

УДК 532.517.4

**ДИФФУЗИЯ КОЛЬЦЕВОГО ВИХРЯ**  
**БЕРЕЗОВСКИЙ А. А., КАПЛАНСКИЙ Ф. Б.**

Представления о закономерностях движения вихревых колец во многом основаны на теории невязкой жидкости. В первую очередь это классические результаты для вихревых колец малого поперечного сечения с однородной завихренностью [1] и развитие их на случай произвольного распределения завихренности внутри ядра [2–5]. В [6] вихревое кольцо изучалось без предположения о малости вихревого ядра. Известным примером течения такого типа служит сферический вихрь Хилла [7].

Попытки учета влияния вязкости основывались на экспериментально установленном подобии распределения завихренности [8–11]. На этом пути получены закономерности конечной стадии вырождения вихревого кольца [8] и предложена модель турбулентного кольцевого вихря [9]. Эти автомодельные решения не описывают тороидальную структуру вихря – в них она вырождается [11].

В настоящей работе исследуется диффузия кольцевого вихря с учетом влияния начального радиуса тороидального распределения завихренности на структуру течения. Постановка задачи в такой формулировке позволяет систематизировать результаты, полученные ранее, и дать их новую интерпретацию. Наряду с вихревым кольцом проведено изучение вихревой пары. Аналитически получены тороидальные распределения завихренности и функции тока. Найдена самоиндуцированная скорость подъема кольцевого вихря. Численно исследовано влияние инерционных членов.

**1. Постановка задачи.** В несжимаемой жидкости поведение вихревого кольца описывается уравнением диффузии завихренности [7]

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (v\xi) + \frac{\partial}{\partial x} (u\xi) = \nu \left[ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{k\partial \xi}{r\partial r} - \frac{k\xi}{r^2} \right] \quad (1.1)$$

которое при  $k=1$  соответствует осесимметрической задаче, а при  $k=0$  – плоской (вихревая пара);  $x, r$  – оси цилиндрической системы координат при  $k=1$  или декартовой при  $k=0$ .

Уравнение неразрывности позволяет ввести функцию тока соотношениями

$$u = \frac{1}{r^k} \frac{\partial \psi}{\partial r} + V(t), \quad v = -\frac{1}{r^k} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.2)$$

Здесь  $V(t)$  – скорость вихревого кольца, равная  $dx_0(t)/dt$ , где  $x_0(t)$  – пройденное вихрем расстояние.

Завихренность связана с функцией тока уравнением

$$-r^k \xi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{k}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.3)$$

Граничные условия состоят из условий симметрии на оси и условий на бесконечности, которые в системе координат, связанной с окружающей жидкостью, имеют вид

$$\psi = \xi = 0, \quad r = 0; \quad \psi, \xi \rightarrow 0, \quad x^2 + r^2 \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Интегрирование (1.1) при условии (1.4) дает условие сохранения

импульса вихря [9]

$$\frac{(2\pi)^k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} r^{k+1} \zeta \, dx \, dr = M_0 \quad (1.5)$$

В начальный момент времени  $t_0$  завихренность считается распределенной произвольным образом внутри тора с внешним и внутренним радиусами, отождествляемыми с размерами  $R_0 = (M_0 t_0)^{1/(3+k)}$ ,  $a_0 = (2\nu t_0)^{1/2}$ .

При введении «квазиавтомодельных переменных» и использовании масштаба завихренности  $\zeta_0$  уравнение диффузии вихря представим в виде

$$\rho = \frac{r}{L}, \quad \eta = \frac{x - x_0(t)}{L}, \quad \tau = \frac{R_0}{L}, \quad \Phi = \frac{\psi}{\zeta_0 L^{2+k}} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\zeta}{\zeta_0}, \quad L \approx t^\beta, \quad \zeta_0 = A(M_0) t^{-\alpha} t_0^{\alpha-1} \\ &- \frac{\alpha}{\beta} \omega - \rho \frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \eta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \tau \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( -\frac{1}{\rho^k} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \omega \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\rho^k} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \omega \right) \right] = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{k\omega}{\rho^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Параметры, входящие в формулировку задачи, определяют существование двух характерных линейных масштабов: инерционного и диффузионного  $L = (M_0 t)^{1/(3+k)}$ ,  $L = (2\nu t)^{1/2}$ .

Эти характерные масштабы соответствуют различным режимам течения, индуцируемым вихревым кольцом.

Значения  $\alpha$ ,  $L$ ,  $\operatorname{Re} \approx \zeta L^2 / \nu$  соответственно для ламинарного и турбулентного режимов определяются выражениями

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \quad L = \sqrt{2\nu t}, \quad \operatorname{Re} = A, \quad k=0 \\ \alpha &= \frac{3}{2}, \quad L = \sqrt{2\nu t}, \quad \operatorname{Re} = A \left( \frac{t_0}{t} \right)^{1/2} = A \frac{a_0 \tau}{R_0}, \quad k=1 \\ \alpha &= \frac{2}{3}, \quad L = \sqrt{3\nu_* t^{1/2}}, \quad \operatorname{Re} = A \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/3} = A \frac{R_0}{a_0 * \tau}, \quad k=0 \\ \alpha &= \frac{3}{4}, \quad L = \sqrt{4\nu_* t^{1/4}}, \quad \operatorname{Re} = A \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/4} = A \frac{R_0}{a_0 * \tau}, \quad k=1 \end{aligned}$$

Для турбулентного режима использована предложенная в [9] зависимость для коэффициента турбулентной вязкости  $\nu = \nu_* t^{-1/(3-k)}$ , где  $\nu_*$  — постоянная, определяемая сравнением результатов расчетов с экспериментальными данными. В ламинарном режиме  $\nu$  — коэффициент молекулярной вязкости.

Уравнение для функции тока (1.3) и граничные условия (1.4) в новых переменных сохраняют свою форму. Таким образом, единственным определяющим параметром сформулированной задачи является число Рейнольдса  $\operatorname{Re}$ .

**2. Решение при малых числах Рейнольдса.** Будем искать приближенное решение сформулированной задачи в виде асимптотических разложений [12]

$$\omega(\rho, \eta, \tau; \operatorname{Re}) = \omega_0(\rho, \eta, \tau) + \operatorname{Re} \omega_1(\rho, \eta, \tau) + \dots \quad (2.1)$$

$$\Phi(\rho, \eta, \tau; \operatorname{Re}) = \Phi_0(\rho, \eta, \tau) + \dots$$

справедливых при  $\operatorname{Re} \rightarrow 0$  для фиксированных значений  $\rho, \eta, \tau$ .

Для нулевого приближения подстановка разложений (2.1) в (1.7) дает

$$-\frac{\alpha}{\beta} \omega_0 - \rho \frac{\partial \omega_0}{\partial \rho} - \eta \frac{\partial \omega_0}{\partial \eta} - \tau \frac{\partial \omega_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \eta^2} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial \omega_0}{\partial \rho} - \frac{k \omega_0}{\rho^2} \quad (2.2)$$

Полученное уравнение имеет точное решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.4)

$$\omega_0 = \exp(-1/2(\rho^2 + \eta^2 + \tau^2)) \operatorname{sh}(\rho\tau) \quad (k=0) \quad (2.3)$$

$$\omega_0 = \exp(-1/2(\rho^2 + \eta^2 + \tau^2)) I_1(\rho\tau) \quad (k=1) \quad (2.4)$$

где  $I_1$  — модифицированная функция Бесселя. Это решение аналогично найденному в [13].

Вихревое кольцо индуцирует в окружающей жидкости течение с распределением функции тока, описываемым уравнением в форме (1.3). В плоском случае его решение выписывается в явном виде

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2} \left[ E_1 \left( \frac{\eta^2 + (\rho - \tau)^2}{2} \right) - E_1 \left( \frac{\eta^2 + (\rho + \tau)^2}{2} \right) + \ln \left( \frac{\eta^2 + (\rho - \tau)^2}{\eta^2 + (\rho + \tau)^2} \right) \right] \quad (2.5)$$

Здесь  $E_1$  — интегральная показательная функция. Представляя (2.4) в виде произведения степенных рядов [14], найдем функцию тока для осесимметричного случая в виде ряда с рекуррентно определяемыми коэффициентами

$$\Phi_0 = -\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2n+1} \frac{(\rho^2 + \eta^2)^{m+n+2}}{(n+1)! n! 2^m m!} P_{n,m}(q) \quad (2.6)$$

$$P_{n,m}(q) = \sum_{i=0}^n B_{n,m}^{(i)} q^{2(i+1)}, \quad q = \frac{\rho}{(\rho^2 + \eta^2)^{1/2}}$$

$$B_{n,m}^{(n)} = \frac{1}{[(2m+2n+4)(2m+2n+3) - (2m+2)(2n+1)]}$$

$$B_{n,m}^{(i)} = \frac{[2(i+1)+2][2(i+1)] B_{n,m}^{(i+1)}}{[(2m+2n+4)(2m+2n+3) - (2i+2)(2i+1)], \quad i=0, \dots, n-1$$

Проанализируем свойства полученного решения. При больших значениях  $\tau$  и  $\rho \geq \tau/c$ ,  $c = \text{const}$ , используя асимптотическое представление для  $I_1(\rho\tau)$ , можно представить (2.4) в виде

$$\omega_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}(\eta^2 + (\rho - \tau)^2)\right) \sqrt{\frac{1}{2\rho\tau}} \left(1 + O\left(\frac{c}{\tau^2}\right)\right) \quad (2.7)$$

В этом случае радиальная координата максимума вихря определяется по формуле

$$\rho_m = 1/2(\tau + \sqrt{\tau^2 - 2}) \quad (2.8)$$

В пределе при  $\tau \rightarrow \infty$ , соответствующем начальному условию для завихренности в виде дельта-функции [13], функция тока определяется решением для круговой вихревой нити в идеальной жидкости [7].

При малых  $\tau$ , используя разложения в ряды  $I_1(\rho\tau)$  и  $\exp(-\tau^2/2)$  (для  $\rho \leq c\tau$ ), получим выражение, совпадающее с найденным ранее автомодельным решением [10], которое описывает конечную стадию вырождения вихревого кольца

$$\omega_0 = B \exp\left(-\frac{1}{2}(\eta^2 + \rho^2)\right) \rho \tau, \quad \rho_m = 1 \quad (2.9)$$

Функция тока в этом случае находится из (2.6) в виде

$$\Phi_0 = D \left[ \frac{1}{(\rho^2 + \eta^2)^{1/2}} \int_0^{(\rho^2 + \eta^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt - \exp\left(-\frac{\rho^2 + \eta^2}{2}\right) \right] \frac{\rho^2 \tau}{\rho^2 + \eta^2} \quad (2.10)$$

где  $B, D$  — постоянные.

Одной из важных характеристик эволюции вихревого кольца является самоиндуцированная скорость его движения. Располагая распределениями для функции тока, можно определить эту скорость непосредственно. Так, для скорости вихревых кольца и пары имеем

$$V = \frac{1}{\rho^k} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} \zeta_0 L, \quad \eta = 0, \quad \rho = \rho_m \quad (2.11)$$

$$V = \left( \frac{1 - \exp(-2\tau^2)}{R} \right) A v, \quad k = 0, \quad \tau \gg 1, \quad \eta = 0, \quad \rho = \tau$$

При вычислении скорости с использованием (2.6)  $I_1(\rho\tau)$  и  $\exp(-\tau^2/2)$  аппроксимируются многочленами [14].

Таким образом, можно выделить две стадии диффузии кольцевого вихря. На первой стадии резко выраженный тороидальный вихрь развивается неавтономно. На второй, автомоделной стадии происходит потеря тороидальности.

Анализ полученных решений показывает, что они включают в себя решения для идеальной жидкости в качестве предельных случаев. В плоской задаче отмеченная ситуация проявляется наиболее отчетливо: функции  $E_i$  выполняют роль поправок решения для идеальной жидкости вблизи центра вихря.

**3. Численное решение.** Влияние инерционных членов на развитие кольцевого вихря изучалось численно. В безразмерных переменных

$$x_1 = \frac{x}{R_0}, \quad r_1 = \frac{r}{R_0}, \quad \psi_1 = \frac{\psi}{R_0^{k+1} V_0}, \quad u_1 = \frac{u}{V_0}, \quad \zeta_1 = \frac{\zeta_0 R_0}{V_0}, \quad (3.1)$$

$$t_1 = \frac{V_0}{R_0} t, \quad Re_0 = \frac{V_0 R_0}{\nu}$$

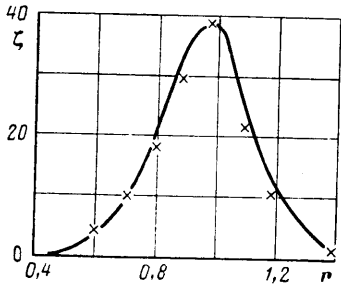
постановка задачи в форме (1.1)–(1.5) сохраняет свою силу при замене  $\nu$  на  $1/Re_0$  (индекс 1 ниже опущен).

Численное решение сформулированной задачи проведено неявным методом перекрестно-продольных направлений при аппроксимации конвективных членов по Аракаве [15]. Граничные условия ставились на границах расчетного прямоугольника. Для более точного определения значений  $\psi$  уравнения (1.1) и (1.3) рассчитывались на разных сетках (уравнение Пуассона на сетке  $61 \times 61$ , а уравнение (1.1) — на сетке  $31 \times 41$ ). Решение уравнения Пуассона выполнено с постоянным значением итерационного параметра и с дополнительным условием — ограничением итераций внутреннего цикла. Начальное условие задавалось в виде аналитического выражения для распределения завихренности из (2.7) при  $t=1$

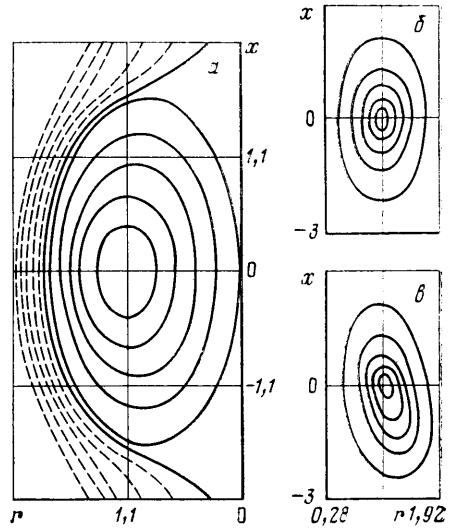
$$\zeta_0 = \frac{K}{\sqrt{r}} \exp\left(-\frac{Re_0}{4}(x^2 + (r-1)^2)\right), \quad K = \text{const} \quad (3.2)$$

Расчеты проводились для  $10 \leq Re_0 \leq 1000$  и  $M_0 = 1$ .

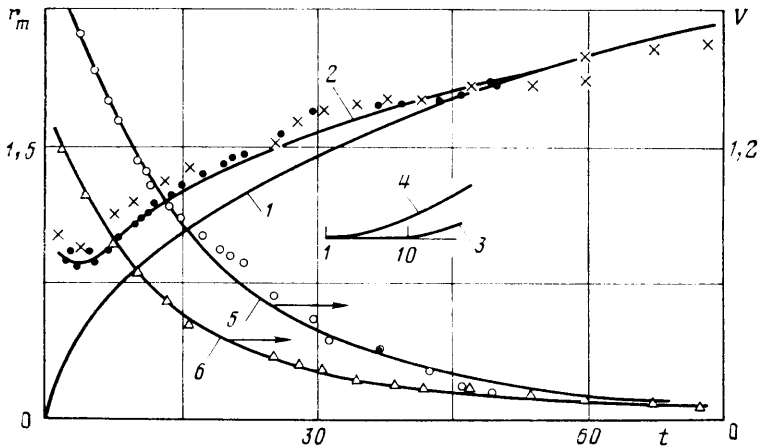
**4. Обсуждение результатов.** Предложенная постановка задачи позволяет описать диффузию вихревого кольца не только в автомоделном режиме, но и в предшествующей ему стадии. На этой стадии распределение



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

завихренности имеет четко выраженную тороидальную структуру, определяемую влиянием начального радиуса вихревого кольца. В автомодельном режиме это влияние исчезает.

Тороидальное распределение завихренности согласуется с результатами детального эксперимента [16], что иллюстрирует фиг. 1, где точки соответствуют результатам измерений, а сплошная линия — численному расчету.

Различие в закономерностях диффузии вихревого кольца на разных стадиях его существования отражается и в изменении во времени его радиуса. Это видно из сопоставления с экспериментальными данными [17], представленного на фиг. 2. Здесь кривая 1 соответствует автомодельному режиму (2.9), кривая 2 определена непосредственно из (2.4), точки — экспериментальные данные [17]. Расчетная кривая 2 правильно описывает ход изменения радиуса вихревого кольца во времени при выборе  $Re_0 = 28,35$  и при больших  $t$  переходит в автомодельную кривую 1. В численном расчете с увеличением  $Re_0$  ( $Re_0 \geq 350$ ) фиксируется ускоренный рост радиуса вихревого кольца — кольцо растягивается. Причиной этого является влияние инерционных членов: отмечаемое в аналитическом

решении несовпадение координат максимумов вихря и функции тока обуславливает движение центра завихренности к максимуму функции тока. Это отражено на фиг. 2, где кривые 3, 4 соответствуют численным расчетам при  $Re_0=250, 500$ . При больших значениях  $Re_0$  наблюдается также деформация распределения вихря. Изолинии завихренности начинают отличаться от симметричных, описываемых решением (2.4), несколько вытягиваются в сторону, противоположную направлению движения вихревого кольца и поворачиваются относительно оси симметрии под некоторым углом (фиг. 3, б, в, где сплошные линии — изолинии завихренности 10, 30, 50, 70 и 90% от максимума). Дальнейшая эволюция этих распределений во времени сопровождается выравниванием значений завихренности по всей вихревой зоне вследствие диффузии.

При больших временах влияние нелинейности исчезает и достигаются предельные формы распределения завихренности и функции тока, описываемые автомодельным решением (2.9) (фиг. 3, б). На фиг. 3, а показано распределение функции тока (2.6) в относительной системе координат, движущейся вместе с вихрем, при  $t=10$  с (сплошные линии — изолинии функции тока 10, 30, 50, 70 и 90% от максимума, пунктирные — изолинии тех же значений противоположного знака). Скорость вихревого кольца определяется отождествлением максимума функции тока с центром вихря. На фиг. 2 представлено изменение скорости со временем, кривые 5, 6 соответствуют расчету скоростей (2.11) при  $Re_0=28, 35$  для разных значений  $A(M_0)$ , точки — данные эксперимента [17]. Наблюдается удовлетворительное соответствие теории и эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Bliss D. B. The dynamics of curved rotational vortex lines — MS thesis, MIT, Cambridge, Mass., 1970.
3. Fraenkel L. E. Examples of steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid // J. Fluid Mech. 1972. V. 51. Pt 1. P. 119–135.
4. Saffman P. G. The velocity of viscous vortex rings // Stud. Appl. Math. 1970. V. 49. № 4. P. 371–380.
5. Tung L., Ting C. Motion and decay of a vortex in a nonuniform stream // Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 1039–1051.
6. Norbury J. A family of steady vortex rings // J. Fluid Mech. 1973. V. 57. Pt 3.
7. Бэгчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
8. Ершин Ш. А., Калтаев А. Об автомодельном развитии кольцевого вихря в вязкой жидкости // Прикладная механика. Применение математических методов в естествознании. Алма-Ата: КазГУ, 1979. С. 164–169.
9. Луговцов Б. А. О движении турбулентного вихревого кольца и переносе им пассивной примеси // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970.
10. Капланский Ф. Б., Эпштейн А. М. К теории турбулентных вихревых пар // Изв. АН ЭССР. Физика. Математика. 1973. Т. 22. № 4. С. 386–393.
11. Капланский Ф. Б., Эпштейн А. М. Движение и перенос тепла в турбулентных вихревых кольцах // Изв. АН ЭССР. Физика. Математика. 1976. Т. 25. № 4.
12. Найфэ А. К. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 525 с.
13. Калтаев А. Исследование динамических характеристик движения вихревого кольца вязкой жидкости // Динамика сплошной среды. Алма-Ата: КазГУ, 1982.
14. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 830 с.
15. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow // J. Comp. Phys. 1966. V. 1. P. 119–143.
16. Sullivan J. P., Widnall S. E., Ezekiel S. Study of vortex rings using a laser doppler velocimeter // AIAA Journal. 1973. V. 11. № 10. P. 1384–1389. (Рус. перев.: Салливен, Эйднолл, Эзекель. Исследование вихревых колец с помощью лазерного доплеровского измерителя скорости // Ракетн. техника и космонавтика. 1973. Т. 11. № 10. С. 31–36).
17. Oshita Y. Motion of vortex rings in water // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 32. № 4.
18. Капланский Ф. Б. О диффузии круговой вихревой нити // Изв. АН ЭССР. Физика. Математика. 1984. Т. 33. № 3. С. 372–374.
19. Капланский Ф. Б. Численное исследование вихревых колец // Изв. АН ЭССР. Физика. Математика. 1985. Т. 34. № 1. С. 32–36.

Таллин

Поступила в редакцию  
29.IX.1986