetry // J Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 95—111.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
7. Brown S. N., Stewartson K. On an integral equation of marginal separation // SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. № 5. P. 1119—1126.
8. Smith F. T. Concerning dynamic stall // Aeronaut. Quart 1982. V. 33. Pt 4. P. 331—352.

Москва

Поступила в редакцию
8.1.1987