

УДК 533.6.011

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛЬЕВ БЕСКОНЕЧНОГО
РАЗМАХА С ЗАТУПЛЕННОЙ ПЕРЕДНЕЙ КРОМКОЙ
В РЕЖИМЕ ВИХРЕВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

ГЕРШБЕЙН Э. А. | ЛЕГОСТАЕВ А. А.

Проводится асимптотический анализ уравнений Навье – Стокса для случая гиперзвукового обтекания крыльев бесконечного размаха с затупленной передней кромкой при $\epsilon \rightarrow 0$, $Re \rightarrow \infty$, $M_\infty \rightarrow \infty$. Получены аналитические решения для невязкого ударного слоя и невязкого пограничного слоя. Приведены результаты численного решения задач о вихревом взаимодействии на затуплении и на боковой поверхности крыла. Проведено сравнение этих решений с решением уравнений тонкого вязкого ударного слоя и на основе этого сравнения оценены границы асимптотических областей.

Ранее режим вихревого взаимодействия в окрестности затупления рассматривался в [1, 2] для осесимметричных тел, в [3] для плоских тел. Вихревое взаимодействие на боковой поверхности в осесимметричном и пространственном случаях рассматривалось в [4–8].

1. Постановка задачи и классификация режимов обтекания. Рассмотрим обтекание крыла бесконечного размаха гиперзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа при наличии угла скольжения. При этом будем рассматривать такие тела, для которых ньютоновская теория обтекания затупленных тел не дает отрыва ударного слоя. В частности, такими телами будут цилиндры с гиперболическими контурами, которые характеризуются радиусом кривизны контура в его вершине R , длиной контура L , отсчитываемой от его вершины, и углом полураскрытия асимптот β , хотя полученные результаты могут быть использованы и для тел другой формы. Будем исходить из системы уравнений Навье – Стокса, записанных в модифицированных переменных Мизеса

$$\begin{aligned}
 D_* u + u &= -\frac{2\epsilon a}{\rho u(1+\epsilon)} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{l}{K} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + \dots & (1.1) \\
 D_* w &= \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{l}{K} \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) + \dots, \quad \frac{2}{(1+\epsilon)} \frac{\partial p}{\partial \psi} = a \kappa x^2 u + \dots \\
 D_* T &= \frac{2\epsilon}{(1+\epsilon)\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{l}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{l}{K} \left[x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \right. \\
 &+ \left. \operatorname{tg}^2 \varphi \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} \right)^2 \right] + \dots, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho u}, \quad v = a u D_* y, \quad p = \rho T \\
 \mu &= T^\alpha, \quad D_* \equiv x \frac{\partial}{\partial x} - \psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad a^{-1} = 1 + \epsilon \kappa y
 \end{aligned}$$

Здесь Rx – координата, отсчитываемая от критической точки тела вдоль направляющей, Rz_0 – вдоль образующей, ϵRy – по нормали к поверхности тела; $xU_\infty u$, $\epsilon U_\infty v$, $W_\infty w$ – составляющие вектора скорости; $U_\infty = V_\infty \cos \varphi$, $W_\infty = V_\infty \sin \varphi$, где V_∞ – модуль полной скорости набегающего потока, φ –

угол скольжения; $\varepsilon^{-1}\rho_\infty\rho$ — плотность, $(\varepsilon\delta)^{-1}p_\infty p$ — давление, $\delta^{-\omega}\mu_\infty\mu$ — вязкость, $\delta^{-1}T_\infty T$ — температура газа; $\rho_\infty U_\infty R\psi_*$ — функция тока, введенная по формуле (см. [9]) $d\psi_* = -\rho v a^{-1} dx + \rho u_* dy$. Кроме того, введены следующие обозначения:

$$u_* = ux, \quad \psi = \frac{\psi_*}{x}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad l = \mu\rho u$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad \delta^{-1} = (\gamma-1)M_\infty^2, \quad M_\infty^2 = U_\infty^2 \left(\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty} \right)^{-1}$$

$$Re = \delta^0 \rho_\infty U_\infty \frac{R}{\mu_\infty}, \quad \sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{W_\infty}{U_\infty}$$

В этих переменных поверхности тела соответствует $\psi=0$ ($\psi_*=0$), ударной волне — $\psi=\psi_s=r_s x^{-1}=x^{-1}(r_w+\varepsilon y_s \cos \alpha)$, где $r_w(x)$ — расстояние от плоскости симметрии до поверхности крыла, а $\alpha(x)$ — угол между вектором U_∞ и касательной к контуру крыла.

Далее для удобства введем переменную $z=\exp(y)$. Тогда пятое уравнение системы (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{z}{\rho u} \quad (1.2)$$

Граничные условия на поверхности тела и в набегающем потоке следующие:

$$u=w=0, \quad T=T_w(x), \quad y=0 \quad (z=1) \quad (\psi=0) \quad (1.3)$$

$$u \rightarrow \frac{\cos \alpha}{x}, \quad v \rightarrow -\frac{\sin \alpha}{\varepsilon}, \quad w \rightarrow 1 \quad (\psi \rightarrow \infty) \quad (1.4)$$

В дальнейшем будем считать, что $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, $Re \rightarrow \infty$. В асимптотическом решении область течения между телом и ударной волной разделяется на ряд подобластей, число которых зависит от соотношения между определяющими параметрами задачи. Рассмотрим три режима.

1. $K=\varepsilon Re=O(1)$, $N=KLR^{-1} \gg 1$. Течение разбивается на три области. При $x < O(K^{-1})$ реализуется вязкий ударный слой, в котором $\psi_* = O(K^{-1})$, а при $x \gg O(K^{-1})$ имеются невязкий ударный ($\psi_* = O(x)$) и пограничный слои ($\psi_* = O(\sqrt{xK^{-1}})$).

2. $In_0 = Re \varepsilon^n = O(1)$; $1 < n \leq 1,5$; $M = KRL^{-1} \ll 1$. В окрестности затупления реализуется режим вихревого взаимодействия, а вся область течения между ударной волной и телом разбивается на четыре области. Около ударной волны имеется невязкий ударный слой ($\psi_* = O(x)$). Вблизи тела при $x \ll O(K)$ реализуется пограничный слой с вихревым взаимодействием ($\psi_* = O(K^{-1}x)$), при $x = O(K)$ реализуется область поглощения энтропийного слоя ($\psi_* = O(1)$), при $x \gg O(K)$ реализуется вязкий пограничный слой ($\psi_* = O(\sqrt{xK^{-1}})$).

3. $In = Re \varepsilon^{1,5} \gg 1$, $M = KRL^{-1} \ll 1$. В окрестности затупления реализуется классический пограничный слой, а вся область течения между телом и ударной волной разбивается на шесть подобластей. Вблизи ударной волны реализуется невязкий ударный слой ($\psi_* = O(x)$). Вблизи тела при $x \ll \ll O(In)$ реализуются невязкий пограничный ($\psi_* = O(\varepsilon^{0,5})$) и классический пограничный слои ($\psi_* = O(\sqrt{\varepsilon x/In})$), при $x = O(In)$ реализуется область вихревого взаимодействия на боковой поверхности ($\psi_* = O(\sqrt{\varepsilon})$), при $x = O(K)$ — область поглощения энтропийного слоя ($\psi_* = O(1)$), а при $x \gg \gg O(K)$ — вязкий пограничный слой ($\psi_* = O(\sqrt{xK})$).

В асимптотическом описании задача вместо двух различных определяющих параметров ε и Re зависит от их комбинации Π , таким образом, число определяющих параметров сокращается.

2. Невязкий ударный слой. Рассмотрим случай, когда

$$\operatorname{Re} \varepsilon^n = O(1); \quad n > 1,5 \quad (2.1)$$

Решение уравнений (1.1) в области, примыкающей к ударной волне, ищем в виде

$$F = F_1 + \dots, \quad z = \varphi_1(\varepsilon) z_1 + \dots \quad (2.2)$$

где F — любая из функций u, w, p, ρ, T , а $\varphi_1(\varepsilon)$ — некоторая функция, которая будет определена ниже. Для главных членов разложения получим уравнения

$$\begin{aligned} D_* u_1 + u_1 = 0, \quad D_* w_1 = 0, \quad D_* T_1 = 0 \\ 2 \frac{\partial p_1}{\partial \psi} = \kappa x^2 u_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \psi} = \frac{z_1}{\rho_1 u_1}, \quad p_1 = \rho_1 T_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Граничные условия на ударной волне вытекают из условия сопряжения решения (2.2) с решением уравнений во внутренней части структуры ударной волны (см. [10])

$$\begin{aligned} u_1 = x^{-1} \cos \alpha(x), \quad 2p_1 = 2T_1 = \sin^2 \alpha(x) \\ w_1 = 1 \quad (\psi = \psi_s = x^{-1} r_w(x)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение системы (2.3)–(2.4) имеет вид (см. [9])

$$u_1 = x^{-1} \cos \alpha(t), \quad w_1 = 1, \quad 2T_1 = \sin^2 \alpha(t), \quad t = r_w^{-1}(x\psi) \quad (2.5)$$

$$2p_1 = \sin^2 \alpha(x) + \kappa x^2 \int_{\psi_s}^{\psi} u_1 d\psi, \quad z_1 = C \exp\left(\int_1^{\psi} \frac{d\psi}{\rho_1 u_1}\right)$$

где r_w^{-1} — функция, обратная функции $r_w(x)$, C — константа интегрирования.

Рассмотрим решение (2.5) в окрестности $\psi=0$. При малых ψ получаем

$$u_1(x, \psi) \approx \psi, \quad w_1(x, \psi) = 1, \quad 2T_1(x, \psi) \approx 1 \quad (2.6)$$

$$2p_1(x, \psi) \approx \sin^2 \alpha(x) + \kappa x^2 \int_{\psi_s}^0 u_1 d\psi \equiv 2p_w(x), \quad z_1(x, \psi) \approx C \psi^{1/(2p_w)}$$

Из последнего выражения (2.6) следует, что при $\psi \rightarrow 0$ $z_1 \rightarrow 0$ ($y_1 \rightarrow -\infty$). Таким образом, решение (2.2) в окрестности $\psi=0$ несправедливо и должно быть видоизменено. Константа C и вид функции $\varphi_1(\varepsilon)$ определяются из условий сращивания решения (2.5) с решением задачи в последующих областях.

3. Невязкий пограничный слой. Для исправления решения (2.2) при выполнении условия (2.1) в окрестности $\psi=0$ введем в слое $\psi = O(\sqrt{\varepsilon})$ новые переменные $x = x_2$, $\psi = \psi_2 \sqrt{\varepsilon}$. Решение уравнений Навье — Стокса (1.1) ищем в виде

$$u = u_2 \sqrt{\varepsilon} + \dots, \quad F = F_2 + \dots \quad (3.1)$$

где F — любая из функций p, ρ, T, w, z . Для главных членов разложения получим

$$\begin{aligned} D_* u_2 + u_2 = \frac{2}{x_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2}, \quad D_* w_2 = D_* T_2 = 0 \\ \frac{\partial p_2}{\partial \psi_2} = 0, \quad \frac{\partial z_2}{\partial \psi_2} = \frac{z_2}{\rho_2 u_2}, \quad p_2 = \rho_2 T_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Граничные условия для главных членов, удовлетворяющие условию

сращения с решением (2.2), следующие:

$$u_2 \rightarrow \psi_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \psi_2} \rightarrow 1 \right), \quad w_2 \rightarrow 1, \quad 2T_2 \rightarrow 1, \quad p_2 \rightarrow p_w(x) \quad (\psi_2 \rightarrow \infty) \quad (3.3)$$

Решение уравнений (3.2) с условиями (3.3) имеет вид

$$u_2^2 = \psi_2^2 + P, \quad w_2 = 1, \quad 2T_2 = 1, \quad p_2 = p_w(x) \quad (3.4)$$

$$z_2 = S(\psi_2 + \sqrt{\psi_2^2 + P})^{1/(2p_w)}, \quad P \equiv -\frac{2}{x^2} \ln[2p_w(x)]$$

Здесь S — константа интегрирования, определяемая из граничных условий, вытекающих из условий сращения решения (3.2) с решением в последующих областях. Как будет следовать из дальнейшего, условия для определения константы интегрирования и выражение для нее для случая (2.1) при $x \ll \text{In}$, $\text{In} = \varepsilon^{1.5}$ Re имеют вид

$$z_2 = 1 \quad (\psi_2 = 0), \quad S = P^{-1/(4p_w)} \quad (3.5)$$

В дальнейшем понадобится также решение для u_2 и T_2 в переменных x_2 , $\psi_2 = x\psi_2$. Введем следующие обозначения:

$$u_b(\psi_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} x_2 u_2(x_2, \psi_2), \quad T_b(\psi_2) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} T_2(x_2, \psi_2) \quad (3.6)$$

Для определения константы C и зависимости $\varphi_1(\varepsilon)$ перейдем в выражении для z_2 (см. (3.4)) к переменной ψ . Оставляя главные члены, получим

$$z = S(4\varepsilon\psi^2)^{1/(4p_w)} \quad (3.7)$$

Учитывая разложение (2.2) и представление решения (2.5) при малых ψ (2.6), получим

$$C = S2^{1/(2p_w)}, \quad \varphi_1(\varepsilon) = \varepsilon^{-1/(4p_w)} \quad (3.8)$$

где S определяется выражением (3.5).

4. Режим вихревого взаимодействия на затуплении. Рассмотрим режимы обтекания, при которых $\text{In}_0 = \text{Re } \varepsilon^n = O(1)$, $1 < n \leq 1.5$. В этом режиме к невязкому ударному слою примыкает вязкий пограничный слой. Введем новую переменную ψ_3 и будем искать решение уравнения Навье — Стокса в следующем виде:

$$\psi = \varepsilon^{n-1} \psi_3, \quad u = \varepsilon^{n-1} u_3 + \dots, \quad F = F_3 + \dots \quad (4.1)$$

где F — любая из функций p , ρ , T , w , z . Для главных членов разложения получим

$$D_* u_3 + u_3 = -\frac{2\varepsilon^{3-2n}}{\rho_3 u_3 x} \frac{\partial p_3}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \psi_3} \left(l_3 \frac{\partial u}{\partial \psi_3} \right) \quad (4.2)$$

$$D_* w_3 = \frac{\partial}{\partial \psi_3} \left(l_3 \frac{\partial w_3}{\partial \psi_3} \right), \quad l_3 = \frac{\mu \rho_3 u_3}{\text{In}_0}, \quad \frac{\partial p_3}{\partial \psi_3} = 0, \quad p_3 = \rho_3 T_3$$

$$D_* T_3 = \frac{\partial}{\partial \psi_3} \left(\frac{l_3}{\sigma} \frac{\partial T_3}{\partial \psi_3} \right) + l_3 \text{tg}^2 \varphi \left(\frac{\partial w_3}{\partial \psi_3} \right)^2, \quad \frac{\partial z_3}{\partial \psi_3} = \frac{z_3}{\rho_3 u_3}$$

Сращивая решение (4.1) с решением (2.2), получаем граничные условия на внешней границе; при $\psi_3 \rightarrow \infty$, кроме того, имеем условия на поверхности тела; при $\psi_3 = 0$

$$\frac{\partial u_3}{\partial \psi_3} \rightarrow 1, \quad 2T_3 \rightarrow 1, \quad p_3 \rightarrow p_w, \quad w_3 \rightarrow 1 \quad (\psi_3 \rightarrow \infty) \quad (4.3)$$

$$u_3 = 0, \quad w_3 = 0, \quad T_3 = T_w, \quad z_3 = 1 \quad (\psi_3 = 0) \quad (4.4)$$

Константа C (см. (2.5)) и зависимость $\varphi_1(\varepsilon)$ (см. (2.2)) определяются из условий

$$C = \lim_{\psi_3 \rightarrow \infty} (z_3 \psi_3^{-1/(2pw)}), \quad \varphi_1(\varepsilon) = \varepsilon^{(1-n)/(2pw)} \quad (4.5)$$

Отметим, что в случае осесимметричного или пространственного течений параметр $\text{In}_0 = \text{Re } \varepsilon^n$, $1 < n < 2,5$ [1].

5. Режим вихревого взаимодействия на боковой поверхности. Если $\text{Re } \varepsilon^n = O(1)$, $n > 1,5$, то на затуплении реализуется классический пограничный слой. В этой области введем новую переменную ψ_4 и будем искать решение уравнений Навье – Стокса в виде

$$\psi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\text{In}}} \psi_4, \quad u = \sqrt{\varepsilon} u_4 + \dots, \quad F = F_4 + \dots, \quad y = \sqrt{\text{In}} y_4 + \dots \quad (5.1)$$

где F – любая из функций p, ρ, T, w . Для главных членов получаются система уравнений и граничные условия на поверхности тела, совпадающие с (4.2) и (4.4) при замене индекса 3 при переменных на индекс 4 и при $n=1,5$. При этом в (4.2) нужно положить $\text{In}_0=1$, а последнее уравнение заменяется на $\partial y_4 / \partial \psi_4 = (\rho_4 u_4)^{-1}$. Последнее соотношение (4.4) заменится на $y_4=0$ при $\psi_4=0$. Граничные условия на внешней границе ставятся обычные. Они вытекают из условий срачивания с решением (3.1) и имеют вид

$$u_4 \rightarrow \sqrt{P}, \quad 2T_4 \rightarrow 1, \quad p_4 \rightarrow p_w(x), \quad w_4 \rightarrow 1 \quad (\psi_4 \rightarrow \infty) \quad (5.2)$$

Легко показать, что в области применимости модели классического пограничного слоя (т. е. при $x \ll \text{In}$) из условий срачивания решений (5.1) и (3.1) для константы S (см. (3.4)) будет вытекать выражение (3.5).

Толщина классического пограничного слоя ψ_* по порядку величины равна $\sqrt{\varepsilon/\text{In}}$ на затуплении и $\sqrt{\varepsilon x/\text{In}}$ при $x \gg 1$. Толщина невязкого пограничного слоя по порядку величины ψ_* равна $\sqrt{\varepsilon}$. Пусть на расстояниях $x = O(L_i/R)$ происходит вихревое взаимодействие. Это означает, что толщины вязкого и невязкого пограничных слоев по порядку величины стали одинаковыми. Отсюда следует, что параметр $\text{In}_* = R \text{In}/L_i = O(1)$. Для расстояния L_i получается следующая оценка: $L_i/R = O(\text{In})$. Введем для области вихревого взаимодействия на боковой поверхности новые переменные: $x = x_5 \text{In}$, $\psi_5 = x \psi_2$. Решение уравнений Навье – Стокса (1.1), записанных в переменных x_5, ψ_5 при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\text{In} \rightarrow \infty$, $\text{In}_* = O(1)$, ищем в виде

$$F = F_5 + \dots, \quad u_* = \sqrt{\varepsilon} u_5 + \dots \quad (5.3)$$

где F – любая из функций w, p, ρ, T, z . Для главных членов получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi_5} \left(l_5 \frac{\partial u_5}{\partial \psi_5} \right) &= \frac{\partial u_5}{\partial x_5}, \quad \frac{\partial}{\partial \psi_5} \left(l_5 \frac{\partial w_5}{\partial \psi_5} \right) = \frac{\partial w_5}{\partial x_5}, \quad \frac{\partial p_5}{\partial \psi_5} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \psi_5} \left(\frac{l_5}{\sigma} \frac{\partial T_5}{\partial \psi_5} \right) &= \frac{\partial T_5}{\partial x_5} - l_5 \text{tg}^2 \varphi \left(\frac{\partial w_5}{\partial \psi_5} \right)^2, \quad \frac{\partial z_5}{\partial \psi_5} = \frac{z_5}{\rho_5 u_5} \\ p_5 &= \rho_5 T_5, \quad l_5 = \mu_5 \rho_5 u_5, \quad \mu_5 = T_5^\omega \end{aligned} \quad (5.4)$$

При выводе уравнений (5.4) предполагалось, что $x = O(L_i/R)$ соответствует прямолинейному участку контура тела, на котором $\partial p / \partial x = 0$.

Граничные условия на внешней границе получаются из условия срачивания данного решения при $\psi_5 \rightarrow \infty$ с решением (2.2)

$$\frac{\partial u_5}{\partial \psi_5} \rightarrow 1, \quad 2T_5 \rightarrow 1, \quad p_5 \rightarrow p_w, \quad w_5 \rightarrow 1 \quad (\psi_5 \rightarrow \infty) \quad (5.5)$$

Граничные условия на поверхности тела прежние. Начальные условия

для системы (5.4) при $x_5=0$ получаются при сращивании с решением (3.1) при $x_2 \rightarrow \infty$

$$u_5(0, \psi_5) = u_b(\psi_5), \quad T_5(0, \psi_5) = T_b(\psi_5), \quad w_5(0, \psi_5) = 1 \quad (5.6)$$

где $u_b(\psi_5)$, $T_b(\psi_5)$ определяются соотношениями (3.6).

Заметим, что задача о вихревом взаимодействии на боковой поверхности затупленного клина (5.4)–(5.5), если $T_w(x)$ – константа на боковой поверхности, не содержит In в качестве параметра. Поэтому в переменных x_5 , ψ_5 , F_5 , u_5 получаем универсальные зависимости для произвольных In .

Для численного решения этой задачи удобно ввести следующие переменные:

$$\xi_6 = x_5 + x_0, \quad u_6 = \frac{u_5}{\xi_6}, \quad f_6 = \sqrt{\frac{2\psi_5}{\xi_6}} \quad (5.7)$$

позволяющие легко разрешать особенность в коэффициентах уравнений на поверхности тела, возникающую при использовании переменных Мизеса, а также получить автомодельное решение данной задачи при $\xi_6 \rightarrow \infty$, не зависящее от ξ_6 . Величина $x_0 > 0$ введена для того, чтобы избежать возникновения особенности в переменных ξ_6 , f_6 при $\xi_6 = 0$. Численное значение x_0 выбирается из соображений удобства численного решения.

6. Результаты численного решения. Рассмотрим уравнения (4.2) с граничными условиями (4.3)–(4.4) при $n=1,5$. Для удобства численного решения этой задачи перейдем к новым переменным $(x, \psi) \rightarrow (x, f)$, где $f^2 = 2\psi\sqrt{\text{In}}$. Уравнения в новых переменных будут иметь вид ($n=1,5$)

$$\frac{\partial}{\partial f} \left(l \frac{\partial u}{\partial f} \right) = \frac{f}{\rho u x} \frac{\partial p}{\partial x} + fu + fx \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{f^2}{2} \frac{\partial u}{\partial f} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial f} \left(l \frac{\partial w}{\partial f} \right) = fx \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{f^2}{2} \frac{\partial w}{\partial f}, \quad \frac{\partial p}{\partial f} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial T}{\partial f} \right) = -l \text{tg}^2 \varphi \left(\frac{\partial w}{\partial f} \right)^2 + fx \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{f^2}{2} \frac{\partial T}{\partial f}$$

$$p = \rho T, \quad l = \frac{\mu \rho u}{f}, \quad \frac{\partial y}{\partial f} = \frac{f}{\rho u \sqrt{\text{In}}}$$

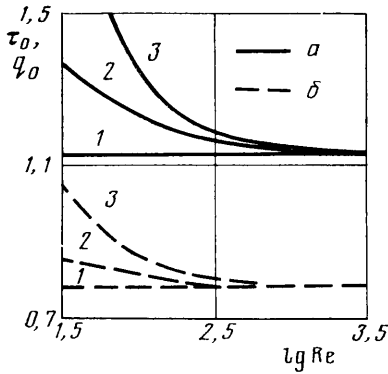
Граничные условия на поверхности тела и внешней границе следующие:

$$f=0: u=0, w=0, T=T_w, y=0 \quad (6.2)$$

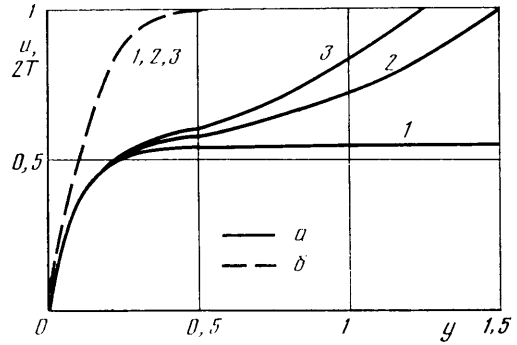
$$f \rightarrow \infty: \frac{\partial u}{\partial f} \rightarrow \frac{f}{\gamma \text{In}}, \quad w \rightarrow 1, \quad 2T \rightarrow 1$$

Данная постановка задачи описывает вихревое взаимодействие как в окрестности притупления, так и на боковой поверхности и, кроме того, включает в себя постановку задачи для классического пограничного слоя при $x \ll \text{In}$. При этом, если $\text{Re} \epsilon^n = O(1)$, случай $1 < n < 1,5$ реализуется при $\text{In} \rightarrow 0$ (малые значения In), $n=1,5$ – при $\text{In} = O(1)$, а $n > 1,5$ (классический пограничный слой на затуплении) – при $\text{In} \rightarrow \infty$ (большие значения In). Задача (6.1)–(6.2) допускает автомодельное решение при $x=0$, которое следует использовать в качестве начального условия для решения задачи при $x > 0$. Направляющая обтекаемых цилиндрических тел задавалась в безразмерных декартовых координатах y^1 , y^2 , отнесенных к радиусу кривизны направляющей на оси симметрии. Ось y^2 направлена вдоль оси симметрии контура, а ось y^1 – по нормали к ней. Рассматривались гиперболические контуры с уравнением $y^2 = \sqrt{k^2 + k(y^1)^2}$.

Необходимое для расчетов давление на поверхности тела вычисляется по формуле (2.5), которая для таких тел принимает вид (6.3), тепловой поток и коэффи-



Фиг. 1



Фиг. 2

циенты трения на теле записываются следующим образом:

$$\frac{\tau_x \sqrt{\text{Re}}}{\rho_\infty U_\infty^2} = x l e^{0,25} \frac{\partial u}{\partial f}, \quad \frac{\tau_x \sqrt{\text{Re}}}{\rho_\infty U_\infty^2} = l e^{-0,25} \text{tg } \varphi \frac{\partial w}{\partial f} \quad (6.3)$$

$$\frac{q \sqrt{\text{Re}}}{\rho_\infty U_\infty^3} = \frac{l e^{-0,25}}{\sigma} \frac{\partial T}{\partial f} \quad (f=0), \quad 2p_w(x) = \frac{1+k\kappa(x)}{1+k}$$

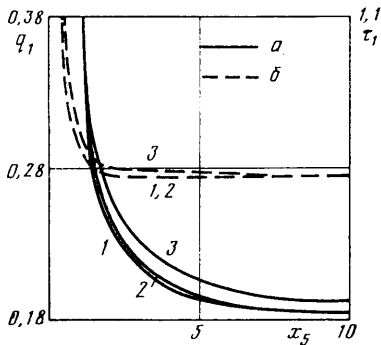
Численные расчеты проводились с помощью разностной схемы 4-го порядка аппроксимации по поперечной координате [11] и 2-го порядка — по продольной [12]. Значения параметров при расчетах брались следующие: $\omega=0,5$; $\sigma=0,74$; $2T_w = 0,1 \sin \alpha(x)$; $k=1$, $\varphi=0$. Решение начиналось от критической точки. При этом при больших \ln для $x < \ln$ реализовался классический пограничный слой. Для решения уравнений классического пограничного слоя использовалась также система уравнений с обычными условиями на внешней границе.

Результаты численного решения показаны на фигурах. На фиг. 1 изображены зависимости безразмерных коэффициента трения $\tau_0 = \tau_x \sqrt{\text{Re}} / (\rho_\infty U_\infty^2 x)$ (кривые *a*) и теплового потока $q_0 = q \sqrt{\text{Re}} / (\rho_\infty U_\infty^3)^{-1}$ (кривые *б*) от числа Re , а на фиг. 2 — профили скорости u (кривые *a*) и температуры T (кривые *б*) в критической точке крыла ($x=0$) для различных теорий. Кривые 1 на этих фигурах соответствуют теории классического пограничного слоя, кривые 2 — теории вязкого ударного слоя, кривые 3 — пограничного слоя с вихревым взаимодействием.

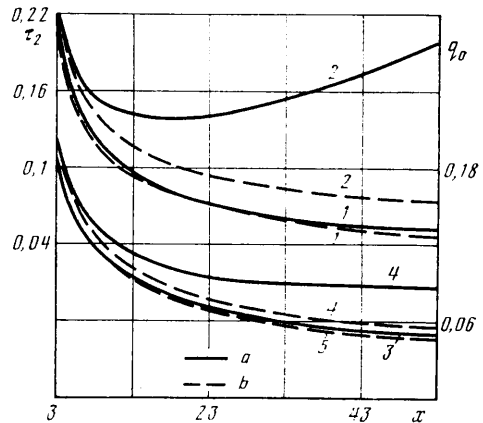
Отметим, что для случаев, изображенных на фиг. 1–2, в уравнении энергии вязкого ударного слоя опущены внепорядковый член с продольным градиентом давления и диссипативный член $l(x \partial u / \partial \psi)^2 K^{-1}$, а $p(x)$ и $\partial p / \partial x$ вычислялись по формуле (6.3). Из фиг. 1 видно, что режим вихревого взаимодействия на затуплении реализуется при $K \geq 15$, $\ln \leq 30$ для указанных выше значений остальных параметров. Он приводит к повышению коэффициента трения и теплового потока на поверхности крыла по сравнению с их погранслойными значениями. При $\ln \geq 30$, как видно из графиков, в окрестности затупления реализуется классический пограничный слой.

На фиг. 3 показаны распределения безразмерных теплового потока $q_1 = qK / (\rho_\infty U_\infty^3)^{-1}$ (линии *б*) и коэффициента трения $\tau_1 = \tau_x K^2 / (\rho_\infty U_\infty^2 x)^{-1}$ (линии *a*) вдоль боковой поверхности крыла в режимах вихревого взаимодействия на боковой поверхности и на затуплении. Здесь кривые 1 соответствуют решению задачи о вихревом взаимодействии на боковой поверхности крыла (5.4)–(5.6), а кривые 2 и 3 — решению задачи (6.1)–(6.2) при $\ln = 10^{1,5}$ и $10^{2,5}$ соответственно. Выход на автомодельное решение при $x_5 \rightarrow \infty$ при решении задачи (5.4)–(5.6) с точностью до 1% происходит по коэффициенту трения при $x \geq 20 \ln$, а по тепловому потоку — при $x > 10 \ln$. На фиг. 4 приведены распределения теплового потока $q_0 = q \sqrt{\text{Re}} / (\rho_\infty U_\infty^3)^{-1}$ и коэффициента трения $\tau_2 = \tau_x \sqrt{\text{Re}} / (\rho_\infty U_\infty^2)$ вдоль поверхности крыла для различных теорий и при различных значениях числа Re (или \ln), при которых в окрестности затупления реализуется классический пограничный слой. Кривые *a* соответствуют теории пограничного слоя с вихревым взаимодействием, кривые *б* — теории вязкого ударного слоя. Кривые 1 и 2 показывают распределение коэффициента трения τ_2 , кривые 3 и 4 — теплового потока q_0 . При этом кривые 1 и 3 соответствуют значению параметра $\text{Re} = 10^4$ ($\ln = 10^{2,5}$), а кривые 2 и 4 — $\text{Re} = 10^3$ ($\ln = 10^{1,5}$).

Сравнивая результаты этих теорий и теории классического пограничного слоя, можно заключить, что область вихревого взаимодействия на боковой поверхности лежит приблизительно в пределах $\ln/25 \leq x \leq K/30$. В этой области происходит увеличение теплового потока и коэффициента трения по сравнению с их погранслойными значениями примерно на 12 и 25% соответственно.



Фиг. 3



Фиг. 4

В режиме вихревого взаимодействия в критической точке для теплового потока можно предложить следующую аппроксимационную формулу:

$$q_1 \approx \sqrt{C_1^2 (\sqrt{\text{In}} - C_3) \sqrt{\text{In}} + C_2^2}$$

$$\frac{q_1}{\sqrt{\text{In}}} \xrightarrow{\text{In} \rightarrow \infty} C_1, \quad q_1 \xrightarrow{\text{In} \rightarrow 0} C_2$$

Здесь C_3 выбирается для лучшей аппроксимации при конечных значениях In . Для указанных выше значений определяющих параметров $C_1^2 \approx 0,198$; $C_2^2 \approx 0,261$; $C_3 \approx 0,4$ и погрешность формулы в интервале $1 < \text{In} < \infty$ — не более 3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bush W.* On the viscous hypersonic blunt body problems // *J. Fluid mech.* 1964. V. 20. Pt 3. P. 353–367.
2. *Ермак Ю. Н., Нейланд В. Я.* К расчету теплопередачи на лобовой поверхности затупленного тела в гиперзвуковом потоке // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1967. № 6.
3. *Ермак Ю. Н., Нейланд В. Я.* Влияние вязкости на отход ударной волны при обтекании цилиндра гиперзвуковым потоком // *Уч. зап. ЦАГИ.* 1971. Т. 2. № 6.
4. *Мурзинов И. Н.* Ламинарный пограничный слой на затупленных телах с учетом завихренности внешнего потока // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1966. № 6. С. 124–129.
5. *Лунев В. В.* Метод среднemasовых величин для пограничного слоя во внешнем потоке с поперечной неоднородностью // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1967. № 1. С. 127–133.
6. *Землянский Б. А., Шманенкова Г. А.* Метод среднemasовых величин для трехмерного пограничного слоя в завихренном потоке // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1981. № 4. С. 80–87.
7. *Землянский Б. А., Лунев В. В., Маринин В. П.* Влияние завихренности на теплообмен при гиперзвуковом обтекании тупых тел // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1981. № 2.
8. *Елькин Ю. Г., Ермак Ю. Н., Липатов И. И., Нейланд В. Я.* К теории вихревого взаимодействия на затупленном конусе // *Уч. зап. ЦАГИ.* 1982. Т. 13. № 3.
9. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
10. *Гершбейн Э. А.* Асимптотическое исследование задачи пространственного гиперзвукового обтекания вязким газом затупленных тел с проницаемой поверхностью // *Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений.* М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 29–51.
11. *Петухов И. Г.* Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // *Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы.* М.: Наука, 1964. С. 304–325.
12. *Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 285 с.
13. *Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А.* Гиперзвуковой вязкий ударный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1979. № 2. С. 91–102.
14. *Гершбейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А.* Численное исследование гиперзвукового вязкого ударного слоя на крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углами атаки и скольжения // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1984. № 2. С. 104–108.

Москва
Томск

Поступила в редакцию
21.X.1986