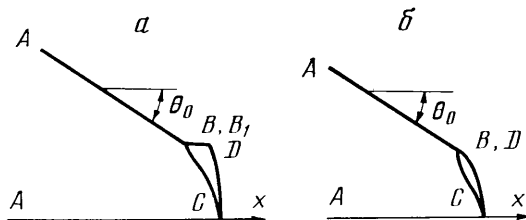


УДК 533.6.011

О ТРАНСЗВУКОВОМ ИСТЕЧЕНИИ СТРУИ ГАЗА
ИЗ СОСУДА С ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ

КИСЕЛЕВ О. М., КОЗЫРЕВ О. Р.

Рассматривается трансзвуковое истечение струи идеального термически совершенного газа¹ из бесконечного сосуда с плоскими стенками, расположенными симметрично относительно оси x и образующими с нею углы $\pm\theta_0$ (на фиг. 1 показана верхняя половина течения). Течение плоское, установившееся, адиабатическое и потенциальное; колебательные степени свободы молекул газа находятся в термодинамическом равновесии с вращательными и поступательными степенями свободы. В бесконечно удаленной точке A состояние газа характеризуется температурой T_0 ,



Фиг. 1

давлением p_0 и плотностью ρ_0 . (Заметим, что потенциальность течения является следствием остальных предположений (см. [2, гл. 6]).)

Исследуя аналогичную проблему для совершенного газа (колебательные степени свободы молекул «заморожены»), Ф. И. Франкль [3] установил, что при фиксированных значениях показателя адиабаты γ и угла θ_0 режим истечения зависит от параметра $\mu = p_a/p_0$ (p_a — давление во внешнем пространстве), причем последний имеет два критических значения: $\mu_* = \mu_*(\gamma)$ и $\mu_{**} = \mu_{**}(\gamma, \theta_0)$. При $\mu > \mu_{**}$ течение всюду дозвуковое. При $\mu = \mu_{**}$ скорость на границе струи равна звуковой, струя выравнивается на конечном расстоянии от сосуда, причем линия перехода к однородному звуковому потоку прямая [4]. При $\mu_{**} < \mu < \mu_*$ и $\theta_0 > 0$ в потоке существует звуковая линия BC , разделяющая области дозвуковых и сверхзвуковых скоростей (фиг. 1, a , CD — предельная характеристика).

При всех значениях μ из интервала $(0, \mu_{**}]$ звуковая линия сохраняет некоторое предельное положение (фиг. 1, b), коэффициент расхода остается постоянным (максимально возможным). Ф. И. Франкль показал также [3], что исследуемая задача в переменных годографа скорости сводится к краевой задаче Трикоми ($\mu \leq \mu_{**}$) или обобщенной задаче Трикоми ($\mu_{**} < \mu < \mu_*$) для уравнения Чаплыгина. Методом Фурье в [5] получено решение задачи для случая $\gamma = 7/5$, $\mu = \mu_{**}$, $\theta_0 = \pi/2$ (уточнение этого решения содержится в [6]). Аналогичным методом в [7] получено решение для случая $\gamma = 7/5$, $\mu = \mu_{**}$, $\theta_0 = \pi/4$, в [8] — для $\gamma = 7/5$, $\mu = \mu_{**}$ и ряда значений θ_0 (сам метод здесь усовершенствован).

В [9, 10] задача трансзвукового истечения совершенного газа решается в плоскости годографа с помощью конечно-разностных соотношений, при этом используется стандартная релаксационная процедура в дозвуковой области и метод характеристик — в сверхзвуковой; сращивание решений вдоль звуковой линии осуществляется в процессе итераций. Таким способом в [9, 10] получено решение для $\gamma = 7/5$, $\theta_0 = \pi/2$

¹ Следуя [1], будем называть газ совершенным, если для него верно уравнение Клапейрона и удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме не зависят от температуры; будем называть газ термически или calorически совершенным, если для него выполняется соответственно первое или второе из названных выше условий.

и ряда значений μ из интервала $[\mu_*, \mu]$. В [11, 12] та же задача ставится и решается в физической плоскости, решение находится в процессе установления по времени с использованием схемы С. К. Годунова (в [12] исследуется зависимость характеристик течения от параметра γ).

В настоящей работе задача трансзвукового истечения струи газа с равновесно возбужденными колебательными степенями свободы молекул из бесконечного симметричного сосуда с плоскими стенками сводится к обобщенной краевой задаче Трикоми для уравнения типа уравнения Чаплыгина. Для ее решения используется разностная схема [13], основанная на расщеплении разностного оператора в соответствии с типом дифференциального. Приводятся результаты расчетов для смеси кислорода и азота, моделирующей воздух. Исследуется влияние угла между стенками, температуры торможения и коэффициента противодействия на коэффициент расхода.

1. Для стационарного адиабатического течения невязкого нетеплопроводного газа с равновесно возбужденными колебательными степенями свободы молекул, используя уравнение сохранения энергии, закон Клапейрона и калорическое уравнение состояния [14], можно получить следующие соотношения между газодинамическими параметрами [14]:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\beta \frac{J(T)}{J(T_0)} = P(T) \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\beta-1} \frac{J(T)}{J(T_0)} \quad (1.1)$$

$$u^2 = 2(h_0 - h), \quad h = h(T) = \beta RT + e$$

$$h_0 = h(T_0), \quad e = e(T) = R \sum_k \xi_k g_k \theta_k \varepsilon_k$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k(T) = \left(\exp \frac{\theta_k}{T} - 1 \right)^{-1}$$

$$J(T) = \exp \left\{ \sum_k \xi_k g_k \left[\ln \varepsilon_k + \frac{\theta_k}{T} (1 + \varepsilon_k) \right] \right\}$$

$$\beta = 2,5 + \xi_i + \xi_n$$

Здесь p , ρ , u , T — давление, плотность, скорость и температура газа; p_0 , ρ_0 , T_0 — параметры торможения; R — газовая постоянная, h — удельная энтальпия, e — удельная колебательная энергия; θ_k , g_k — характеристическая температура и степень вырождения k -го типа колебания молекул, ξ_k — молярная доля компонента, к которому относится этот тип колебаний; ξ_i , ξ_n — молярная доля компонентов, состоящих из линейных и нелинейных молекул соответственно.

Пусть T , T_0 — величины одного порядка и $T_0 \rightarrow 0$ или $T_0 \rightarrow \infty$. Тогда из (1.1) получаются асимптотические соотношения

$$h \sim \delta RT, \quad u^2 \sim 2\delta R(T_0 - T) \\ p/p_0 \sim (T/T_0)^\delta, \quad \rho/\rho_0 \sim (T/T_0)^{\delta-1}$$

причем $\delta = \beta$ при $T_0 \rightarrow 0$, $\delta = \beta_1 = \beta + \sum_k \xi_k g_k$ при $T_0 \rightarrow \infty$. Эти соотношения

свидетельствуют о том, что рассматриваемый поток газа с равновесно возбужденными степенями свободы молекул при $T_0 \rightarrow 0$ и $T_0 \rightarrow \infty$ ведет себя, как поток совершенного газа с показателем адиабаты $\gamma = \beta/(\beta-1)$ и $\gamma = \beta_1/(\beta_1-1)$ соответственно.

Известно, что для плоского стационарного безвихревого течения газа существуют потенциал скорости φ и функция тока ψ , которые при условии баротропности удовлетворяют соотношениям [15]

$$\frac{1}{u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{u} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial u} \quad (1.2)$$

где θ — угол наклона вектора скорости к оси x . Поскольку для рассматриваемого течения существует взаимно однозначная связь между u и T (1.1), систему (1.2) можно записать в виде

$$\frac{1}{u} \frac{\partial \varphi}{\partial T} = \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{u} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{dT}{du} \frac{\partial \psi}{\partial T}$$

Введем новую переменную η

$$\eta = \eta(T) = \left\{ \frac{3}{2} \int_{T_*}^T h' \sqrt{K} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{dT}{u^2} \right\}^{2/3} \quad (1.4)$$

$$K = K(T) = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \left[1 - \frac{2(h_0 - h)(h' - R)}{RT h'} \right]$$

Здесь штрихом отмечается производная по T ; критическая температура T_* является корнем уравнения

$$2(h_0 - h) = h' RT (h' - R)^{-1}$$

выражающего условие равенства скорости и местной скорости звука.

Система (1.3) в переменных θ, η принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -B \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \eta B \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad B = \sqrt{\frac{K}{\eta}} \quad (1.5)$$

Исключив из (1.5) φ , получим уравнение типа уравнения Чаплыгина в форме Франкля [16]

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + b(\eta) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad (1.6)$$

$$b(\eta) = \frac{1}{2K} \left(\frac{dK}{d\eta} - \frac{K}{\eta} \right)$$

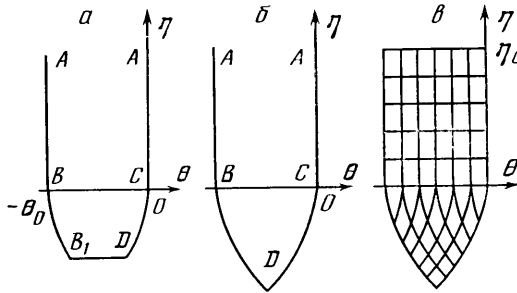
Нетрудно убедиться, что на интервале $0 < T < T_0$ $\eta(T)$ — вещественная аналитическая функция, которая возрастает от значения $\eta_{\min} < 0$ до $+\infty$, меняя знак в точке $T = T_*$. В промежутке $[\eta_{\min}, +\infty)$ функция $b(\eta)$ возрастает от $-\infty$ до 0, функция $B(\eta)$ убывает от $+\infty$ до 0. Согласно (1.1), (1.4), (1.6), функции $\eta(T)$, $b(\eta)$ зависят от совокупности параметров $a = \{\beta, \xi_k, g_k, \theta_k\}$, характеризующих газовую смесь, и от T_0 .

Уравнение (1.6) при $\eta > 0$ является эллиптическим, при $\eta < 0$ — гиперболическим; прямая $\eta = 0$ в плоскости (θ, η) является линией параболического вырождения типа уравнения. Характеристиками уравнения (1.6) служат полукубические параболы $\theta \pm^{2/3} (-\eta)^{1/2} = \text{const}$.

2. Пусть из сосуда, образованного бесконечными плоскими стенками, расположенными симметрично относительно оси x , происходит истечение газа с заданным расходом $\rho_0 Q$ кг·с⁻¹·м⁻¹ при указанных выше предпочтениях относительно характера течения и при условии, что давление во внешнем пространстве меньше критического: $\mu < \mu_* = \mu_*(a, T_0) = P(T_*)$. При этом в физической плоскости имеется область трансзвукового влияния, ограниченная стенкой сосуда AB , осью симметрии x , характеристикой CD , исходящей из точки пересечения звуковой линии CB с осью симметрии, и отрезком BD свободной поверхности (фиг. 1, a). Соответствующая область в плоскости (θ, η) показана на фиг. 2, a (BB_1, CD — отрезки характеристик, на B_1D $\eta = \eta_D = \text{const}$).

Уменьшение η_D соответствует уменьшению μ (при фиксированных a, T_0). Очевидно, $\min \eta_D = \eta_{**} = -(\frac{3}{4}\theta_0)^{2/3}$. Значению $\eta_D = \eta_{**}$ соответствует значение $\mu = \mu_{**} = \mu_{**}(a, T_0, \theta_0) = P(T_{**})$, где T_{**} — корень уравнения $\eta(T) = \eta_{**}$. В случае $\mu = \mu_{**}$ характеристика CD попадает в кромку сосуда (фиг. 1, б, 2, б). Этот случай является предельным: дальнейшее уменьшение внешнего давления не меняет течения в области трансзвукового влияния.

Таким образом, при $\mu_{**} < \mu < \mu_*$ задача сводится к решению уравнения (1.6) при условиях: $\psi = \frac{1}{2}Q$ на ABB_1D , $\psi = 0$ на AC (фиг. 2, а); при $\mu \leq \mu_{**}$ $\psi = \frac{1}{2}Q$ на ABD , $\psi = 0$ на AC (фиг. 2, б). Можно убедиться, что искомое



Фиг. 2

решение должно удовлетворять условию $\psi \rightarrow -\frac{1}{2}Q\theta/\theta_0$ при $\eta \rightarrow \infty$ (в окрестности бесконечно удаленной точки течение является радиальным).

3. В основу численного решения задачи был положен эффективный конечно-разностный алгоритм, предложенный в [13] для решения краевой задачи Трикоми для линейного уравнения смешанного типа более общего вида, чем (1.6). Основная идея алгоритма заключается в расщеплении разностного оператора в соответствии с типом дифференциального. Известно [13], что решение разностного уравнения существует, единственно и может быть найдено итерационным методом Зайделя; при измельчении сетки решение разностной краевой задачи стремится к решению дифференциальной задачи Трикоми, если последнее существует и является достаточно гладким.

Решение отыскивалось в области, ограниченной сверху отрезком $\eta = \eta_0 > 0$, $-\theta_0 \leq \theta \leq 0$, на котором ставилось условие радиальности течения: $\psi = -\frac{1}{2}Q\theta/\theta_0$. Применялась разностная схема второго порядка аппроксимации [13]. При $\eta \geq 0$ использовалась прямоугольная разностная сетка с постоянными шагами по θ и η , при $\eta < 0$ за узлы сетки принимались точки пересечения характеристик, исходящих из узлов на прямой $\eta = 0$ (фиг. 2, в).

Рассматривалась газовая смесь, состоящая из молекул кислорода и азота, количество которых находится в соотношении 1:4. Калорическое уравнение состояния такой смеси имеет вид [14]

$$h = \frac{7}{2} RT + R(0,2\theta_1\epsilon_1 + 0,8\theta_2\epsilon_2)$$

$$\theta_1 = 2240 \text{ К}, \theta_2 = 3354 \text{ К}$$

Отметим, что при $T_0 \rightarrow 0$ и $T_0 \rightarrow \infty$ газ ведет себя как совершенный с показателем адиабаты $\gamma = 7/5$ и $9/7$ соответственно.

В расчетах полагалось $\eta_0 = 2,48$; число узлов составляло 5125 в области $\eta \geq 0$ и 820 в области $\eta_* \leq \eta < 0$ (41 узел на отрезке $\eta = 0$, $-\theta_0 \leq \theta \leq 0$). Значения $b(\eta)$ в точках, соответствующих строкам сетки, находились с помощью решения интегрального уравнения (1.4) (в предельных случаях $T_0 \rightarrow 0$ и $T_0 \rightarrow \infty$ — с помощью решения соответствующего трансцендентного уравнения). Для решения разностной задачи применялся метод поточечной релаксации в сочетании с циклической процедурой вида $\psi = \psi^{(n)} + (\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)})/(1-\lambda)$, основанной на оценке спектрального радиуса λ матрицы перехода от итерации к итерации [17]. В качестве нулевого приближения принималось распределение ψ для радиального течения и проводился расчет на грубой сетке (21×63 узла в области $\eta \geq 0$); полученное решение интерполировалось на основную сетку и использовалось в качестве пачальной приближения для новой релаксационной процедуры. В качестве критерия итерационной сходимости использовалось условие $|\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}| \leq 10^{-6}$ (n — номер итерации). Сходимость достигалась при числе итераций порядка 1000.

После получения сеточных значений функции ψ в плоскости θ, η обратный переход в физическую плоскость x, y осуществлялся численным интегрированием дифференциальных соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -\frac{\cos \theta}{u} B \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} &= -\frac{\sin \theta}{u} B \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{\cos \theta}{u} \eta B \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\sin \theta}{u} \eta B \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Соотношения (3.1) получены из выражения

$$dz = \left(d\varphi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\psi \right) \frac{1}{u} e^{i\vartheta}, \quad z = x + iy$$

с использованием (1.5).

Частные производные от ψ находились с помощью построения интерполяционного кубического сплайна.

Погрешность решения краевой задачи, связанная с влиянием величины η_0 , оценивалась с помощью предварительных расчетов. Последние показали, что при $\eta_0 \approx 2,5$ (соответствующее число Маха $M \approx 0,05$) погрешности, обусловленные неточностью задания граничного условия, значительно ниже общего уровня ошибок метода.

О характере сходимости решения при измельчении сетки можно судить по следующим данным. Значение коэффициента расхода ε (см. ниже) для совершенного газа с показателем адиабаты $\gamma = 7/5$ ($T_0 \rightarrow 0$) при $\theta_0 = \pi/2$, $\mu = \mu_*$ получалось равным 0,8442, 0,8505 и 0,8507 при числе узлов в области $\eta \geq 0$, равном 21×63 , 41×125 и 61×187 соответственно.

Расчеты проводились на ЭВМ ЕС 1045. Затраты машинного времени на решение краевой задачи и переход в физическую плоскость (построение изомах, нахождение распределений газодинамических параметров вдоль стенок и оси сосуда, вычисление коэффициента расхода) для одного варианта составляло около 15 мин.

4. Значения некоторых характерных параметров для рассматриваемой смеси газов при различных значениях T_0, K приведены ниже:

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	∞
T'	0,83333	0,83660	0,85327	0,86329	0,86795	0,87034	0,87500
μ_*	0,52828	0,52935	0,53514	0,54203	0,54452	0,54581	0,54832
ρ'	0,63394	0,63274	0,62918	0,62787	0,62736	0,62711	0,62665
u'	0,40825	0,40705	0,39701	0,38716	0,38042	0,37580	0,35355
u''	0,40825	0,40727	0,39974	0,39177	0,38591	0,38171	0,36004
f	1	0,99757	0,98570	0,97876	0,97555	0,97390	0,97070

Здесь

$$\begin{aligned} t &= \frac{T_0}{10^3}, \quad \xi = \frac{2\theta_0}{\pi}, \quad \mu_* = \frac{p_*}{p_0}, \quad T' = \frac{T_*}{T_0} \\ \rho' &= \frac{\rho_*}{\rho_0}, \quad u' = \frac{u_*}{u_m}, \quad u'' = \frac{u_*^0}{u_m}, \quad u_m = \sqrt{2h_0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$u_*^0 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} RT_0}, \quad f = \frac{\rho_* u_*}{\rho_0 u_*^0} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad \gamma = \frac{7}{5}$$

p_*, ρ_*, u_* — значения p, ρ, u при $T = T_*$, u_m — максимальная скорость газа.

В таблице приведены значения μ_{**} , вычисленные для различных значений θ_0, T_0 . Заметим, что величины μ_*, μ_{**} возрастают с ростом T_0 ($\mu_{**} \rightarrow \mu_*$ при $\theta_0 \rightarrow 0$).

Основной интегральной характеристикой течения является коэффициент расхода ε

$$\varepsilon = \rho_0 Q / 2\rho_* u_* L \quad (4.2)$$

ε	$t=0$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	∞
1	0,03891	0,03922	0,04273	0,04658	0,04891	0,05023	0,05297
5/6	0,06514	0,06559	0,07041	0,07528	0,07804	0,07957	0,08268
2/3	0,10371	0,10432	0,11052	0,11628	0,11940	0,12109	0,12447
1/2	0,15830	0,15909	0,16655	0,17296	0,17630	0,17808	0,18161
1/3	0,23363	0,23459	0,24298	0,24967	0,25305	0,25483	0,25835
1/6	0,33798	0,33906	0,34776	0,35423	0,35742	0,35908	0,36235

$$L = \int_0^{-\theta_0} \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)_{\eta=0} d\theta \quad (4.3)$$

где $2L$ — расстояние между кромками сосуда.

Представим Q в виде $Q = u_m H$, где H — параметр, имеющий размерность длины. Тогда $\varepsilon = \rho_0 u_m H / (2\rho_* u_* L)$, причем, согласно (4.3), (3.1)

$$\frac{L}{H} = \int_0^{-\theta_0} \left[-\frac{\sin \theta}{u/u_m} B \frac{\partial \psi^\circ}{\partial \eta} + \frac{\rho_0 \cos \theta}{\rho} \frac{\partial \psi^\circ}{u/u_m \partial \theta} \right]_{\eta=0} d\theta$$

где ψ° — решение соответствующей краевой задачи, полученное при условии $Q=1$.

Коэффициент расхода ε был вычислен для 240 различных вариантов задания параметров ξ , t , μ ; вычисления проводились для значений $\xi = \xi_k = k/6$ ($k=1, 2, \dots, 6$), $t = t_n = n/2$ ($n=0, 1, \dots, 6$), $t = \infty$, $\mu = \mu_n$ ($n=1, 2, \dots, 5$), $\mu_1 = \mu_{**}$, $\mu_2, \mu_3, \mu_4 \in (\mu_{**}, \mu_*)$, $\mu_5 = \mu_*$.

Следующие выражения интерполируют полученные значения ε с погрешностью, не превышающей $5 \cdot 10^{-4}$

$$\varepsilon = \varphi_0(\xi) + \sum_{k=1}^3 \varphi_k(\xi) m^{k+1} + \chi(t) \left[\psi_0(\xi) + \sum_{k=1}^3 \psi_k(\xi) m^{k+1} \right]$$

$$\varphi_0(\xi) = 1 - 0,1303\xi - 0,1455\xi^2 + 0,2061\xi^3 - 0,0798\xi^4$$

$$\varphi_1(\xi) = -0,0918\xi - 0,0428\xi^2 - 0,0672\xi^3$$

$$\varphi_2(\xi) = 0,0439\xi - 0,0751\xi^2 + 0,3056\xi^3$$

$$\varphi_3(\xi) = -0,0825\xi + 0,1091\xi^2 - 0,2072\xi^3$$

$$\psi_0(\xi) = 0,0021\xi + 0,0054\xi^2 - 0,0065\xi^3 + 0,0029\xi^4$$

$$\psi_1(\xi) = 0,0017\xi^2 + 0,0166\xi^3$$

$$\psi_2(\xi) = 0,0009\xi + 0,0218\xi^2 - 0,0694\xi^3$$

$$\psi_3(\xi) = 0,0055\xi - 0,0450\xi^2 + 0,0677\xi^3$$

$$\chi(t) = t^3 (0,244 + 0,311t) (1 - 1,364t + 0,908t^2 + 0,138t^3 + 0,311t^4)^{-1}$$

$$m = m(\xi, t, \mu) = (\mu - \mu_{**}) / (\mu_* - \mu_{**})$$

Зависимость $\varepsilon(\xi, t, \mu)$ можно охарактеризовать следующими соотношениями: $\partial \varepsilon / \partial \xi < 0$, $\partial \varepsilon / \partial t > 0$, $\partial \varepsilon / \partial \mu < 0$ при $\xi \in [0, 1]$, $t \in (0, \infty)$, $\mu \in (\mu_{**}, \mu_*)$; $\partial \varepsilon / \partial t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$; $\partial \varepsilon / \partial \mu \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \mu_{**}$.

На фиг. 3 показана зависимость $\varepsilon(\mu)$ ($0 \leq \mu \leq \mu_*$) для $\xi = 1/6, 2/6, \dots, 1$ (кривые 1–6 соответственно), а также зависимость $\varepsilon(\mu_{**})$; сплошные кривые отвечают случаю $T_0 \rightarrow 0$, штриховые — случаю $T_0 \rightarrow \infty$ (вертикальные прямые, ограничивающие кривые 1–6 справа, отвечают значениям $\mu = \mu_*$ для первого и второго случая).

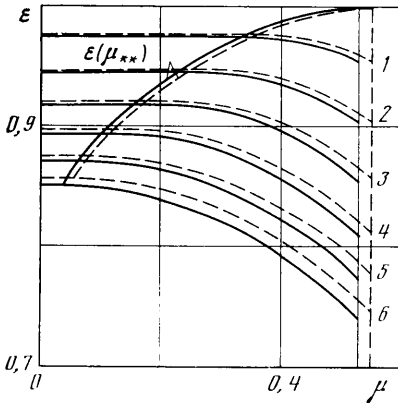
Определение коэффициента расхода с помощью формулы (4.2) не яв-

ляется единственно возможным. Удобно также следующее определение: $\varepsilon^\circ = \rho_0 Q / (2\rho_*^\circ u_*^\circ L)$, где ρ_*° , u_*° — критические плотность и скорость газа при «замороженных» колебательных степенях свободы молекул. Очевидно, $\varepsilon^\circ = \varepsilon f$ (см. выше (4.1)). Зависимость $f(t)$ на интервале $[0, \infty)$ с высокой точностью аппроксимируется выражением

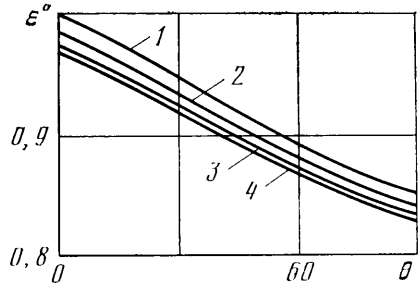
$$f(t) = f_1/f_2, \quad f_1 = 1 - 1,8581t + 5,1223t^2 - 3,6577t^3 + 6,3809t^4$$

$$f_2 = f_1 + 0,0201t^2 - 0,1114t^3 + 0,1926t^4$$

В отличие от ε , ε° убывает с ростом t при фиксированных ξ , μ . На фиг. 4 показана зависимость $\varepsilon^\circ(\xi)$ при $\mu = \mu_{**}(\xi, t)$ для $t \rightarrow 0$ ($\gamma = 7/5$),



Фиг. 3



Фиг. 4

$t=1$, $t=2$, $t \rightarrow \infty$ ($\gamma = 9/7$) (кривые 1–4 соответственно). Заметим, что при $t \rightarrow 0$ величины ε и ε° совпадают.

Полученные результаты достаточно хорошо согласуются с известными. Так, для случая $\mu = \mu_{**}$, $t \rightarrow 0$ ($\gamma = 7/5$), $\xi = 1$ в [5] приводится значение $\varepsilon = 0,85$, в [6] — 0,856, в [9] — 0,850, в [10] — 0,853 в [8] $\varepsilon \approx 0,855$; в данном решении $\varepsilon = 0,8505$. Для случая $\mu = \mu_{**}$, $t \rightarrow 0$, $\xi = 1/2$ в [7] дается значение $\varepsilon = 0,919$, в [8] $\varepsilon \approx 0,916$, в данном решении $\varepsilon = 0,9193$. Не хуже согласование результатов настоящей работы с известными [18–21] и для случая $\mu = \mu_*$, $t \rightarrow 0$.

В заключение отметим, что использованный в работе метод в отличие от метода Фурье одинаково удобен для расчета течений как совершенного газа, так и газа с усложненным калорическим уравнением состояния; он более эффективен, чем использованный в [9, 10] конечно-разностный метод; для задач рассмотренного типа он значительно экономичнее и точнее метода установления решения в физической плоскости.

Авторы благодарны Г. Ю. Степанову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
2. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М.: Мир, 1967. 566 с.
3. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1945. Т. 9. № 2. С. 121–142.
4. Овсянников Л. В. Об одном газовом течении с прямой линией перехода // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 15. С. 537–542.
5. Франкль Ф. И. Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. № 3. С. 381–384.
6. Камзолов В. Н., Пирумов У. Г. Расчетное исследование сверхзвуковой струи, истекающей из отверстия с плоскими стенками // ПМТФ. 1967. № 2. С. 117–122.

7. *Асланов С. К.* Сверхзвуковое истечение газа из несимметричного сосуда с плоскими наклонными стенками при максимальном расходе // Тр. Одес. ун-та. Сер. физ. наук. 1962. Т. 152. № 8. С. 98–101.
8. *Блюмкина И. А., Цителов И. М.* Расчет истечения симметричной струи газа при максимальном расходе // Вестн. ЛГУ. 1978. № 13. Вып. 3. С. 79–85.
9. *Norwood R. E.* Two-dimensional transonic gas jets // Proc. 4-th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., California, 1962. N. Y.: ASME, 1962. V. 2. P. 1359–1367.
10. *Benson R. S., Pool D. E.* Compressible flow through a two-dimensional slit // Intern. J. Mech. Sci. 1965. V. 7. № 5. P. 315–336.
11. *Косолапов Ю. С., Салганов Г. А., Сивобород В. А., Филиппов Г. А.* Численное решение задачи об истечении газа из плоских и осесимметричных сосудов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 2. С. 174–176.
12. *Косолапов Ю. С., Сивобород В. А.* Расчетно-теоретическое исследование истечения газа из плоских щелей и осесимметричных отверстий // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 109–115.
13. *Ogawa H.* On difference methods for the solution of a Tricomi problem // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 100. № 3. P. 404–424.
14. *Лосев С. А.* Газодинамические лазеры. М.: Наука, 1977. 335 с.
15. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
16. *Франкль Ф. И.* К теории сопел Лавалея // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1945. Т. 9. № 5. С. 387–422.
17. *Cheng H., Hafez M. M.* Cyclic iterative method applied to transonic flow analyses // Lect. Notes Phys. 1976. V. 47. P. 101–121.
18. *Чаплыгин С. А.* О газовых струях // Избр. труды. М.: Наука, 1976. С. 11–96.
19. *Ferguson D., Lighthill M.* The hodograph transformation in trans-sonic flow. IV. Tables // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1947. V. A. 192. № 1028. P. 135–142.
20. *Арынов А.* Истечение газа из сосуда со стенками, заключающими между собой малый угол $2\theta_0$ // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 1. С. 43–46.
21. *Сунгурцев Ю. В.* К вопросу об истечении газа из щели между двумя плоскостями // Аэродинамика. Межвуз. научн. сб. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1973. Вып. 2(5). С. 91–100.

Казань
Горький

Поступила в редакцию
14.I.1986