

УДК 532.526.5

## К ТЕОРИИ ОТСОЕДИНЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

ЛИПАТОВ И. И.

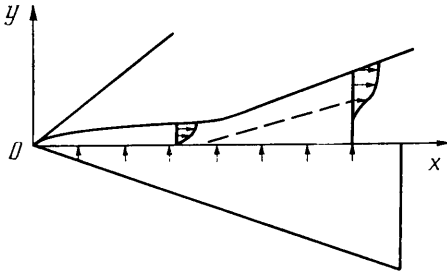
При больших числах Рейнольдса влияние вязкости сосредоточено, согласно теории Прандтля, в тонком пограничном слое вблизи обтекаемой поверхности. Такая структура течения обусловлена процессами диффузии и конвекции завихренности от поверхности тела. При малой вязкости ( $Re \gg 1$ ) расстояние по нормали к поверхности тела, на которое диффундирует завихренность, оказывается существенно меньшим, чем расстояние, на которое за то же время завихренность переносится вдоль поверхности за счет конвекции. При отрыве пограничного слоя влияние вязкости уже не локализовано в тонком пристеночном слое и может распространяться на области больших масштабов. Отрыв пограничного слоя, вызываемый падением скачка уплотнения или неблагоприятным градиентом давления и др., сопровождается появлением вертикального положительного компонента скорости в пограничном слое, следовательно, кроме диффузионного механизма переноса завихренности здесь появляется механизм переноса завихренности по нормали к поверхности и за счет конвекции. Такая конвекция возникает не только в результате торможения внешнего течения, но и в результате распределенного поверхностного вдува. Экспериментальные и теоретические исследования свидетельствуют о том, что и в этом случае возможно перестроение структуры течения в пограничном слое, которое называется отсоединением пограничного слоя. Для степенного распределения скорости вдува вдоль поверхности ( $v_w = C_0 x^{-1/2}$ ) решение уравнения Блазиуса существует в ограниченной области изменения параметра  $C_0$ . При стремлении этого параметра к некоторому предельному значению ( $C_0 \rightarrow C_0^*$ ) трение на поверхности стремится к нулю [1–2]. Решение при  $C_0 = C_0^*$  описывает слой смешения между невозмущенным потоком и полубесконечной застойной областью.

При равномерно распределенном вдуве решение системы уравнений пограничного слоя существует в ограниченной области изменения продольной координаты и поверхностное трение обращается в некоторой точке в ноль [3]. Качественное объяснение появления точки нулевого трения или отсоединения пограничного слоя состоит в том, что скорость, с которой завихренность диффундирует от некоторой (нулевой) линии тока к поверхности, уравнивается противоположно направленной скоростью конвекции. Ниже по течению от точки отсоединения скорость конвекции превосходит скорость диффузии и поэтому продольный импульс передается из внешнего потока не всей массе вдуваемого по нормали к поверхности газа, а лишь некоторой его части. Для придания продольного импульса остальной массе вдуваемого газа необходимы другие причины, например действие благоприятного градиента давления.

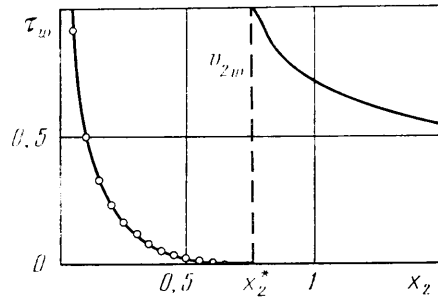
В [4–6] исследованы течения с интенсивным вдувом, приводящим к образованию области невязкого пристеночного течения на всей поверхности тела (пластины). Падение давления вдоль поверхности, приводящее к разгону вдуваемого газа, обеспечивалось формой контактной поверхности, которая индуцировала отрицательный градиент давления в дозвуковом [6] и сверхзвуковом [4] внешних течениях, при специальном выборе распределения скорости вдува. Отрицательный градиент давления может индуцироваться и при равномерно распределенном вдуве за счет донного перепада давлений [4]. Во всех этих случаях существенную роль играет взаимодействие течения в пристеночной области невязкого течения и внешнего потока.

Эффекты взаимодействия учитывались в [7], где получены решения композитной системы уравнений пограничного слоя, описывающей обтекание пористой плоской поверхности сверхзвуковым потоком.

В данной работе исследована структура течения, возникающего при равномерно распределенном вдуве с плоской пронизываемой поверхностью, в условиях, обеспечивающих переход от течения в пограничном слое к отсоединенному течению, включающему слой смешения и область невязкого пристеночного течения.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Рассматривается обтекание клина сверхзвуковым потоком вязкого газа, через пористую плоскую поверхность которого, расположенную параллельно набегающему потоку, вдувается газ с равномерно распределенной скоростью вдува. Декартова система координат выбрана таким образом, что ее начало находится на передней кромке клина, ось  $X$  параллельна пористой поверхности, ось  $Y$  перпендикулярна этой поверхности (фиг. 1). Число Рейнольдса  $Re = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty$  ( $\rho_\infty$ ,  $u_\infty$ ,  $\mu_\infty$  — плотность, скорость и динамический коэффициент вязкости в невозмущенном набегающем потоке,  $l$  — длина образующей поверхности клина) полагается большим, но не превосходящим критическое значение, при котором около поверхности клина появляются области переходного или турбулентного течения. Предполагается также, что система уравнений Навье — Стокса, описывающая течение около поверхности клина, имеет стационарное решение. Для координат, отсчитываемых вдоль осей  $X$  и  $Y$ , соответствующих компонентом вектора скорости, плотности, давления, энтальпии, динамического коэффициента вязкости приняты следующие обозначения:  $xl$ ,  $yl$ ,  $u_\infty u$ ,  $u_\infty v$ ,  $\rho_\infty \rho$ ,  $\rho_\infty u_\infty^2 p$ ,  $u_\infty^2 g/2$ ,  $\mu_\infty \mu$ .

При больших числах Рейнольдса система уравнений Эйлера, к которой сводится в этом пределе система уравнений Навье — Стокса, имеет в первом приближении, при  $x \sim y \sim O(1)$ , следующее решение:  $u=1$ ,  $v=0$ . Для удовлетворения условия прилипания необходимо ввести вблизи поверхности клина в области с масштабами  $y = \varepsilon^{-1} Y$ ,  $x = X$ ,  $\varepsilon = Re^{-1/2}$  пограничный слой, функции течения в котором имеют вид

$$u = u_2(X, Y) + \dots, \quad v = \varepsilon v_2(X, Y) + \dots, \quad p = 1/\gamma M_\infty^2 + \varepsilon p_2(X, Y) + \dots, \\ g = g_2(X, Y) + \dots$$

Течение в пограничном слое описывается решением задачи [8]

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2 \partial y_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y_2^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y_2^3} \\ \psi_2(x_2, 0) = -x_2, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}(x_2, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}(x_2, y_2 \rightarrow \infty) = 1 \quad (1.1)$$

$$\rho_2 u_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} A_0^{-1}, \quad \rho_2 v_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} A_0, \quad y_2 = A_0 \int_0^Y \rho_2 dY \\ A_0 = \rho_w v_{1w}, \quad x_2 = X A_0^2, \quad v_w = \varepsilon v_{1w}$$

Предполагается, что вдуваемый газ имеет тот же состав, что и газ в набегающем потоке. Тогда при линейной зависимости динамического коэффициента вязкости от температуры решение (1.1) может быть получено независимо от уравнения энергии. Численное интегрирование задачи (1.1), предпринятое в [3], показало, что трение на поверхности, пропорциональное  $(\partial^2 \psi_2 / \partial y_2^2)_w$ , монотонно уменьшается с ростом координаты  $x_2$ .

Расчеты были доведены до особой точки  $x_2=x_2^*$  ( $x_2^*\approx 0,7456$ ), в которой поверхностное трение обращается в ноль. Решение (1.1) при  $x_2=x_2^*$  не может быть представлено при  $y_2\rightarrow 0$  в виде регулярного разложения по степеням  $y_2$ , так как все производные  $(\partial^n \psi_2 / \partial y_2^n)_w$  ( $n=1, 2, \dots$ ) обращаются в ноль. Это обстоятельство, а также результаты численного анализа свидетельствуют о переходе течения в пограничном слое к течению с другим, поперечным масштабом, большим предполагаемого в теории пограничного слоя Прандтля.

Для дальнейшего анализа существенно предположение о том, что ниже по течению от точки отсоединения  $x_2=x_2^*$  вблизи поверхности клина формируется область невязкого медленного течения, толщина которой превосходит толщину расположенного выше слоя смешения. Оценки характерных масштабов такой области и величин функций в ней даны ниже; важно отметить, что в первом приближении течение в пристеночной области не влияет на течение в слое смешения. Целесообразно перейти в (1.1) к переменным Крокко  $(x_2, u_2)$ , в которых решение регулярно при  $x_2=x_2^*$  и при  $u_2\rightarrow 0$

$$\tau^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial u_2^2} = u_2 \frac{\partial \tau}{\partial x_2}, \quad \tau = \frac{\partial u_2}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial \tau(x_2, 0)}{\partial u_2} = 1, \quad \tau(x_2, 1) = 0 \quad (1.2)$$

Для нахождения решения краевой задачи (1.2) при  $x_2 > x_2^*$  нужно учитывать, что пограничный слой отсоединяется от поверхности и преобразуется в слой смешения между набегающим потоком и пристеночной областью невязкого течения. Эжекционные свойства слоя смешения, или расход газа, подсасываемого из застойной (в первом приближении) области, заранее не определен и должен определяться из решения. Таким образом, первое из краевых условий (1.2) должно при  $x_2 > x_2^*$  быть опущено и заменено на краевое условие  $\tau(x_2, 0) = 0$ .

Краевая задача (1.2) с модифицированным краевым условием  $\tau(x_2, 0) = 0$  проинтегрирована численно. В результате получены распределения функций  $\tau_w(x_2)$  при  $x_2 < x_2^*$  и  $v_{2w}(x_2) = (\partial \tau / \partial u_2)_w$  при  $x_2 \geq x_2^*$ , которые изображены на фиг. 2. Здесь же приведено распределение  $\tau_w(x_2)$ , которое получено в [3]. Следует отметить, что распределения  $\tau_w(x_2)$  согласуются между собой. При больших значениях  $x_2$  решение краевой задачи (1.2) описывается в первом приближении автомодельным уравнением, которое приводит к следующему результату для функции  $(\partial \tau / \partial u_2)_w$  при  $x_2 \rightarrow \infty$ :

$$\left( \frac{\partial \tau}{\partial u_2} \right)_w = v_{2w} \approx C_1 x_2^{-1/2}$$

2. При  $x_2 \leq x_2^*$  решение  $\tau$  при  $u_2 = O(1)$  может быть представлено в виде регулярного разложения  $\tau = \tau_w(x_2) + u_2 + \alpha(x_2)u_2^3$ . В этом случае для построения координатного разложения решения при  $x_2 \rightarrow x_2^* +$  необходимо рассмотреть подобласть, в которой решение представимо в виде

$$\tau = (x_2 - x_2^*)^b [f_0(\eta_1) + (x_2 - x_2^*)^c f_1(\eta_1) + \dots], \quad \eta_1 = u_2 / (x_2 - x_2^*)^a \quad (2.1)$$

$$f_0^2 f_0'' - \eta_1 (f_0 - \eta_1 f_0') = 0 \quad (2.2)$$

$$\eta_1 f_1'' + \eta_1 f_1' - 3f_1 = 0 \quad (2.3)$$

Подстановка (2.1) в (1.2) позволяет из условия невырожденности получающегося уравнения и с учетом краевых условий определить значения параметров  $a=b=1, c=2$ .

Уравнение (2.2) для функции  $f_0(\eta_1)$  имеет решение  $f_0 = \eta_1$ . Решение (2.3), удовлетворяющее граничному условию  $f_1(0) = 0$  и не растущее экспоненциально при  $\eta_1 \rightarrow \infty$ , имеет вид  $f_1 = a_1(\eta_1 + \eta_1^{2+1/6} \eta_1^3)$ ,  $a_1$  — константа.

Выделение подобласти при  $x_2 < x_2^*$  приводит к таким же значениям параметров  $a, b$  и  $c$

$$\tau = (x_2^* - x_2) [\varphi_0(\eta_2) + (x_2^* - x_2)^2 \varphi_1(\eta_2) + \dots], \quad \eta_2 = u_2 / (x_2^* - x_2)$$

Функция  $\varphi_0(\eta_2)$  описывается следующим уравнением:

$$\varphi_0^2 \varphi_0'' + \eta_2 (\varphi_0 - \eta_2 \varphi_0') = 0$$

решение которого, удовлетворяющее условию срачивания при  $\eta_2 \rightarrow \infty$  и граничному условию при  $\eta_2 = 0$ , имеет вид  $\varphi_0 = \eta_2$ . Соответствующее уравнение для функции  $\varphi_1(\eta_2)$  и его решение, не растущее экспоненциально при  $\eta_2 \rightarrow \infty$ , записывается в виде

$$\eta_2^2 \varphi_1'' - \eta_2 \varphi_1' + 3\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 = a_2 (\eta_2 - \eta_2^2 + \frac{1}{6} \eta_2^3)$$

Это решение не удовлетворяет граничному условию  $\varphi_1'$ , что является следствием неравномерной пригодности разложения  $\varphi = \eta_2 + (x_2^* - x_2)^2 \varphi_1$  при  $\eta_2 \rightarrow 0$ , где  $\tau_w \neq 0$ . Введение подобласти позволяет получить здесь равномерно пригодное решение. Необходимое для дальнейшего анализа распределение вертикальной скорости при  $x_2 > x_2^*$ , согласно (2.1), имеет вид

$$v_2(x_2, 0) \approx 1 + a_1 (x_2 - x_2^*)^2 + \dots, \quad a_1 < 0$$

3. Решение краевой задачи (1.2) позволяет получить распределение скорости отсоса газа  $v_{2w}$  в слой смешения из пристеночной области невязкого течения. Эта скорость меньше, чем скорость вдува, поэтому непоглощенная часть газа приобретает продольный импульс за счет возмущения давления  $\Delta p$ , индуцируемого в результате взаимодействия течения в пристеночной области с внешним сверхзвуковым потоком. В общем случае длина пористого участка поверхности клина от точки отсоединения до донного среза конечна. Поскольку в пристеночной области происходят нелинейные изменения продольной скорости  $u \sim \Delta u \sim (\Delta p)^{1/2}$ , из уравнения неразрывности при заданной скорости вдува  $v_w \sim \epsilon$  следует, что  $(\Delta p)^{1/2} \delta_3 \sim \epsilon$ , где  $\delta_3$  — толщина пристеночной области невязкого течения.

Используя для оценки возмущения давления формулу Аккерета, можно найти, что  $\Delta p \sim \epsilon^{2/3}$ ,  $\delta_3 \sim \epsilon^{2/3}$ ,  $u \sim \epsilon^{1/3}$ . Эти оценки показывают, что толщина пристеночной области невязкого течения больше, чем толщина исходного пограничного слоя, а продольная скорость здесь мала по сравнению со скоростью в слое смешения, что подтверждает сделанные выше предположения. В соответствии с оценками в этой области, где  $x_3 = x_3^*$ ,  $y = \epsilon^{2/3} y_3$ , функции представимы в виде следующих асимптотических разложений:

$$u = \epsilon^{1/3} u_3(x_3, y_3) + \dots, \quad v = \epsilon v_3(x_3, y_3) + \dots \quad (3.1)$$

$$p = 1/\gamma M_\infty^2 + \epsilon^{2/3} p_3(x_3) + \dots, \quad \rho = \rho_w + \dots$$

Подстановка (3.1) в систему уравнений Навье — Стокса и предельный переход  $Re \rightarrow \infty$  дают систему уравнений вида

$$\rho_w u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \rho_w v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + \frac{dp_3}{dx_3} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0$$

$$u_3(x_3, 0) = 0, \quad v_3(x_3, 0) = v_{1w}, \quad v_3(x_3, \delta_3 \epsilon^{-2/3}) = v_{2w}(x_3) v_{1w}$$

Условие взаимодействия из-за малости возмущений давления, вносимых вдувом, представляет собой соотношение Аккерета  $(M_\infty^2 - 1)^{1/2} p_3 = -d\delta/dx_3$ . Введение следующих переменных подобия приводит краевую задачу (3.2) к виду

$$\delta = \delta_3 \epsilon^{-2/3} = [\rho_w^{-5} v_{1w}^{-4} (M_\infty^2 - 1)^{1/2}]^{1/3} \Delta, \quad p_3 = (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} (\rho_w v_{1w}^2)^{1/3} P$$

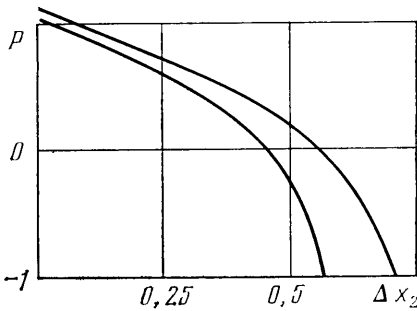
$$\eta = y_3/\Delta, \quad \psi_3 = X_2 \rho_w v_{1w} f, \quad X_2 = x_2 - x_2^*$$

$$ff'' - Af'^2 - B = X_2 (f'f' - ff'')$$

$$A = \Delta \frac{d}{dX_2} \left( \frac{X_2}{\Delta} \right), \quad B = \frac{\Delta^2}{X_2} \frac{d^2 \Delta}{dX_2^2} \quad (3.3)$$

$$f(X_2, 0) = 1, \quad f(X_2, 1) = \int_0^{x_2} v_{2w}(X_2) dX_2$$

Краевая задача, аналогичная (3.3), сформулирована в теории тонкого слоя [4–5], описывающей сверхзвуковое обтекание пористых плоских поверхностей для скорости вдува  $v_w > O(\epsilon)$ , при которой отсоединение происходит в малой окрестности передней кромки. Для такого режима последнее краевое условие в (3.3) имеет вид  $f(X_2, 1) = 0$ , так как слой смещения поглощает нулевой в первом приближении расход газа. Другое отличие от исследованного ранее режима течения заключается в том, что  $P(0) = \text{const}$  (в теории тонкого слоя при  $v_w = \text{const}$  возмущение давления имеет вблизи передней кромки логарифмическую особенность). Величина возмущения давления  $P(0)$



Фиг. 3

заранее не определена и зависит от донного перепада давлений. Краевая задача (3.3) описывает процесс передачи возмущений вверх по потоку от донного среза до точки отсоединения. Результаты численного интегрирования (3.3) представлены на фиг. 3, где изображены решения  $P(X_2)$  для  $P(0) = 1,01$  и  $1,03$  ( $\Delta x_2 = x_2 - x_2^*$ ). Следует отметить, что  $P(0) > 0$ , в противном случае область не существует, так как  $\Delta \sim P(0) X_2$ . Рост давления от невозмущенного до величины  $\epsilon^{3/2} P(0)$  происходит в области, расположенной выше по течению от точки отсоединения.

Автор благодарит В. Я. Нейланда за обсуждение результатов и ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Emmons H. W., Leigh D. C. Tabulation of the Blasius function with blowing and suction // Aeronaut. Res. Council. 1954. Current paper. № 157. P. 1–78.
2. Черный Г. Г. Пограничный слой с поверхностью разрыва. Обтекание пластины с просачиванием жидкости сквозь ее поверхность // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100. № 5. С. 867–870.
3. Catherall D., Stewartson K., Williams P. G. Viscous flow past a flat with uniform injection // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1965. V. 284. № 1398. P. 370–396.
4. Матвеева Н. С., Нейланд В. Я. Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке // Учен. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 5. С. 13–22.
5. Левин В. А. Сильный вдув на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 5. С. 97–104.
6. Kassoy D. R. A resolution of the blow-off singularity for similarity flow on a flat plate // J. Fluid Mech. 1974. V. 62. Pt. 1. P. 145–161.
7. Лунаров И. И. Отсоединение пограничного слоя при равномерном вдувании газа в сверхзвуковой поток // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1864. С. 8–15.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.

Москва

Поступила в редакцию  
11.V.1985