МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1987

УДК 536.6.011.8

ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ОПИСАНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ГАЗОДИНАМИКЕ

ДУБРОВСКИЙ Г. В.

Решение полной системы уравнений газодинамики совместно с уравнениями кинетики, описывающими вращательно-колебательную релаксацию в газовых струях [1–3], кинетические процессы в ударных волнах [4–6], кинетику фазовых превращений [7], слишком сложно, что заставляет искать сокращенные способы описания релаксации, используя приближенные решения релаксационных уравнений [8]. Существующие решения связаны с частным видом столкновительных моделей в газовой фазе, что затрудняет как выявление общих закономерностей релаксационных явлений, так и перенос их на более сложные среды.

В данной работе, продолжающей исследования [9, 10], развит метод решения релаксационных уравнений для плавных распределений, который применим для произвольных столкновительных моделей при наличии переменных макропараметров и источников. Изучаются вопросы о влиянии на характер релаксации начальных данных, градиента температуры, внешних источников. Для смеси гармонических молекул получена нелинейная система уравнений для запаса квантов в сильно неравновесных условиях. Обсуждается постановка некоторых задач с учетом релаксационных эффектов.

1. Система релаксационных уравнений. Уравнения кинетики для смеси молекул сортов s с одним квантовым числом ν запишем в виде

$$d_t c_s(\nu)+n^{-1}\nabla[n\mathbf{v}_s(\nu)]=\sum_\gamma[I_s^-(\nu,\gamma)-I_s^+(\nu,\gamma)]+F_s(s) \tag{1.1}$$

$$c_s(\nu)\equiv c_s(\nu;\mathbf{r},t)=n_s(\nu;\mathbf{r},t)\,|\,n(\mathbf{r},t),\qquad n=\sum_{s,\nu}n_s(\nu),\ \ d_t=\partial_t+\mathbf{u}\nabla \tag{1.2}$$

$$I_s^-(\nu,\gamma)=\overset{*}{K}_{\nu-\gamma,\nu}(s)c_s(\nu-\gamma)-\overset{*}{K}_{\nu,\nu-\gamma}(s)c_s(\nu),$$

$$I_s^+(\nu,\gamma)=\overset{*}{K}_{\nu,\nu+\gamma}(s)c_s(\nu)-\overset{*}{K}_{\nu+\gamma,\nu}(s)c_s(\nu+\gamma) \tag{1.3}$$

$$\overset{*}{K}_{\nu,\nu+\gamma}(s)=\sum_{s_1}\Big[K_{\nu,\nu+\gamma}(s,s_1)+n\sum_{\nu_1}K_{\nu,\nu+\gamma}^{\nu_1+\gamma_1,\nu_1}(s,s_1)c_{s_1}(\nu_1+\gamma_1)\Big] \tag{1.4}$$

где $\mathbf{v}_s(\nu)$ — скорость диффузии компоненты (s,ν); $F_s(\nu)$ — слагаемое, описывающее локализованные источники частиц сорта (s,ν); $\mathbf{u}$ — гидродинамическая скорость; $K_{\nu,\nu+\gamma}(s,s_1)$, $K_{\nu,\nu+\gamma}^{\nu_1+\gamma_1,\nu_1}(s,s_1)$ — константы скоростей TV-, VV-, VV'-переходов при столкновении частиц s и s_1; $I_s^\pm(\nu,\gamma)$ — изоквантовые γ-токи частиц на уровне ν.

Широкий класс источников может быть описан выражением вида

$$F_s(\nu)=\Phi(\mathbf{r},t)[L_s^+(\nu)-L_s^-(\nu)c_s(\nu)] \tag{1.5}$$

где Φ — пространственно-временной профиль источника, $L_s^\pm$ — функции, характеризующие скорость прихода-убыли компоненты (s,ν). Кроме локализованных источников (1.5) на систему могут действовать нелокализованные источники, приводящие к небольцмановскому термостату.

Для больцмановского термостата выполняется принцип детального баланса

$$g_s(\nu)\exp\left(-\frac{E_s(\nu)}{kT}\right)K^*_{\nu\nu'}(s)=g_s(\nu')\exp\left(-\frac{E_s(\nu')}{kT}\right) \qquad (1.6)$$

где $E_s(\nu)$ — энергия молекулы s в состоянии ν, $g_s(\nu)$ — статистический вес состояния, k — постоянная Больцмана, T — температура газа. Для небольцмановского термостата, возникающего из-за влияния поля излучения, неравновесных распределений в выражениях (1.4) для $K^*_{\nu\nu'}(s)$ и т. д., соотношение (1.6) не выполняется. При $F_s\equiv0$ для больцмановского термостата, в котором выполняются соотношения (1.6), и для констант скоростей $K^*_{\nu\nu'}(s,s_1)$, $K^{\nu_1\nu_1'}_{\nu\nu'}(s,s_1)$ единственным стационарным распределением является больцмановское

$$c_s(\nu)=N_sQ_s^{-1}g_s(\nu)\exp\left(-\frac{E_s(\nu)}{kT}\right), \qquad N_s=\frac{n_s}{n}$$

Для такого распределения при любых ν и γ

$$I_s^-(\nu,\gamma)=I_s^+(\nu,\gamma)=0$$

Как правило, процесс полной релаксации происходит через последовательность квазистационарных распределений $c_s{}^q(\nu)$, для которых выполняются приближенные равенства

$$I_s^-(\nu,\gamma)\approx I_s^+(\nu,\gamma)\approx I_s=\text{const} \qquad (1.7)$$

где в частном случае может быть $I_s=0$. Выполнимость (1.7) может быть обеспечена, например, за счет обращения в ноль одноквантовых токов от VV-процессов (распределение Тренора), равенства всех одноквантовых токов постоянному значению $I_s\neq0$ (кинетика нуклеации) и т. д.

Неравновесный запас внутренней энергии в единице объема вычисляется по формуле

$$e_r=\mu^{-1}\sum_{s,\nu}c_s(\nu)E_s(\nu), \qquad \mu=n^{-1}\sum_s n_s(\mathbf{r},t)m_s$$

где m_s — масса молекулы s. Все кинетические коэффициенты вязкого и теплопроводного газа в режиме замедленной релаксации могут быть выражены через $c_s(\nu)$ [11], так что замыкание системы уравнений релаксационной газодинамики на уровне сокращенного числа макропараметров требует построения решений системы (1.1).

2. Аналитический метод для плавных распределений. Будем рассматривать систему (1.1) с источником вида (1.5). Учитывая, что положительные источники $F_s^+(\nu)$ хуже описываются в рамках развиваемого ниже метода, рассмотрим вопрос об их точном учете в линеаризованной постановке. Для простоты будем пренебрегать в (1.1) диффузией ($\mathbf{v}_s(\nu)=0$). Запишем линеаризованную систему (1.1) с положительным источником в матричной форме

$$d_t\mathbf{c}_s(t)=\mathbf{K}_s(t)\mathbf{c}_s(t)+\mathbf{F}_s(t),\ 0\leqslant t<\infty$$

$$\{K_s\}_{\nu\nu'}=K^*_{\nu\nu'}(s), \qquad c_s(0)=c_{s0}$$

и будем искать ее решение в виде

$$\mathbf{c}_s(t)=\Lambda_s(t)\mathbf{c}_s{}^*(t)+\mathbf{q}_s(t) \qquad (2.1)$$

$$d_t\mathbf{c}_s{}^*(t)=\mathbf{K}_s(t)\mathbf{c}_s{}^*(t),\ 0\leqslant t<\infty,\quad \mathbf{c}_s{}^*(0)=\mathbf{c}_{s0}{}^*,\ \sum_\nu c_s(\nu)=\text{const} \qquad (2.2)$$

$$\Lambda_s(t)=\int_0^t \lambda_s(t')\,dt', \qquad \lambda_s(t)=\sum_\nu F_s{}^+(\nu)$$

Для определения q_s имеем следующую задачу:

$$d_t q_s=K_s q_s+F_s{}^+-\lambda_s c_s{}^*, \quad q_s(0)=c_{s0}, \quad 0\leqslant t<\infty$$

Поскольку начальные данные $c_{s0}{}^*$ ограничены только условием нормировки, положив

$$F_s{}^+(t)=\lambda_s(t)c_s{}^*(t)$$

приходим к задаче без источников с исходными начальными данными. Таким образом, в линейной постановке действие источников может быть точно учтено за счет выбора начальных данных $c_{s0}{}^*$.

Рассмотрим теперь исходную систему (1.1), предполагая $\mathbf{v}_s$, $\overset{*}{K}_{\nu\nu'}(s)$ заданными функционалами $c_s(\nu)$. Следуя методу [9, 10], произведем в уравнениях (1.1) нелинейную замену

$$f(\nu)\equiv f_s(\nu;\mathbf{r},t)=c_s(\nu+1)/c_s(\nu)a_s(\nu), \qquad a_s(\nu)=\overset{*}{K}_{\nu\,\nu+1}(s)/\overset{*}{K}_{\nu+1,\nu}(s)$$

из которой следует

$$c_s(\nu+\gamma)=c_s(\nu)\prod_{m=0}^{\gamma-1}a_s(\nu+m)f_s(\nu+m) \tag{2.3}$$

Для больцмановского термостата имеем

$$c_s(\nu)=N_sQ_s{}^{-1}\exp\left(-\frac{E_s(\nu)}{kT}\right)\prod_{m=0}^{\nu}f_s(m)$$

Используя (2.3), (1.1), после ряда выкладок получаем

$$\begin{aligned} d_tf_s(\nu)=D_s[f_s(\nu)]+E_s[f_s(\nu')]-[(d_t+\mathbf{v}_s(\nu+1))\ln a_s(\nu)+\\ +\mathbf{v}_s(\nu+1)\nabla+\Gamma_s{}^-(\nu)]f_s(\nu)+Z_s(\nu) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$D_s=\sum_\gamma[A_s(\nu,\gamma)f_s^{\gamma+1}(\nu)+B_s(\nu,\gamma)f_s(\nu)+X_s(\nu,\gamma)f_s^{1-\gamma}(\nu)] \tag{2.5}$$

$$A_s(\nu,\gamma)=K_{\nu+1+\gamma,\nu+1}(s)\pi_s(\nu+1,\gamma)-K_{\nu+\gamma,\nu}(s)\pi_s(\nu,\gamma)$$

$$B_s(\nu,\gamma)=\overset{*}{K}_{\nu,\nu+\gamma}(s)+\overset{*}{K}_{\nu,\nu-\gamma}(s)-\overset{*}{K}_{\nu+1,\nu+1-\gamma}(s)-\overset{*}{K}_{\nu+1,\nu+1+\gamma}(s)$$

$$X_s(\nu,\gamma)=\overset{*}{K}_{\nu+1-\gamma,\nu+1}(s)\pi_s{}^{-1}(\nu-\gamma+1,\gamma)-\overset{*}{K}_{\nu-\gamma,\nu}(s)\pi_s{}^{-1}(\nu-\gamma,\gamma)$$

$$\pi_s(\nu,\gamma)=\prod_{m=0}^{\gamma-1}a_s(\nu+m)$$

Здесь D_s — часть интеграла столкновений, диагональная по ν. Недиагональное по ν слагаемое имеет вид

$$\begin{aligned} E_s=f_s^{\gamma+1}(\nu)[\overset{*}{K}_{\nu+1+\gamma,\nu+1}(s)\pi_s(\nu+1,\gamma)(\zeta_s(\nu+1,\gamma)-1)-\\ -\overset{*}{K}_{\nu+\gamma,\nu}(s)\pi_s(\nu,\gamma)(\zeta_s(\nu,\gamma)-1)]+f_s^{1-\gamma}(\nu)[\overset{*}{K}_{\nu+1,\nu+1}(s)\pi_s{}^{-1}(\nu-\gamma+1,\gamma)\times\\ \times(\zeta_s{}^{-1}(\nu-\gamma+1,\gamma)-1)-\overset{*}{K}_{\nu-\gamma,\nu}(s)\pi_s{}^{-1}(\nu-\gamma,\gamma)(\zeta_s{}^{-1}(\nu-\gamma,\gamma)-1] \end{aligned}$$

$$\zeta_s(\nu, \gamma) = \prod_{m=0}^{\gamma-1} \frac{f_s(\nu+m)}{f_s(\nu)}$$

Выражения для Γ_s^-, Z_s в (2.4) имеют вид

$$\Gamma_s^-(\nu) = [L_s^-(\nu+1) - L_s^-(\nu)]\Phi(\mathbf{r}, t)$$

$$Z_s(\nu) = \frac{L_s^+(\nu)}{c_s(\nu)a_s(\nu)}\left[\frac{c_s(\nu+1)}{c_s(\nu)} - \frac{L_s^+(\nu+1)}{L_s^+(\nu)}\right]\Phi +$$

$$+ \frac{f_s(\nu)}{c_s(\nu)n}\nabla[nc_s(\nu)(\mathbf{v}_s(\nu) - \mathbf{v}_s(\nu+1))]$$

Если переходные вероятности быстро убывают с изменением γ, то основной вклад дают одноквантовые переходы ($\gamma=1$), для которых

$$\pi_s(\nu, \gamma) \simeq \pi_s(\nu, 1) = a_s(\nu), \quad A_s(\nu, 1) \equiv A_s(\nu), \ldots \tag{2.6}$$

В этом приближении в сумме (2.5) остается одно слагаемое, причем

$$A_s(\nu) + B_s(\nu) + X_s(\nu) = 0 \tag{2.7}$$

Для больцмановского термостата, как нетрудно убедиться, справедливы соотношения

$$\pi_s(\nu, \gamma) = \frac{g_s(\nu+\gamma)}{g_s(\nu)}\exp\left[-\frac{E_s(\nu+\gamma) - E_s(\nu)}{kT}\right] = \frac{K^*_{\nu,\nu+\gamma}(s)}{K^*_{\nu+\gamma,\nu}(s)} \tag{2.8}$$

$$A_s(\nu, \gamma) + B_s(\nu, \gamma) + X_s(\nu, \gamma) = 0 \tag{2.9}$$

Пренебрегая диффузией ($\mathbf{v}_s=0$) и моделируя положительный источник некоторой заданной функцией $R_s^+(\nu)$, ограничимся приближением (2.6) для небольцмановского термостата либо будем считать термостат больцмановским при $\gamma>1$. Это приводит к равенствам (2.7) или (2.9), которые дают следующие условия для D_s и E_s:

$$D_s[f_s(\nu)=1]=0, \quad E_s[f_s(\nu')=1]=0$$

В случае плавных распределений, когда

$$|\zeta_s(\nu, \gamma) - 1| \ll 1$$

недиагональная часть интеграла столкновений мала ($E_s \to \varepsilon E_s$, $\varepsilon \ll 1$), система (2.4) записывается в виде

$$d_t f_s(\nu) = D_s[f_s(\nu)] + R_s^+(\nu) - R_s^-(\nu)f_s(\nu) + \varepsilon E_s[f_s(\nu')] \tag{2.10}$$

$$R_s^-(\nu) \equiv d_t \ln a_s(\nu) + \Gamma_s^-(\nu), \quad f_s(\nu, 0) = f_{s0}(\nu)$$

Основное достоинство системы (2.10) заключается в том, что в нулевом порядке по ε (плавные распределения) она диагональна. Это позволяет сделать ряд общих заключений о характере релаксационных процессов в неоднородных потоках газа.

3. Анализ физических следствий. При условиях $R_s^\pm(\nu) \to 0$, $f_{s0}(\nu)=1$ имеем

$$d_t f_s(\nu) = 0, \quad f_s(\nu, t) = 1 \tag{3.1}$$

Это означает сохранение произвольного квазистационарного распределения во времени (свойство адиабатичности по отношению к переменной ν) и позволяет считать $f_s(\nu)$ адиабатической переменной системы (1.1). Вследствие этого в струйных течениях и ударных волнах отход от равновесия определяется вначале градиентами и источниками, а только затем столкновениями.

Для малых отклонений от больцмановского распределения система (3.1) линеаризуется ($f_s(\nu)=1+\varphi_s(\nu)$) и с хорошей точностью допускает аналитическое решение

$$\varphi_s(\nu)=\exp\left[-\int_0^t P_s(\nu,t')\,dt'\right]\int_0^t \Pi_s(\nu,t')\exp\left[-\int_0^{t'} P_s(\nu,t'')\,dt''\right]dt'$$

$$P_s(\nu)=\tau_s^{-1}(\nu)+R_s^-(\nu), \quad \Pi_s(\nu)=R_s^+(\nu)-R_s^-(\nu) \tag{3.2}$$

$$\tau_s^{-1}(\nu)=\sum_\gamma \gamma\tau_s^{-1}(\nu,\gamma), \quad \tau_s^{-1}(\nu,\gamma)=X_s(\nu,\gamma)-A_s(\nu,\gamma)$$

Как видно из (3.2), столкновительные процессы, градиенты температуры и источники влияют на релаксацию аддитивным образом. Учет многоквантовых переходов уменьшает время релаксации $\tau_s(\nu)$ уровня ν. Под временем релаксации уровня ν за счет γ-квантовых переходов следует понимать величину $\tau_s(\nu,\gamma)$.

Приведем решение нелинейной релаксационной задачи (2.10) с переменными коэффициентами при $\varepsilon\to0$, $R_s^\pm(\nu)=0$, $\gamma=1$ [10]

$$f_s(\nu)=M_s^-(\nu)/M_s^+(\nu) \tag{3.3}$$

$$M_s^\mp(\nu)=1+f_{s0}(\nu)+[1-f_{s0}(\nu)]\left[\int_0^t dt'\,\sigma_s(\nu,t')\exp\left(-\int_0^{t'}\frac{dt''}{\tau_s(\nu,t'')}\right)\mp\right.$$

$$\left.\mp\exp\left(-\int_0^t\frac{dt'}{\tau_s(\nu,t')}\right)\right]$$

$$\tau_s^{-1}(\nu)=X_s(\nu)-A_s(\nu), \quad \sigma_s(\nu)=X_s(\nu)+A_s(\nu)$$

Как видно из (3.3), решение описывает регулярную релаксацию $f_{s0}(\nu)\to1$, $t\to\infty$, если $\tau_s^{-1}(\nu)>0$. В противном случае $f_s(\nu,\infty)\neq1$, так что равенство $\tau_s^{-1}(\nu)=0$ следует понимать как критерий неустойчивости решения.

В качестве примера релаксации с локализованными источниками рассмотрим систему (2.10) с $\varepsilon\to0$, $\gamma=1$ и не зависящими от времени коэффициентами. В этом случае она преобразуется к виду

$$d_t f_s(\nu)=A_s(\nu)[f_s(\nu)-z_{s1}(\nu)][f_s(\nu)-z_{s2}(\nu)] \tag{3.4}$$

где $z_{s1,2}(\nu)$ — постоянные корни квадратного уравнения

$$z_s^2(\nu)-2d_s(\nu)z_s(\nu)+\mu_s(\nu)=0$$

$$d_s(\nu)=[A_s(\nu)+X_s(\nu)+R_s^-(\nu)][2A_s(\nu)]^{-1},$$

$$\mu_s(\nu)=[X_s(\nu)+R_s^+(\nu)][A_s(\nu)]^{-1}$$

Решение уравнения (3.4) приводит к результатам, зависящим от поведения $z_{s1,2}(\nu)$. Если корни действительны ($z_{s2}(\nu)>z_{s1}(\nu)$), то получаем решение, описывающее регулярную релаксацию $f_{s0}(\nu)\to1$ и совпадающее с решением (3.3) в случае постоянных коэффициентов и $R_s^\pm(\nu)=0$. При этом

$$\tau_s^{-1}(\nu)=|X_s(\nu)-A_s(\nu)|, \quad f_s(\nu,t)\underset{t\to\infty}{\to}\begin{cases}1, & \tau_s^{-1}(\nu)>0\\ \dfrac{X_s(\nu)}{A_s(\nu)}, & \tau_s^{-1}(\nu)<0\end{cases}$$

При совпадающих корнях имеем неэкспоненциальный, а при комплексных — осциллирующий характер релаксации. Поведение корней зависит от знака детерминанта

$$\varkappa_s(\nu)=[X_s(\nu)-A_s(\nu)]^2+2[A_s(\nu)+X_s(\nu)]R_s^-(\nu)+R_s^{-2}(\nu)-4A_s(\nu)R_s^+ \quad (3.5)$$

Из (3.5) очевидно, что влияние источников становится особенно существенным в области неустойчивости $\tau_s^{-1}(\nu)=0$. Отметим, что равенство $\tau_s^{-1}(\nu)=0$ может быть выполнено для небольцмановского термостата.

4. Модель гармонических осцилляторов. Для гармонических осцилляторов справедливы соотношения

$$K^*_{\nu+1,\nu}(s,\alpha_s)=(\nu+1)G_s^1(\alpha_s), \qquad K^*_{\nu,\nu+1}(s,\alpha_s)=(\nu+1)G_s^\circ(\alpha_s)$$

$$\alpha_s=\sum_\nu \nu c_s(\nu), \qquad G_s^1=\sum_{s_1}[K_{10}(s,s_1)+nK_{10}^{01}(s,s_1)(N_{s_1}+\alpha_{s_1})]$$

$$G_s^\circ=\sum_{s_1}[K_{01}(s,s_1)+nK_{01}^{10}(s,s_1)\alpha_{s_1}] \quad (4.1)$$

где $K_{01}(s, s_1)$, $K_{01}^{10}(s, s_1)$ — константы скоростей основных VT-, VV'-переходов. Используя уравнения (1.1), а также соотношения (4.1) ($\mathbf{v}_s(\nu)=0$), получим систему уравнений для α_s

$$d_t\alpha_s=J_s(\alpha_s)+Y_s(\alpha_s), \qquad Y_s=\sum_\nu \nu F_s(\nu), \qquad 0\leqslant t<\infty \quad (4.2)$$

$$J_s=\sum_{s_1}\{N_sK_{01}(s,s_1)-[K_{10}(s,s_1)-K_{01}(s,s_1)]\alpha_s-$$
$$-n[K_{10}^{01}(s,s_1)\alpha_s(N_{s_1}+\alpha_{s_1})-K_{01}^{10}(s,s_1)\alpha_{s_1}(N_s+\alpha_s)]\}$$

$$e_r=k\mu^{-1}\sum_s\theta_s\alpha_s, \qquad \theta_s=\frac{\hbar\omega_s}{k}$$

На основании (4.1) можно найти, что

$$A_s=G_s^\circ, \quad X_s=G_s^1, \quad a_s=K_{01}^*(s)/K_{10}^*(s) \quad (4.3)$$

$$d_tf_s(\nu)=G_s^\circ(t)f_s^2(\nu)-[G_s^\circ(t)+G_s^1(t)]f_s(\nu)+$$
$$+G_s^1(t)+R_s^+(\nu)-R_s^-(\nu)f_s(\nu)+\varepsilon E_s[f_s(\nu')], \; f_s(\nu,0)=f_{s0}(\nu) \quad (4.4)$$

Из (4.4) видно, что в случае источников и начальных данных, не зависящих от ν (последнее выполняется, например, для начальных больцмановских распределений с набором колебательных температур $T_s^V(0)\neq\neq T$), с учетом $f_s(\nu,t)=f_s(t)$, $E_s=0$ получаем

$$c_s(\nu,t)=c_s(t)[N_s^{-1}\alpha_s(t)]^\nu[1+N_s^{-1}\alpha_s(t)]^{\nu+1}=$$
$$=c_s(t)\left[1-\exp\left(\frac{\theta_s}{T_s'(t)}\right)\right]\exp\left(-\frac{\nu\theta_s}{T_s^V(t)}\right) \quad (4.5)$$

т. е. мы имеем известное свойство канонической инвариантности, обобщенное на случай неоднородных потоков газа и источников. Из (4.2) получаем замкнутую систему уравнений для $\alpha_s(t)$ в потоке газа при наличии источников указанного типа

$$d_t\alpha_s(t)=\Psi_s(\alpha_s(t)) \quad (4.6)$$

Эта система представляет интерес при изучении релаксационных неустойчивостей ударных волн.

Аналитические решения для $c_*(v)$ через e_r и кинетические коэффициенты позволяют замкнуть систему уравнений релаксационной газодинамики через минимальное число макропараметров. Установленное свойство адиабатичности в струйных течениях и ударных волнах позволяют правильно поставить задачу о начальной стадии отклонения от равновесия и дает количественные критерии для получения сильных неравновесностей. С помощью источников (накачка, излучение, кластеризация потока, химические реакции) можно в принципе получать немонотонные режимы релаксации (включая автоволновые). Из результатов работы можно получать критерии таких режимов. В условиях сильной неравновесности построенные решения (в частности, (4.5), (4.6)) могут быть использованы для аналитических исследований нелинейных явлений переноса, а также релаксационных неустойчивостей ударных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дулов В. Г., Лукьянов Г. А.* Газодинамика процессов истечения. Новосибирск: Наука, 1984. 234 с.
2. *Конюхов В. К.* Газодинамический CO_2-лазер непрерывного действия // Тр. ФИАН. 1979. Вып. 113. С. 50–114.
3. *Шарафутдинов Г. Г.* Вращательная релаксация в свободных струях. Докт. дис. Новосибирск: ИТМ СО АН СССР, 1984.
4. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
5. *Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И.* Релаксационные процессы в ударных волнах. М.: Наука, 1965. 484 с.
6. *Буянова Е. А., Ловецкий Е. Е., Силаков В. П., Фетисов В. С.* Стационарные ударные волны в неравновесном двухатомном газе // Хим. физика. 1982. № 12. С. 1701–1703.
7. *Kötake S., Glass I. I.* Flows with nucleation and condensation // Progr. Aerospace Sci. 1981. V. 19. № 2/4. P. 129–196.
8. *Гордиец Б. Ф., Осипов А. И., Шелепин Л. А.* Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры. М.: Наука, 1980. 512 с.
9. *Васильев А. П., Дубровский Г. В., Стрельченя В. М.* Приближенное аналитическое описание колебательной релаксации слабоангармонических осцилляторов // ПМТФ. 1984. № 5. С. 16–24.
10. *Дубровский Г. В., Стрельченя В. М.* Релаксация ангармонических молекул // ПМТФ. 1986. № 3. С. 22–31.
11. *Богданов А. В., Горбачев Ю. Е., Дубровский Г. В. и др.* Теоретические модели релаксационной газодинамики и методы расчета неравновесных течений структурного газа. VI. Аналитические выражения для коэффициентов переноса и их расчет: Препринт № 930. Л.: ФТИ АН СССР, 1985. 62 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 14.II.1986