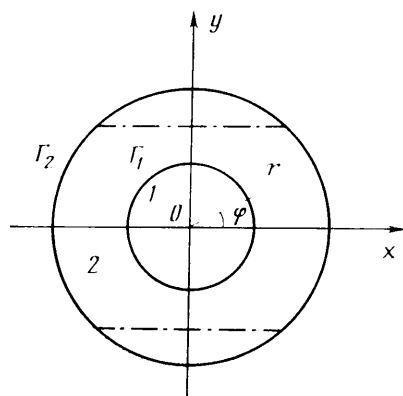


УДК 532.63+681.7.068.2

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КАПИЛЛЯРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

ЕНТОВ В. М., ЯРИН А. Л.

В [1] предложен метод получения двухслойных световодов (стекловолокон) с некруглым сердечником, основанный на использовании сил поверхностного натяжения. Для этого берется двухслойная стеклянная заготовка с сердечником кругового сечения и оболочкой, имеющей внешнюю границу в форме окружности. Граница сердечника и оболочки, а также внешняя граница заготовки показаны на фиг. 1 сплошными линиями: 1 — материал сердечника, 2 — материал оболочки. Часть оболочки удаляется вдоль образующей, как, к примеру, показано на фиг. 1 штрихпунктиром. После этого заготовку нагревают, и материал становится достаточно жидким. Силы поверхностного натяжения стремятся вернуть при этом внешней границе сечения заготовки  $\Gamma_2$  форму окружности. Поскольку коэффициент межфазного натяжения  $\alpha_1$  на границе  $\Gamma_1$  оболочки и сердечника существенно меньше коэффициента поверхност-



Фиг. 1

ного натяжения  $\alpha_2$  на границе  $\Gamma_2$  заготовки, существует достаточно продолжительный период времени, в течение которого граница  $\Gamma_2$  уже представляет собой почти окружность, а  $\Gamma_1$  деформирована в результате течения материала и еще далека по форме от окружности (отметим, что на фиг. 1 показаны лишь начальные конфигурации границ). Если в этот период заготовку охладить, то она будет иметь круглое общее сечение и сердечник некругового сечения, форма которого практически сохранится в дальнейшем при вытягивании заготовки в волокно. В ряде случаев профилирование сердечника осуществляется непосредственно в процессе вытягивания волокна из заготовки. Количественное описание этого процесса, насколько известно, отсутствует. Между тем возникающая задача допускает строгую формулировку в рамках капиллярной гидродинамики стоковского течения и может быть достаточно полно рассмотрена, если ограничиться линейным приближением.

Рассмотрим сперва эволюцию сечения заготовки, не подвергающейся вытягиванию. Жидкий материал (стекло) будем считать очень вязкой ньютоновской жидкостью [2]. Тогда вязкие силы доминируют над инерционными и течение допустимо рассматривать в безынерционном (стоксовом) приближении. Задача является плоской, и ее решение не зависит от осевой координаты  $z$ . Вводя полярные координаты  $r$  и  $\varphi$  (см. фиг. 1), имеем уравнения Стокса в каждой из областей 1 и 2 в виде [3, 4]

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) &= 0 \\
-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \quad v_z = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $p$  — давление,  $v_r$ ,  $v_\varphi$  и  $v_z$  — компоненты вектора скорости,  $\mu$  — вязкость (различная, вообще говоря, в областях 1 и 2).

Решение задачи должно быть ограниченным при  $r=0$ , периодическим по  $\varphi$  и удовлетворять кинематическим и динамическим условиям на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Представим границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в виде

$$r_i = r_i(\varphi) = R_i + \zeta_i^* = R_i(1 + \zeta_i), \quad i=1, 2$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы «невозмущенных» окружностей.

При этом кинематические и динамические граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned}
\Gamma_1: \quad v_{r1} &= \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial t} + \frac{v_{\varphi 1}}{1 + \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi}, \quad \Gamma_2: \quad v_{r2} = \frac{\partial \zeta_2^*}{\partial t} + \frac{v_{\varphi 2}}{1 + \zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varphi} \\
\Gamma_1: \quad v_{r1} &= v_{r2}, \quad \Gamma_1: \quad v_{\varphi 1} = v_{\varphi 2} \\
\Gamma_1: \quad \sigma_{nn1} &= \sigma_{nn2} - q_{\alpha 1}, \quad \Gamma_2: \quad \sigma_{nn2} = -q_{\alpha 2} \\
\Gamma_1: \quad \sigma_{n\tau 1} &= \sigma_{n\tau 2}, \quad \Gamma_2: \quad \sigma_{n\tau 2} = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь индексами 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к области сердечника и оболочки соответственно;  $q_{\alpha 1}$  и  $q_{\alpha 2}$  — капиллярные давления на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , представляющие собой, согласно формуле Лапласа, произведение межфазного (или поверхностного) натяжения на сумму главных кривизн соответствующей граничной поверхности;  $\sigma_{nn}$  и  $\sigma_{n\tau}$  — напряжения в жидком материале (индекс  $n$  отвечает нормали к границе,  $\tau$  — касательной).

Вводя функцию тока  $\psi$  ( $v_r = r^{-1} \partial \psi / \partial \varphi$ ,  $v_\varphi = -\partial \psi / \partial r$ ), преобразуем уравнения (1) к виду

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \varphi^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \varphi} \right) &= 0 \\
-\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left( -r \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Исключая из (3) давление, получаем бигармоническое уравнение для  $\psi$

$$\begin{aligned}
\Delta \Delta \psi &= \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \\
&\quad - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \varphi^4} = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Его общее решение ищем в виде ряда Фурье ( $Q$  — постоянная)

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) (A_n^* \sin n\varphi + B_n^* \cos n\varphi) + f_0(r) (1 + Q\varphi) \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получаем (штрихом обозначена производная по  $r$ )

$$r^4 f_n^{IV} + 2r^3 f_n''' - r^2 f_n'' (1 + 2n^2) + r f_n' (1 + 2n^2) + (n^4 - 4n^2) f_n = 0 \tag{6}$$

Уравнение (6) является уравнением Эйлера с общим решением вида

$$\begin{aligned} f_0(r) &= N_1 + N_2 \ln r + N_3 r^2 + N_4 r^2 \ln r \\ f_1(r) &= C_{11} * r^3 + C_{21} * r + C_{31} * r^{-1} + C_{41} * r \ln r \\ f_n(r) &= C_{1n} * r^{n+2} + C_{2n} * r^n + C_{3n} * r^{-n} + C_{4n} * r^{-n+2}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (7)$$

где  $C_{1n} * - C_{4n} *$ ,  $N_1 - N_4$  — произвольные постоянные.

С учетом (5) и (7) после очевидных переобозначений находим функции тока в областях 1 и 2

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} (r^{n+2} + C_{2n1} r^n + C_{3n1} r^{-n} + C_{4n1} r^{-n+2}) [A_n(t) \sin n\varphi - B_n(t) \cos n\varphi] + \\ &+ (r^3 + C_{211} r + C_{311} r^{-1} + C_{411} r \ln r) [A_1(t) \sin \varphi - B_1(t) \cos \varphi] + \\ &+ (N_{11} + N_{21} \ln r + N_{31} r^2 + N_{41} r^2 \ln r) (1 + Q_1 \varphi) \\ \psi_2 &= \sum_{n=2}^{\infty} (r^{n+2} + C_{2n2} r^n + C_{3n2} r^{-n} + C_{4n2} r^{-n+2}) [D_n(t) \sin n\varphi - E_n(t) \cos n\varphi] + \\ &+ (r^3 + C_{212} r + C_{312} r^{-1} + C_{412} r \ln r) [D_1(t) \sin \varphi - E_1(t) \cos \varphi] + \\ &+ (N_{12} + N_{22} \ln r + N_{32} r^2 + N_{42} r^2 \ln r) (1 + Q_2 \varphi) \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь подчеркнута зависимость коэффициентов ряда Фурье  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $D_n$  и  $E_n$  от времени  $t$ , входящего в краевые условия (2).

Вследствие требования периодичности функции  $\psi$  по  $\varphi$  постоянные  $Q_1$  и  $Q_2$  в (8) равны нулю. Поскольку функция  $\psi_1$  ограничена при  $r=0$ , в (8)  $C_{3n1} = N_{21} = 0$  для  $n \geq 1$ . Функция  $v_{\varphi 1}$  также ограничена при  $r=0$ . Следовательно, с учетом связи  $v_{\varphi}$  с  $\psi$  и (8)  $C_{4n1} = 0$  для  $n \geq 1$ . Из третьего условия (2) следует, что  $\psi_1 = \psi_2$  на  $\Gamma_1$ ; это с использованием (8) при  $r=r_1(\varphi)$  дает  $N_{11} = N_{12}$ ,  $N_{22} = 0$ ,  $N_{31} = N_{32} = -\omega/2$ ,  $N_{41} = N_{42}$ . Видно, что  $\omega$  — угловая скорость вращения заготовки как твердого тела вокруг ее оси. В безынерционном приближении (значения  $\omega$  должны быть достаточно малы) наличие такого вращения не может повлиять на форму границ. Поэтому без ограничения общности будем считать  $\omega=0$ . По той же причине  $N_{41} = N_{42} = 0$ . Так как функция тока определена с точностью до произвольной постоянной, можем считать, что  $\psi_1 = 0$  при  $r=0$  и, следовательно,  $N_{11} = N_{12} = 0$ .

Таким образом, из (8) получаем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} (r^{n+2} + C_{2n1} r^n) [A_n(t) \sin n\varphi - B_n(t) \cos n\varphi] + (r^3 + C_{211} r) \times \\ &\times [A_1(t) \sin \varphi - B_1(t) \cos \varphi] \\ \psi_2 &= \sum_{n=2}^{\infty} (r^{n+2} + C_{2n2} r^n + C_{3n2} r^{-n} + C_{4n2} r^{-n+2}) [D_n(t) \sin n\varphi - E_n(t) \cos n\varphi] + \\ &+ (r^3 + C_{212} r + C_{312} r^{-1} + C_{412} r \ln r) [D_1(t) \sin \varphi - E_1(t) \cos \varphi] \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнения (3), находим давление

$$p_1 = \mu_1 \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi] 4(n+1)r^n + K_1$$

$$p_2 = \mu_2 \sum_{n=2}^{\infty} [D_n \cos n\varphi + E_n \sin n\varphi] [4(n+1)r^n + C_{4n2}4(n-1)r^{-n}] + \mu_2 [D_1 \cos \varphi + E_1 \sin \varphi] (8r - 2C_{412}r^{-1}) + K_2 \quad (10)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — константы (здесь и далее, как и в (9), подразумевается зависимость коэффициентов  $A_n, B_n, \dots$  от  $t$ ).

Линеаризуем задачу, считая  $\xi_i \ll 1$  и пренебрегая малыми высших порядков. Тогда граничные условия (2) и выражения для капиллярного давления сводятся к виду

$$\begin{aligned} \Gamma_1: \quad v_{r1} &= \frac{\partial \xi_1^*}{\partial t}, \quad \Gamma_2: \quad v_{r2} = \frac{\partial \xi_2^*}{\partial t} \\ \Gamma_1: \quad v_{r1} &= v_{r2}, \quad \Gamma_1: \quad v_{\varphi 1} = v_{\varphi 2} \\ \Gamma_1: \quad \sigma_{rr1} &= \sigma_{rr2} - q_{\alpha 1}, \quad \Gamma_2: \quad \sigma_{rr2} = -q_{\alpha 2} \\ \Gamma_1: \quad \sigma_{r\varphi 1} &= \sigma_{r\varphi 2}, \quad \Gamma_2: \quad \sigma_{r\varphi 2} = 0 \\ q_{\alpha i} &= \frac{\alpha_i}{R_i} (1 - \xi_i) - \frac{\alpha_i}{R_i} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial \varphi^2}, \quad i=1, 2 \end{aligned} \quad (11)$$

Напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{r\varphi}$  определяются выражениями

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \quad (12)$$

Представим возмущения границ в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{b_{01}(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n1}(t) \sin n\varphi + b_{n1}(t) \cos n\varphi] \\ \xi_2 &= \frac{b_{02}(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n2}(t) \sin n\varphi + b_{n2}(t) \cos n\varphi] \end{aligned} \quad (13)$$

Вычисляя с помощью (9) скорости  $v_r$ , из первых трех условий (11) с учетом (13) находим

$$b_{01} = b_{010} = \text{const}, \quad b_{02} = b_{020} = \text{const} \quad (14)$$

Здесь дополнительный индекс 0 соответствует начальному моменту  $t = 0$ . Для  $n \geq 1$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{nR_1^n} \frac{db_{n1}}{dt} &= A_n + A_{2n}R_1^{-2} \\ \frac{1}{nR_2^n} \frac{db_{n2}}{dt} &= D_n + D_{2n}R_2^{-2} + D_{3n}R_2^{-2n-2} + D_{4n}f_1(R_2, n) \\ \frac{1}{nR_1^n} \frac{db_{n1}}{dt} &= D_n + D_{2n}R_1^{-2} + D_{3n}R_1^{-2n-2} + D_{4n}f_1(R_1, n) \end{aligned} \quad (15)$$

$$f_1(R_k, 1) = R_k^{-2} \ln R_k, \quad f_1(R_k, n) = R_k^{-2n}, \quad n \geq 2$$

Здесь введены обозначения

$$A_{2n} = C_{2n1}A_n, \quad D_{2n} = C_{2n2}D_n \quad (16)$$

$$D_{3n} = C_{3n2} D_n, \quad D_{4n} = C_{4n2} D_n$$

Кроме того, имеются соотношения, получающиеся из (14)–(16) заменой  $b_{n1}, b_{n2}, A_n, A_{2n}, D_n, D_{2n}, D_{3n}, D_{4n}$  на  $a_{n1}, a_{n2}, B_n, B_{2n}, E_n, E_{2n}, E_{3n}$  и  $E_{4n}$  соответственно; далее такие соотношения будем называть парными.

Четвертое условие (11) дает для  $n \geq 1$

$$A_n(n+2) + nA_{2n}R_1^{-2} = D_n(n+2) + nD_{2n}R_1^{-2} - nD_{3n}R_1^{-2n-2} + D_{4n}f_2(R_1, n) \quad (17)$$

$$f_2(R_1, 1) = R_1^{-2}(\ln R_1 + 1), \quad f_2(R_1, n) = R_1^{-2n}(-n+2), \quad n \geq 2$$

и соответствующее ему парное соотношение.

С помощью шестого условия (11) с использованием (9), (10), выражения для  $q_{\alpha i}$  в (11) и (12) находим, что  $K_2 = \alpha_2/R_2$ , и для  $n \geq 1$  имеем

$$\begin{aligned} \mu_2 [D_n R_2^n (-4 - 2n + 2n^2) + R_2^{n-2} D_{2n} (-2n + 2n^2) + R_2^{-n-2} D_{3n} (-2n - 2n^2) + \\ + D_{4n} f_3(R_2, n)] = \frac{\alpha_2}{R_2} (1 - n^2) b_{n2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$f_3(R_k, 1) = 4R_k^{-1}, \quad f_3(R_k, n) = R_k^{-n}(4 - 2n - 2n^2), \quad n \geq 2$$

с соответствующим парным соотношением.

Аналогично используя пятое условие (11), получаем, что  $K_1 = \alpha_1/R_1 + \alpha_2/R_2$ , и для  $n \geq 1$  находим

$$\begin{aligned} \mu_1 [R_1^n A_n (-4 - 2n + 2n^2) + A_{2n} R_1^{n-2} (-2n + 2n^2)] = \\ = \mu_2 [D_n R_1^n (-4 - 2n + 2n^2) + D_{2n} R_1^{n-2} (-2n + 2n^2) + \\ + D_{3n} R_1^{-n-2} (-2n - 2n^2) + D_{4n} f_3(R_1, n)] + \frac{\alpha_1}{R_1} (1 - n^2) b_{n1} \end{aligned} \quad (19)$$

с соответствующим парным соотношением.

Восьмое условие (11) дает для  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} D_n R_2^n (-2n^2 - 2n) + D_{2n} R_2^{n-2} (-2n^2 + 2n) + D_{3n} R_2^{-n-2} (-2n^2 - 2n) + \\ + D_{4n} R_2^{-n} (-2n^2 + 2n) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

а также парное ему соотношение.

Наконец, седьмое условие (11) приводит для  $n \geq 1$  к равенству

$$\begin{aligned} \mu_2 [D_n R_1^n (-2n^2 - 2n) + D_{2n} R_1^{n-2} (-2n^2 + 2n) + D_{3n} R_1^{-n-2} (-2n^2 - 2n) + \\ + D_{4n} R_1^{-n} (-2n^2 + 2n)] = \mu_1 [A_n R_1^n (-2n^2 - 2n) + A_{2n} R_1^{n-2} (-2n^2 + 2n)] \end{aligned} \quad (21)$$

и к парному соотношению.

Соотношения (15), (17)–(21) образуют систему восьми уравнений относительно восьми неизвестных:  $b_{n1}, b_{n2}, A_n, A_{2n}, D_n, D_{2n}, D_{3n}, D_{4n}$ . В случае  $n=1$  эта система дает

$$b_{11} = b_{110} = \text{const}, \quad b_{12} = b_{120} = \text{const} \quad (22)$$

а при  $n \geq 2$ , последовательно исключая  $D_n, D_{2n}, D_{3n}, D_{4n}$ , а затем  $A_n, A_{2n}$ , сводим систему к двум дифференциальным уравнениям для определения коэффициентов  $b_{n1}$  и  $b_{n2}$

$$\begin{aligned} k_1 \frac{db_{n1}}{dt} + k_2 \frac{db_{n2}}{dt} + k_3 b_{n2} + k_4 b_{n1} = 0 \\ k_5 \frac{db_{n1}}{dt} + k_6 \frac{db_{n2}}{dt} + k_7 b_{n2} + k_8 b_{n1} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{R_2}{R_1}, \quad G_n(\gamma) = (1 - \gamma^{2-2n} - \gamma^2 + \gamma^{-2n})^{-1} \\
 S_1 &= \frac{\mu_1}{\mu_2} (-4 - 2n + 2n^2), \quad S_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} (-2n + 2n^2) \\
 S_3 &= G_n(\gamma) n^{-1} [\gamma^{-2n} (-4 - 2n + 2n^2) - \gamma^{2-2n} (-2n + 2n^2) + \gamma^2 (2n + 2n^2) + \\
 &\quad + 4 - 2n - 2n^2] \\
 S_4 &= G_n(\gamma) 2n^{-1} (\gamma^{2-3n} - 2n\gamma^{2-n} + 2n\gamma^{-n} + 2n^3\gamma^{2-n} - n^3\gamma^{-n} - n^3\gamma^{4-n} - \gamma^{n+2}) \\
 S_5 &= -G_n(\gamma) \frac{\alpha_2}{R_2\mu_2} (\gamma^{2-3n} - 2\gamma^{-n} + n^2\gamma^{-n} - n^2\gamma^{4-n} + \gamma^{n+2}) \\
 S_6 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\alpha_2}{\mu_2 R_2} \gamma (1 - n^2) \\
 S_7 &= \frac{\mu_1}{\mu_2} (-2n^2 - 2n), \quad S_8 = \frac{\mu_1}{\mu_2} (-2n^2 + 2n) \\
 S_9 &= G_n(\gamma) n^{-1} [2n - 2n^2 + \gamma^{2-2} (-2n + 2n)^2 - \gamma^{-2n} (2n^2 + 2n) + \gamma^2 (2n^2 + 2n)] \quad (24) \\
 S_{10} &= G_n(\gamma) 2n^{-1} (n\gamma^{2-3n} + n^2\gamma^{-n} - n^2\gamma^{4-n} - n\gamma^{n+2}) \\
 S_{11} &= -G_n(\gamma) \frac{\alpha_2}{R_2\mu_2} (n\gamma^{2-3n} - n\gamma^{-n} - n\gamma^{4-n} + n\gamma^{n+2}) \\
 S_{12} &= G_n(\gamma) n^{-1} [(n+2)\gamma^{-2n} - n\gamma^{2-2n} + n\gamma^2 - n + 2] \\
 S_{13} &= G_n(\gamma) n^{-1} (2n^2\gamma^{2-n} - n^2\gamma^{-n} - \gamma^{2-3n} - 2\gamma^{2-n} - n^2\gamma^{4-n} - \gamma^{n+2}) \\
 S_{14} &= G_n(\gamma) \frac{\alpha_2}{2R_2\mu_2} (-n\gamma^{-n} + \gamma^{2-3n} - n\gamma^{4-n} - \gamma^{n+2}) \\
 k_1 &= 2(S_3S_8 - S_2S_9) - (S_{12} - 1)(S_1S_8 - S_2S_7) \\
 k_2 &= 2(S_4S_8 - S_2S_{10}) - S_{13}(S_1S_8 - S_2S_7) \\
 k_3 &= 2(S_5S_8 - S_2S_{11}) - S_{14}(S_1S_8 - S_2S_7) \\
 k_4 &= 2S_6S_8 \\
 k_5 &= 2(S_1S_9 - S_3S_7) - \left(\frac{n+2}{n} - S_{12}\right)(S_1S_8 - S_2S_7) \\
 k_6 &= 2(S_1S_{10} - S_4S_7) + S_{13}(S_1S_8 - S_2S_7) \\
 k_7 &= 2(S_1S_{11} - S_5S_7) + S_{14}(S_1S_8 - S_2S_7) \\
 k_8 &= -2S_6S_7
 \end{aligned}$$

Решая систему (23) и вводя обозначения

$$\begin{aligned}
 l_{11} &= \frac{k_2k_7 - k_3k_6}{k_1k_6 - k_2k_5}, \quad l_{12} = \frac{k_2k_8 - k_4k_6}{k_1k_6 - k_2k_5} \\
 l_{21} &= \frac{k_3k_5 - k_1k_7}{k_1k_6 - k_2k_5}, \quad l_{22} = \frac{k_4k_5 - k_1k_8}{k_1k_6 - k_2k_5}
 \end{aligned} \quad (25)$$

получаем для  $n \geq 2$  в случае, когда  $\alpha_1 \neq 0$  (и, следовательно,  $l_{22} \neq 0$ )

$$\begin{aligned}
 b_{n1} &= \frac{P^+(m^+ - l_{21})}{l_{22}} \exp(m^+t) + \frac{P^-(m^- - l_{21})}{l_{22}} \exp(m^-t) \\
 b_{n2} &= P^+ \exp(m^+t) + P^- \exp(m^-t)
 \end{aligned} \quad (26)$$

$$m^{\pm} = \frac{l_{21} + l_{12}}{2} \pm \left[ \frac{(l_{21} + l_{12})^2}{4} + l_{22}l_{11} - l_{21}l_{12} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Постоянные  $P^+$  и  $P^-$  определяются начальными возмущениями границ  $\xi_1$  и  $\xi_2$  (при  $t=0$ ), фурье-коэффициенты для которых, обозначаемые, как и в (14), дополнительным индексом 0, известны. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} P^+ &= \frac{b_{n20}(m^- - l_{21}) - b_{n10}l_{22}}{m^- - m^+} \\ P^- &= \frac{b_{n10}l_{22} - b_{n20}(m^+ - l_{21})}{m^- - m^+} \end{aligned} \quad (27)$$

В частном случае  $\alpha_1=0$  ( $l_{22}=0$ ) коэффициенты  $b_{n2}$  вычисляются по-прежнему с помощью (26) и (27), а  $b_{n1}$  — по формуле

$$b_{n1} = b_{n10} + b_{n20} \frac{l_{11}}{l_{21}} [\exp(l_{21}t) - 1], \quad n \geq 2 \quad (28)$$

Из парных к (15), (17)–(21) соотношений находятся коэффициенты  $a_{n1}$  и  $a_{n2}$ . Выражениями для них будут (14), (22), (26)–(28) с заменой  $b_{n1}$  и  $b_{n2}$  на  $a_{n1}$  и  $a_{n2}$  соответственно.

Отметим, что из решения задачи о двухслойной заготовке (14), (22), (24)–(28) в случае  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\alpha_1 = 0$ , естественно, получается решение для однослойной заготовки

$$a_{02} = a_{020}, \quad b_{02} = b_{020}$$

$$a_{12} = a_{120}, \quad b_{12} = b_{120}$$

$$n \geq 2, \quad a_{n2} = a_{n20} \exp\left(-\frac{\alpha_2 n}{2\mu_2 R_2} t\right), \quad b_{n2} = b_{n20} \exp\left(-\frac{\alpha_2 n}{2\mu_2 R_2} t\right)$$

Рассмотрим, как изменится построенное ранее решение в случае одноосного однородного растяжения заготовки в волокно одновременно с профилированием сердечника. Будем считать, что вдоль оси волокна  $z$  имеется скорость  $v_z$ , такая, что  $\partial v_z / \partial z = \dot{\gamma}_0(t)$ ,  $\partial v_z / \partial r = \partial v_z / \partial \varphi = 0$  и, кроме того,  $\partial v_r / \partial z = \partial v_\varphi / \partial z = 0$ . Соответственно проекции уравнения количества движения из (1) останутся без изменения; к ним добавится проекция уравнения количества движения на ось  $z$ , имеющая в данном случае вид  $\partial p / \partial z = 0$ . Уравнение неразрывности в случае однородного одноосного растяжения будет иметь вид

$$\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + r \dot{\gamma}_0 = 0$$

Можно убедиться, что все уравнения и граничные условия удовлетворяются, если к скоростям  $v_{r1}$  и  $v_{r2}$ , определяемым с помощью (3) и (10), прибавить слагаемые  $(-r\dot{\gamma}_0/2)$ , оставляя  $v_{\varphi 1}$  и  $v_{\varphi 2}$  без изменения. Причем теперь

$$R_1 = R_{10} \exp\left[-\frac{1}{2} \int_0^t \dot{\gamma}_0(t'') dt''\right], \quad R_2 = R_{20} \exp\left[-\frac{1}{2} \int_0^t \dot{\gamma}_0(t'') dt''\right]$$

где  $R_{10}$  и  $R_{20}$  — значения при  $t=0$ .

Кроме того, имеем

$$K_1 = \frac{\alpha_1}{R_1} + \frac{\alpha_2}{R_2} - \mu_1 \dot{\gamma}_0, \quad K_2 = \frac{\alpha_2}{R_2} - \mu_2 \dot{\gamma}_0$$

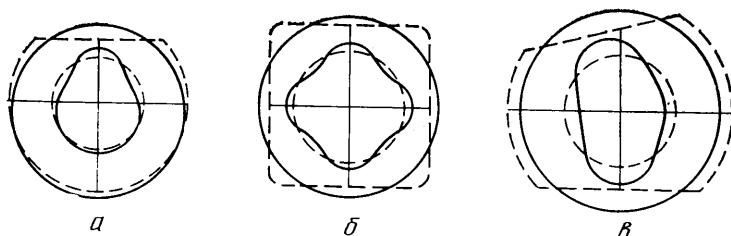
Основная система дифференциальных уравнений, к которой сводится задача, сохранит свой вид (23). Необходимо только учесть, что теперь  $\gamma = R_{20}/R_{10}$ , вместо  $R_2$  в выражениях для  $S_5$ ,  $S_6$ ,  $S_{11}$  и  $S_{12}$  в (24) будем иметь

$R_{20}$ , а вместо  $t$  в (23)

$$t_1 = \int_0^t \exp\left[\frac{1}{2} \int_0^{t'} \dot{\gamma}_0(t'') dt''\right] dt'$$

В рассматриваемом случае коэффициенты рядов Фурье зависят экспоненциально не от  $t$ , а от  $t_1$ .

Таким образом, решением задачи будет (14), (22), (24)–(28) с заменой  $t$  на  $t_1$ , с  $\gamma=R_{20}/R_{10}$  и  $R_{20}$  вместо  $R_2$  в выражениях (24) для  $S_5, S_6, S_{11}$  и  $S_{17}$ . Следовательно, размеры профилированного сердечника в волокне,



Фиг. 2

отнесенные, скажем, к  $R_2$ , будут такими же, как размеры профилированного сердечника в заготовке (без растяжения), отнесенные к  $R_2 \equiv R_{20}$ . Изменится лишь время достижения такой формы.

Этот же вывод относится к случаю, когда учитывается изменение вязкости со временем в приближении однородного прогресса по сечению заготовки и волокна, если энергии активации вязкого течения стеклок сердцевин и оболочки одинаковы (зависимость вязкости стекла от температуры дается законом Аррениуса [2]).

На фиг. 2 приведены некоторые характерные результаты расчетов. Штриховыми кривыми показаны начальные формы границ, а сплошными — конечные. Во всех случаях внутренняя граница в начальный момент времени имела форму окружности. Значения параметров, отвечающих фиг. 2, таковы:  $\gamma=2$ .  $\alpha_1/\alpha_2=0$ ;  $\mu_1/\mu_2=1$  (а),  $\mu_1/\mu_2=0,2$  (б, в). При получении всех результатов расчетов, представленных на фиг. 2, использовались 19 мод ряда Фурье. Увеличение отношения  $\mu_1/\mu_2$  в 5 и 10 раз при сохранении значений  $\gamma$  и  $\alpha_1/\alpha_2$  неизменными весьма слабо изменяет результаты, представленные, к примеру, на фиг. 2, б и в соответственно. С другой стороны, расчеты с  $\alpha_1/\alpha_2=0,1$  при неизменных значениях  $\gamma$  и  $\mu_1/\mu_2$  показали, что решение обладает промежуточной асимптотикой, весьма близкой к стационарным результатам, представленным на фиг. 2. С ростом  $t$ , однако, при  $\alpha_1/\alpha_2 \neq 0$  обе границы в конечном счете приобретают, естественно, форму окружности. При  $\alpha_1/\alpha_2=0,5$  промежуточная квазистационарная асимптотика практически исчезает, причем деформация внутренней границы в сравнении с окружностью весьма незначительна в продолжение всего процесса перестройки внешней границы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. UK Patent 2012983 A.
2. Doremus R. H. Glass science. N. Y.: Wiley, 1973. 349 p.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
4. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

Москва

Поступила в редакцию  
7.IV.1987