МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1987

УДК 532.72

МАССООБМЕН КАПЕЛЬ И ЧАСТИЦ С ПОТОКОМ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНОЙ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

ПОЛЯНИН А. Д., ШЕВЦОВА В. М.

В приближении диффузионного пограничного слоя получено решение внешней задачи о массообмене сферической капли с линейным сдвиговым потоком при протекании объемной химической реакции первого порядка. Предложена простая приближенная формула, позволяющая вычислять среднее число Шервуда на каплю и твердую частицу произвольной формы для любого типа течения при больших числах Пекле во всем диапазоне изменения константы скорости реакции.

Задача о диффузии к сферической капле в поступательном стоксовом потоке при наличии объемной химической реакции первого порядка исследовалась в [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим массообмен сферической частицы (капли) радиуса a с ламинарным потоком жидкости в случае, когда диффундирующее от поверхности частицы вещество испытывает в объеме внешней фазы химическое превращение первого порядка со скоростью $W=KC$, где C — концентрация, K — константа скорости объемной химической реакции.

В безразмерных переменных в сферической системе координат r, θ, φ, связанной с частицей, процесс массопереноса в жидкости описывается следующим уравнением и граничными условиями [2]:

$$\mathrm{Pe}(\mathbf{v}\nabla)c=\Delta c-kc \tag{1.1}$$

$$r=1,\ c=1;\quad r\to\infty,\ c\to0$$

$$c=C/C_s,\quad \mathrm{Pe}=aU/D,\quad k=a^2K/D$$

Здесь C_s — концентрация на поверхности частицы, D — коэффициент диффузии, $\mathbf{v}$ — распределение скоростей жидкости, которое считается известным из решения соответствующей гидродинамической задачи.

Для капель и пузырей общий метод решения задачи (1.1) в приближении диффузионного пограничного слоя описан в [2].

2. Связь стационарных задач с объемной реакцией и нестационарных задач без реакции. Некоторые оценки. Для решения стационарных задач о конвективном массообмене капель и частиц с жидкостью при протекании объемной химической реакции первого порядка удобно использовать результаты решения соответствующих нестационарных задач без объемной реакции. Действительно, рассмотрим задачу

$$\frac{\partial c_*}{\partial t}+\mathrm{Pe}(\mathbf{v}\nabla)c_*=\Delta c_* \tag{2.1}$$

$$t=0,\ c_*=0;\quad r=1,\ c_*=1;\quad r\to\infty,\ c_*\to0$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости жидкости, соответствующий стационарному полю течения.

Применяя к (2.1) преобразование Лапласа — Карлсона (с действительным параметром k)

$$c=k\int_0^\infty \exp(-kt)c_*\,dt \tag{2.2}$$

приходим к стационарной задаче с объемной химической реакцией первого порядка (1.1).

Из формулы (2.2) следует, что среднее число Шервуда

$$\mathrm{Sh}=-\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\theta\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=1} d\theta$$

соответствующее решению задачи (1.1), может быть выражено через вспомогательное число Шервуда Sh_*, которое определяется путем решения нестационарной задачи (2.1), следующим образом:

$$\mathrm{Sh}=k\int_0^\infty \exp(-kt)\,\mathrm{Sh}_*\,dt \tag{2.3}$$

Получим теперь одну полезную оценку, которая понадобится далее. Пусть Sh_* — среднее число Шервуда, соответствующее точному решению вспомогательной задачи (2.1), а Sh_{*1} — приближенное выражение для числа Шервуда, погрешность которого равна δ, т. е.

$$|\mathrm{Sh}_*-\mathrm{Sh}_{*1}|\leqslant\delta \tag{2.4}$$

Применяя к разности $\mathrm{Sh}_1-\mathrm{Sh}_{*1}$ преобразование Лапласа — Карлсона с учетом (2.5), получим неравенство

$$\mathrm{Sh}-\mathrm{Sh}_1=k\int_0^\infty \exp(-kt)\,(\mathrm{Sh}_*-\mathrm{Sh}_{*1})\,dt\leqslant\delta k\int_0^\infty \exp(-kt)\,dt=\delta \tag{2.5}$$

где Sh и Sh_1 — точное и приближенное значения среднего числа Шервуда, соответствующие решению стационарной задачи с объемной химической реакцией первого порядка (1.1).

Оценка (2.5) показывает, что, имея достаточно хорошую приближенную зависимость для вспомогательного числа Шервуда в нестационарной задаче, путем преобразования Лапласа — Карлсона можно получить хорошее приближенное выражение (с той же точностью) для среднего числа Шервуда в стационарной задаче с объемной химической реакцией первого порядка.

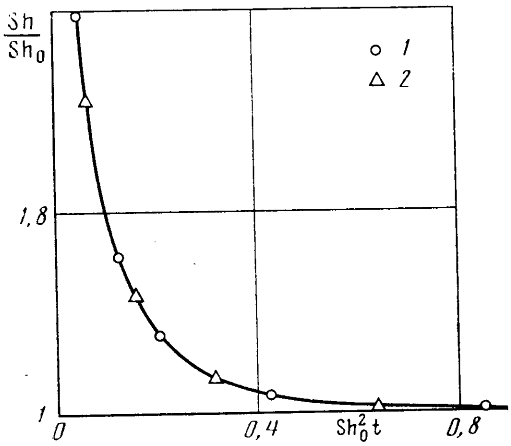
3. Формулы для расчета среднего числа Шервуда. Учитывая сказанное, воспользуемся теперь данными работ [1—10], где рассматривались нестационарные задачи диффузионного пограничного слоя.

В качестве вспомогательного среднего числа Шервуда используем выражение [3]

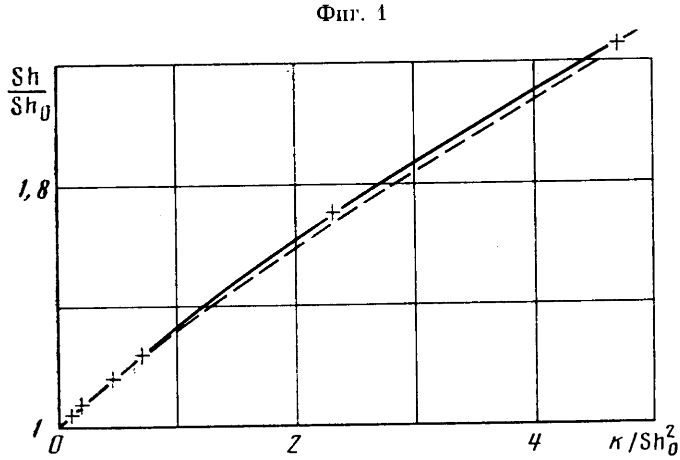
$$\frac{\mathrm{Sh}_*}{\mathrm{Sh}_0}=\sqrt{\mathrm{cth}(\pi\,\mathrm{Sh}_0^2 t)},\qquad \mathrm{Sh}_0=\lim_{t\to\infty}\mathrm{Sh}_* \tag{3.1}$$

где параметр Sh_0 соответствует решению стационарной задачи (2.1) при $\partial/\partial t=0$ (начальное условие в (2.1) опускается).

Из результатов [2, 9] следует, что формула (3.1) является точной для осесимметричного сдвигового обтекания сферической капли (в приближении диффузионного пограничного слоя), где $\mathrm{Sh}_0=0{,}624\sqrt{\mathrm{Pe}}$. Кроме того, приближенное выражение (3.1) хорошо описывает нестационарный массообмен сферической капли [4—6] и твердой частицы [7, 8] в поступательном стоксовом потоке. На фиг. 1 сплошной линией показана зависимость (3.1); точки *1* — данные [4—6], *2* — [7]. В таблице указана максимальная погрешность формулы (3.1) в случае нестационарного массообмена сферических капель, пузырей и твердых частиц для различного рода течений (ПДПС — приближение диффузионного пограничного слоя).



Фиг. 1



Фиг. 2

Видно, что выражение (3.1) может быть использовано для расчета среднего числа Шервуда в нестационарных задачах (2.1).

Применяя теперь к формуле (3.1) преобразование Лапласа — Карлсона, получим приближенное решение ряда соответствующих стационарных задач (1.1) с объемной химической реакцией первого порядка в виде

$$\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Sh}_0}=\Phi\left(\frac{k}{\mathrm{Sh}_0^2}\right),\qquad \Phi(x)=x\int_0^\infty \exp(-x\tau)\sqrt{\operatorname{cth}(\pi\tau)}\,d\tau \tag{3.2}$$

где Sh_0 — среднее число Шервуда при отсутствии объемной химической реакции ($k=0$).

Приближенное выражение (3.2) правильно отражает структуру зависимости среднего числа Шервуда от комплекса k/Sh_0^2 при больших числах Пекле (в приближении диффузионного пограничного слоя). При $k\to 0$ формула (3.2) дает точный результат $\mathrm{Sh}\to\mathrm{Sh}_0$. В другом предельном случае

Тип частиц	Вид течения	Метод решения	Погрешность, %	Литература
Капля, пузырь	Осесимметричный сдвиговый стоксовый поток	Аналитический, ПДПС	0	[2, 9]
» »	Поступательный стоксовый поток	» »	0,6	[4–6]
Пузырь	Ламинарный поступательный поток при больших числах Рейнольдса	» »	0,6	[5, 6]
Частица	Поступательный поток идеальной (невязкой) жидкости	» »	0,6	[5, 6]
Твердая частица	Поступательный стоксовый поток	Интерполяция результатов [8]	1,4	[7]
Капля, пузырь	Трехмерный сдвиговый стоксовый поток	Аналитический, ПДПС	1,8	[3]
» »	Течение формируется за счет электрического поля	» »	0	[10]
Твердая частица	Поступательный стоксовый поток	Конечно-разностный численный метод (при $Pe=500$)	4	[11]

$k \to \infty$ ($Pe=\text{const}$) из выражения (3.2) получаем правильный асимптотический результат $Sh \to \sqrt{k}$ [2]. Формула (3.2) обеспечивает точный асимптотический результат также при $Pe \to \infty$ ($k=\text{const}$), так как в этом случае имеем $Sh_0 \to \infty$ и $Sh \to Sh_0$.

На фиг. 2 показана зависимость (3.2). Точки соответствуют решению задачи о массообмене сферической капли с поступательным стоксовым потоком, полученному другим способом в [12] (см. также [1]). Для осесимметричного сдвигового обтекания сферической капли формула (3.2) является точной. Максимальную погрешность выражения (3.2) для некоторых других случаев массообмена капель, пузырей и твердых частиц в различных потоках при наличии объемной химической реакции первого порядка можно оценить, используя таблицу с учетом результатов разд. 2. В частности, из таблицы следует, что решение трехмерной задачи о диффузии к сферической капле в плоском сдвиговом потоке приводит к зависимости для среднего числа Шервуда, которая отличается от (3.2) менее чем на 1,8%.

Для приближенных расчетов среднего числа Шервуда можно использовать следующее простое выражение:

$$Sh=\sqrt{k}\,\operatorname{cth}(\sqrt{k}/Sh_0) \tag{3.3}$$

которое отличается от (3.2) менее чем на 2%. Зависимость (3.3) показана на фиг. 2 штриховой линией.

Отметим также, что максимальное отличие корня кубического уравнения

$$Sh^3-k\,Sh-Sh_0^3=0 \tag{3.4}$$

от (3.2) составляет $<1\%$.

Таким образом, показано, что соотношения (3.2)–(3.4) можно использовать для приближенного определения среднего числа Шервуда в задачах о массообмене капель, частиц и пузырей в потоках различного типа при протекании объемной химической реакции первого порядка при больших числах Пекле. Напомним, что параметр Sh_0 соответствует среднему числу Шервуда в аналогичных более простых задачах при $k=0$, т.е. при отсутствии объемной реакции.

Замечание. Для капель и частиц несферической формы в выражениях (3.2)–(3.4) среднее число Шервуда следует определять по формуле

$\mathrm{Sh}=I/S$, где I — безразмерный интегральный (полный) диффузионный поток на частицу, S — безразмерная площадь поверхности частицы. В этом случае приближенные формулы (3.2)—(3.4) будут обеспечивать правильный асимптотический результат в трех предельных случаях: 1) $k\to 0$ ($\mathrm{Pe}=\mathrm{const}$); 2) $k\to\infty$ ($P=\mathrm{const}$); 3) $\mathrm{Pe}\to\infty$ ($k=\mathrm{const}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов В. С.* Диффузионный пограничный слой на поверхности движущейся капли при наличии объемной химической реакции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 146–149.
2. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.
3. *Полянин А. Д., Шевцова В. М.* О нестационарном массообмене капли (пузыря) в трехмерном сдвиговом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 111–119.
4. *Левич В. Г., Крылов В. С., Воротилин В. П.* К теории нестационарной диффузии из движущейся капли // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. № 3. С. 648–651.
5. *Chao B. T.* Transient heat and mass transfer to a translating droplet // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat. Transfer. 1969. V. 91. № 2. P. 273–291.
6. *Ruckenstein E.* Mass transfer between a single drop and a continuous phase // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1967. V. 10. № 12. P. 1785–1792.
7. *Clift R., Grace J. R., Weber M. E.* Bubbles, drops and particles // New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1978. 380 p.
8. *Konoplin N., Sparrow E. M.* Unsteady heat transfer and temperature for Stokesian flow about a sphere // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1972. V. 94. № 3. P. 266–272.
9. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Прядкин П. А., Рязанцев Ю. С.* О нестационарном массообмене капли в потоке вязкой жидкости // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 441–449.
10. *Morrison F. A.* Transient heat and mass transfer to a drop in a electric field // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1977. V. 99. № 2. P. 269–274.
11. *Броунштейн Б. И., Фишбейн Г. А.* Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л.: Химия, 1977. 279 с.
12. *Головин А. М., Животягин А. Ф.* Влияние объемной химической реакции на массоперенос внутри капли при больших числах Пекле // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1979. № 4. С. 77–83.

Москва

Поступила в редакцию 16.X.1986