

УДК 532.593

ИССЛЕДОВАНИЕ ДАЛЬНОГО И БЛИЖНЕГО ПОЛЕЙ В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ НЕРОВНОСТИ ДНА ПОТОКОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

БЕЖАНОВ К. А., ОНУФРИЕВ А. Т., ТЕР-КРИКОРОВ А. М.

В смешанных эйлерово-лагранжевых переменных рассматривается пространственная задача обтекания малой неровности дна слоистым потоком жидкости конечной глубины. Частота Брента – Вэйсяля предполагается постоянной и малой, а условие на свободной поверхности заменяется условием твердой крышки.

Исследование дальнего поля показало, что основные волновые возмущения расположены внутри угла, величина которого для больших значений внутреннего числа Фруда заметно меньше угла Кельвина, а амплитуда волн имеет на бесконечности порядок $1/\sqrt{r}$, где r – полярный радиус. Кольцевые возмущения затухают по экспоненциальному закону. В отличие от точечных источников моделей рассматриваемая модель не приводит к расходимости интегралов на оси потока [1–3].

Для исследования ближнего и дальнего полей, когда неровность дна имеет форму полусферы, получены приближенные выражения для радиальных и кольцевых волн через некоторые универсальные функции. Для радиальных волн получен закон подобия, при котором характерным размером в направлении оси потока является отношение скорости потока к частоте Брента – Вэйсяля, а характерным размером в направлении, перпендикулярном оси потока, – глубина жидкости. Кольцевые возмущения в первом приближении не зависят от частоты Брента – Вэйсяля. Показано, что в ближнем поле зона интенсивных волновых возмущений имеет порядок глубины жидкости, а не размера препятствия, как для корабельных волн Кельвина на поверхности однородной жидкости.

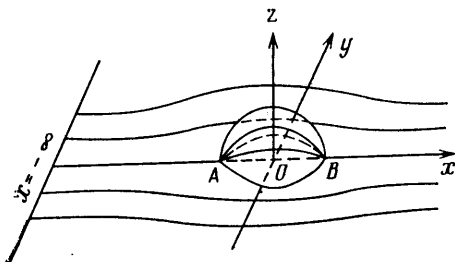
1. Постановка задачи. Рассматривается пространственная задача обтекания малой неровности дна потоком идеальной несжимаемой тяжелой экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины h . Свободная поверхность заменяется твердой крышкой, а стратификация предполагается устойчивой. Декартова система координат выбирается так, чтобы плоскость xy была расположена на горизонтальной плоскости дна, а ось z направлена вертикально вверх (фиг. 1). При $x \rightarrow -\infty$ поток асимптотически одномерный и течет с постоянной скоростью V в направлении оси x . В качестве характерных величин длины, скорости и плотности берутся значения h , V и ρ_0 , где ρ_0 – средняя плотность одномерного потока [4]. Ниже в качестве независимых переменных берутся эйлеровы координаты x , y и лагранжева координата ζ , задающая при $x \rightarrow -\infty$ расстояние от горизонтального дна до невозмущенной линии тока, а в качестве зависимой переменной – эйлерова координата z . При определенных ограничениях на форму неровности дна и режим обтекания дно есть поверхность постоянной плотности $\zeta = 0$. Для обоснования такой постановки рассматривается случай, когда неровность дна имеет форму одного выпуклого препятствия.

Поток называется сильно стратифицированным, если внутреннее число Фруда $Fr_i < 1$, и слабо стратифицированным, если $Fr_i > 1$

$$Fr_i = \frac{V}{Nh_0}, \quad N^2 = -\frac{g}{\rho(z)} \frac{d\rho}{dz}$$

где N — частота Брента — Вайсяля, $\rho(z)$ — плотность невозмущенного потока, g — ускорение силы тяжести, h_0 — высота препятствия [6].

В настоящей работе стратификация предполагается слабой, и для таких течений все частицы жидкости в невозмущенном потоке обладают достаточной кинетической энергией, чтобы подняться на вершину препят-



Фиг. 1

ствия, преодолевая градиент плотности. Аналитически это означает, что для любого $z_0 \in [0, h_0]$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{2} \rho(z) V^2 \geq g \int_z^{h_0} (h_0 - \tau) \left(-\frac{d\rho}{d\tau} \right) d\tau \quad (1.1)$$

Действительно, если предположить, что неравенство (1.1) не выполняется при некотором $z_0 \in [0, h_0]$, то, используя монотонность функции $\rho(z)$, имеем

$$\frac{1}{2} \rho(z_0) V^2 < g \int_{z_0}^{h_0} (h_0 - \tau) \left(-\frac{d\rho}{d\tau} \right) d\tau \leq \frac{1}{2} N^2 h_0^2 \rho(z_0)$$

откуда, вопреки предположению, следует, что $Fr_1 < 1$.

Если поток сильно стратифицирован, то появляется разделяющая линия тока $z = z_0$, которая находится из уравнения Шепарда, получающегося из неравенства (1.1) заменой знака неравенства на знак равенства [5]. Многочисленные экспериментальные исследования подтверждают, что для широкого класса препятствий при $z > z_0$ траектории обходят препятствие сверху, как при обтекании препятствия потоком однородной жидкости, а при $z < z_0$ — сбоку, мало отклоняясь от горизонтальной плоскости [5].

Поскольку в данной работе рассматриваются только слабо стратифицированные течения, то, как было показано, разделяющей линии тока нет и картина траекторий, лежащих на дне, качественно имеет такой же вид, как и в случае однородной жидкости (фиг. 1). Тогда закон сохранения плотности вдоль траектории приводит к выводу, что дно есть поверхность постоянной плотности.

Для формулировки граничной задачи введем функцию $Z(x, y, \zeta) = z(x, y, \zeta) - \zeta$, представляющую малые возмущения поверхности постоянной плотности $z = z(x, y, \zeta)$, а для автоматического учета условия излучения на бесконечности введем искусственную вязкость по Рэлею с коэффициентом $\mu \rightarrow +0$ [6]. Тогда в приближении Буссинеска и в предположении, что поле скоростей не имеет критических точек в потоке жидкости, в безразмерных переменных имеем следующую граничную задачу [7]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mu \right) \Delta Z + \frac{1}{Fr^2} \Delta_1 Z = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < \zeta < 1$$

$$Z(x, y, 0+0) = Z_0(x, y), \quad Z(x, y, 1-0) = 0 \quad (1.2)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} Z(x, y, \zeta) = 0, \quad \text{Fr} = V/Nh$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным x, y и ζ , Δ_1 — оператор Лапласа по переменным x и y , а финитная непрерывная функция $Z_0(x, y)$ с носителем, целиком расположенным в круге радиуса c_1 , задает форму неровности дна.

После замены переменных

$$Z(x, y, \zeta) = w(\xi, \eta, \zeta) + (1-\zeta)z_0(\xi, \eta) \quad (1.3)$$

$$Z_0(x, y) = z_0(\xi, \eta), \quad x = \xi \text{ Fr}, \quad y = \eta \text{ Fr}, \quad v = \mu \text{ Fr}$$

из (1.2) и (1.3) можно получить граничную задачу

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + v \right) \left(\Delta_1 w + \text{Fr}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right) + \Delta_1 w = (\zeta - 1) \times \\ & \times \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \Delta_1 z_0(\xi, \eta), \quad -\infty < \xi, \eta < +\infty, \quad 0 < \zeta < 1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$w(\xi, \eta, 0+0) = 0, \quad w(\xi, \eta, 1-0) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} w(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

2. Решение основной граничной задачи. Если функцию $w(\xi, \eta, \zeta)$ и правую часть уравнения (1.4) разложить в ряд Фурье по полной и ортогональной в $L_2(\Omega)$ системе функций $\{\sin \pi n \zeta\}$, $\Omega = (\zeta : 0 \leq \zeta \leq 1)$, то для коэффициентов Фурье искомого решения $w_n(\xi, \eta)$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + v \right) (\Delta_1 w_n - \varepsilon_n^2 w_n) + \Delta_1 w_n = \\ & = -\frac{2}{\pi n} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \Delta_1 z_0(\xi, \eta), \quad -\infty < \xi, \eta < +\infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} w_n(\xi, \eta) = 0, \quad \varepsilon_n = \pi n \text{ Fr}$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (2.1), имеем

$$w_n(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-p^2)(p^2+q^2)}{B(p, q, v)} z_*(p, q) \exp i(p\xi + q\eta) dp dq \quad (2.2)$$

где $z_*(p, q)$ — преобразование Фурье финитной непрерывной функции $z_0(\xi, \eta)$ и, следовательно, целая функция переменных p и q . Функция $z_0(\xi, \eta)$ предполагается также четной по переменным ξ и η , тогда и $z_*(p, q)$ — четная функция переменных p и q .

Выражение для $B(p, q, v)$, фигурирующие в формуле (2.2), имеет вид

$$\begin{aligned} B(p, q, v) &= B(p, q, 0) - ivp(p^2 + q^2 + \varepsilon_n^2) \\ B(p, q, 0) &= p^4 + p^2(q^2 - 1 + \varepsilon_n^2) - q^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

а функция $B(p, q, 0)$ имеет четыре нуля в комплексной p -плоскости

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \pm a(q), \quad p_{3,4} = \pm ib(q) \\ a^2(q) &= \frac{2q^2}{D(q^2) + q^2 + \varepsilon_n^2 - 1}, \quad b^2(q) = \frac{q^2}{a^2(q)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$D(q^2) = \sqrt{(q^2 + \epsilon_n^2 - 1)^2 + 4q^2}$$

При $\nu > 0$ нули функции $B(p, q, 0)$, лежащие на действительной оси, смещаются в верхнюю полуплоскость. Поэтому при $\nu \rightarrow +0$ интегрирование по переменной p в формуле (2.2) надо проводить по контуру, обходящему точки $p_1(q)$ и $p_2(q)$ снизу. Кроме того, наложенные ограничения на форму неровности дна позволяют применить к внутреннему интегралу лемму Жордана и вычислить его методом теории вычетов.

Тогда решение задачи (2.1) имеет окончательно вид

$$\begin{aligned} w_n(\xi, \eta) &= \vartheta(\xi - c) E_n(\xi, \eta) + G(\xi, \eta), \quad |\xi| > c \\ E_n(\xi, \eta) &= \frac{4}{n} \int_0^{+\infty} F_1(q) \sin(a(q)\xi + q\eta) dq \\ G_n(\xi, \eta) &= \frac{4}{n} \int_0^{+\infty} F_2(q) \exp(-b(q)|\xi|) \cos q\eta dq \\ F_1(q) &= -\frac{(a^2(q) - 1)(a^2(q) + q^2)}{a(q)D(q^2)} z_*(a(q), q) \\ F_2(q) &= \frac{(b^2(q) + 1)(b^2(q) - q^2)}{b(q)D(q^2)} z_*(ib(q), q) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где функция $z_*(ib(q), q)$ вещественна в силу ее четности, а $\vartheta(\xi)$ — единичная функция Хевисайда, $c = c_1/\text{Fr}$.

Функция $E_n(\xi, \eta)$ описывает радиальные волны, распространяющиеся вниз по потоку, а $G_n(\xi, \eta)$ — быстро затухающее кольцевое возмущение, распространяющиеся во все стороны. Ниже, основываясь на формулах (2.5), исследуются дальнее и ближнее поля внутренних волн, генерируемых неровностью дна. Из формул (2.4) и (2.5) видно, что рассматриваемая модель не приводит к расходимости интегралов на оси потока, что характерно для моделей с точечными источниками [1–3].

3. Исследование дальнего поля. Найдём асимптотику интегралов $E_n(\xi, \eta)$ и $G_n(\xi, \eta)$ из (2.5) при $\epsilon_n > 1$.

Для исследования асимптотики $E_n(\xi, \eta)$ применим метод стационарной фазы. Стационарные точки находятся из решения уравнения [8]

$$a'(q)\xi + \eta = 0 \quad (3.1)$$

где штрих здесь и далее означает операцию дифференцирования.

Если ввести полярные координаты (r, θ) , то из формул (2.4) и (3.1) можно получить для больших значений r угловой размер волновой области

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta &= -\omega(q^2) \text{sgn } q, \quad q \neq 0 \\ \omega(t) &= \sqrt{2} \epsilon_n^2 \frac{\sqrt{D(t) + t + \epsilon_n^2 - 1}}{D(t)(D(t) + t + \epsilon_n^2 + 1)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Докажем, что функция $\omega(t)$ монотонно убывает при $t \geq 0$. Для этого достаточно показать, что ее логарифмическая производная отрицательна. Из формул (3.2) и (2.4) можно получить

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} = \frac{1 - 3\epsilon_n^2 - 3t - D(t)}{2D(t)(D(t) + t + \epsilon_n^2 - 1)} < 0$$

Итак, функция $\omega(t)$, $t \geq 0$ достигает максимума при $t = 0$, и тогда из формул (3.2) можно получить

$$|\theta| < \theta_0, \quad \theta_0 = \text{arc tg } (1/\sqrt{\epsilon_n^2 - 1}) \quad (3.3)$$

Таким образом, при $0 < \theta \leq \theta_0$ для каждого $\theta = \theta_*$ существует единственная стационарная точка $q = q_* > 0$, а при $-\theta_0 \leq \theta < 0$ — симметричная стационарная точка $q = -q_*$. Угловой размер волновой области определяется неравенством (3.3).

Асимптотику интеграла $E_n(\xi, \eta) = \Phi_n(r, \theta)$ при $\theta = \text{const}$ и больших значениях r в силу симметрии достаточно рассмотреть при $0 \leq \theta < \theta_0$. Тогда вклад от стационарной точки $q = q_*$ есть [8]

$$\begin{aligned} \Phi_n(r, \theta) &= \frac{8}{n} \sqrt{2\pi / \left(r \frac{\partial^2 S}{\partial q^2}(\theta, q_*) \right)} F_1(q_*) \times \\ &\times \sin \left(rS(\theta, q_*) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2}(\theta, q_*) \right) \\ S(\theta, q) &= a(q) \cos \theta + q \sin \theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

т. е. волны затухают как $1/\sqrt{r}$ [1, 3, 9, 10].

Надо еще исследовать вклад точек $q=0$ и $+\infty$ в асимптотику интеграла $\Phi_n(r, \theta)$, поскольку амплитуда $F_1(q)$ не является финитной и бесконечно дифференцируемой функцией, а фаза $S(\theta, q)$ не является бесконечно дифференцируемой функцией параметра q .

В окрестности точки $q=0$ при $|\theta| \leq \theta_0$ имеем

$$\Phi_n(r, \theta) \approx \frac{8\epsilon_n^2 z_*(0, 0)}{n(\epsilon_n^2 - 1)^{3/4}} \int_{-\delta}^{\delta} |q| \sin(r \cos \theta (|q| \operatorname{tg} \theta_0 + q \operatorname{tg} \theta)) dq \quad (3.5)$$

где $\delta > 0$ достаточно мало.

Интегрируя (3.5) по частям, можно показать, что вклад точки $q=0$ в асимптотику интеграла $\Phi_n(r, \theta)$ при $r \rightarrow \infty$ имеет порядок $1/r$ и им можно пренебречь по сравнению с вкладом от точки $q=q_*$, определяемым формулой (3.4).

При $q=0$ в окрестности точки $\theta=\theta_0$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_n(r, \theta) &= C/r^{2/3} \\ C &= \frac{8}{3} \frac{z_*(0, 0)}{(\epsilon_n^2 - 1)^{1/4}} \left(\frac{2\epsilon_n}{\cos \theta_0} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau^{1/2}} d\tau \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, из (3.6) видно, что при $\theta=\theta_0$ колебаний нет, имеется только возвышение, убывающее при $r \rightarrow \infty$ по «закону двух третей».

В окрестности точки $q=+\infty$ имеем

$$\Phi_n(r, \theta) \approx \frac{8\epsilon_n^2}{n} \int_A^{+\infty} \frac{z_*(1, q)}{q^2} \sin(r \cos \theta + qr \sin \theta) dq \quad (3.7)$$

где $A > 0$ достаточно велико и $\theta \neq 0$.

Интегрируя (3.7) по частям, можно показать, что вклад точки $q=+\infty$ в асимптотику интеграла $\Phi_n(r, \theta)$ имеет порядок $1/r$ и, следовательно, также не влияет на главный член асимптотики, определяемый формулой (3.4).

При $\eta=0$ для $E_n(\xi, \eta)$ имеем выражение

$$E_n(\xi, 0) = \frac{8\epsilon_n^2}{n} \int_A^{+\infty} \frac{z_*(1, q)}{q^2} \sin \left(\frac{\epsilon_n^2}{a^2} - 1 \right) \xi dq \quad (3.8)$$

Исследование асимптотики интеграла (3.8) требует большей информации от функции $z_*(1, q)$ и специального исследования. Во всяком случае эта функция ограничена.

Интеграл $G_n(\xi, \eta)$, описывающий кольцевые возмущения, при больших значениях $|\xi|$ стремится к нулю по экспоненциальному закону, так как в силу (2.4) $b(q) > 0$ при $q > 0$. Поэтому этот интеграл дает малый вклад в асимптотику.

4. Исследование ближнего поля. Для исследования волновой картины сразу за неровностью дна применяется приближенный метод вычисления интегралов (2.5), основанный на использовании малости параметра $1/\text{Fr}$. Чтобы не усложнять выкладок и получить ясную качественную картину обтекания, рассматривается случай обтекания полусферы.

Тогда

$$z_*(p, q) = \frac{\text{Fr}}{4\pi^2} \int_G \int_G \sqrt{c^2 - \xi^2 - \eta^2} \exp(-i(p\xi + q\eta)) d\xi d\eta =$$

$$= \frac{c^3 \text{Fr}}{2\pi} \frac{\sin \rho - \rho \cos \rho}{\rho^3} \quad (4.1)$$

$$\rho = c\sqrt{p^2 + q^2}, \quad G = \{(\xi, \eta) : \xi^2 + \eta^2 \leq c^2\}$$

где c — безразмерный радиус полусферы, отличающийся от размерного множителем V/N .

Если в формулах (2.4), (2.5) и (4.1) оставить главные члены относительно параметра $\epsilon_n \gg 1$, то можно получить выражения

$$E_n(\xi, \eta) = \frac{4}{\pi^2 n^2 \epsilon_n} \int_0^{+\infty} \sin \frac{\xi \tau}{\sqrt{\tau^2 + 1}} \cos(\epsilon_n \eta \tau) \frac{\epsilon_n c \tau \cos(\epsilon_n c \tau) - \sin(\epsilon_n c \tau)}{\tau^2 (\tau^2 + 1)^{3/2}} d\tau \quad (4.2)$$

$$G_n(\xi, \eta) \approx \frac{2c^3 \epsilon_n^3}{\pi^2 n^2} \sigma(c\epsilon_n) K_0(\epsilon_n \sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \quad (4.3)$$

$$\sigma(\tau) = (\tau \operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh} \tau) / \tau^3$$

где $K_0(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента [11].

Далее выражение (4.2) можно преобразовать к виду

$$E_n(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi^2 n^2 \epsilon_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \xi^{2k+1} (I_k(\epsilon_n(\eta-c)) -$$

$$- I_k(\epsilon_n(\eta+c)) + c\epsilon_n H_k(\epsilon_n(\eta-c)) + c\epsilon_n H_k(\epsilon_n(\eta+c))) \quad (4.4)$$

$$I_k(v) = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{2k-1} \sin(v\tau)}{(\tau^2+1)^{k+2}} d\tau, \quad H_k(v) = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{2k} \cos(v\tau)}{(\tau^2+1)^{k+2}} d\tau \quad (4.5)$$

Интегрируя по частям выражения (4.5) и используя известные формулы для интегралов Дирихле и Лапласа, можно получить рекуррентные формулы при $v \geq 0$

$$I_k(v) = \frac{k-1}{k+1} I_{k-1}(v) + \frac{1}{2(k+1)} v I_{k-1}'(v), \quad H_k(v) = I_k'(v) \quad (4.6)$$

$$I_0(v) = \frac{\pi}{4} \left(2 - \frac{v+2}{e^v} \right), \quad H_0(v) = \frac{\pi}{4} \frac{v+1}{e^v}, \quad k=1, 2, \dots$$

Далее введем нечетную по переменной v универсальную функцию

$$U(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^{2k+1} I_k(v), \quad v \geq 0 \quad (4.7)$$

и положим при $v \geq 0$

$$I_k(v) = \frac{\pi}{4} e^{-v} P_k(v), \quad H_k(v) = \frac{\pi}{4} e^{-v} Q_k(v), \quad k=1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Из (4.6) получим рекуррентные формулы для многочленов $P_k(v)$ и $Q_k(v)$

$$P_k(v) = \frac{1}{2(k+1)} ((2k-2-v)P_{k-1}(v) + vP'_{k-1}(v)) \quad (4.9)$$

$$P_1(v) = \frac{1}{4} (v^2 + v), \quad k=2, 3, \dots$$

$$Q_k(v) = P_k'(v) - P_k(v), \quad Q_0(v) = v+1, \quad k=1, 2, \dots$$

Тогда из формул (1.3), (2.5) и (4.2)–(4.9) получим основную формулу для волнового поля внутренних волн при $|x| > c$

$$\begin{aligned} \frac{z(x, y, \xi)}{h} = & \xi + \frac{2}{\pi^3 \text{Fr}} \vartheta(x-c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(U\left(\frac{N}{V}x, \frac{\pi n}{h}(y-c)\right) - \right. \\ & \left. - U\left(\frac{N}{V}x, \frac{\pi n}{h}(y+c)\right) + \frac{\pi n c}{h} \frac{\partial U}{\partial v}\left(\frac{N}{V}x, \frac{\pi n}{h}(y-c)\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\pi n c}{h} \frac{\partial U}{\partial v}\left(\frac{N}{V}x, \frac{\pi n}{h}(y+c)\right) \right) \frac{\sin \pi n \xi}{n^3} + 2\pi \left(\frac{c}{h}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma\left(\frac{\pi n c}{h}\right) \times \\ & \times K_0\left(\frac{\pi n}{h} \sqrt{x^2 + y^2}\right) \sin \pi n \xi, \quad |y| < \infty, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4.10) \end{aligned}$$

где x, y, z и c здесь и далее — сохраняющие прежний смысл размерные переменные.

Если $c \ll h$, то для $n=1, 2, \dots, m$ величину $\pi n c/h$ можно считать малой. Тогда в (4.10) можно ограничиться первыми m членами рядов и упростить выражение в первой сумме

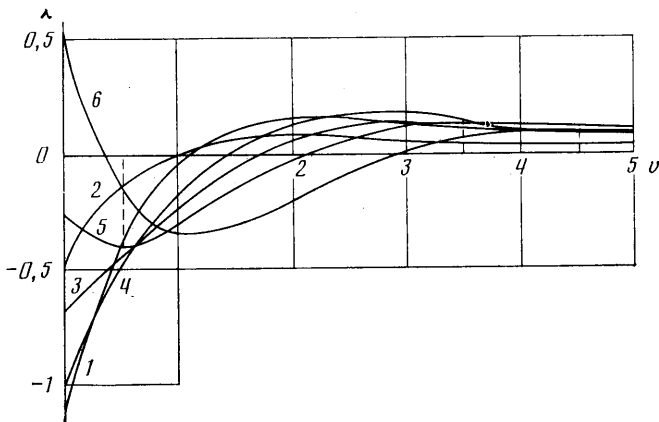
$$\begin{aligned} \frac{z(x, y, \xi)}{h} = & \xi + \frac{\pi}{3 \text{Fr}} \left(\frac{c}{h}\right)^3 \vartheta(x-c) \sum_{n=1}^m \chi\left(\frac{N}{V}x, \frac{\pi n}{h}y\right) \sin \pi n \xi + \\ & + 2\pi \left(\frac{c}{h}\right)^3 \sum_{n=1}^m n \sigma\left(\frac{\pi n c}{h}\right) K_0\left(\frac{\pi n}{h} \sqrt{x^2 + y^2}\right) \sin \pi n \xi, \quad |x| > c, \\ & |y| < \infty, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4.11) \end{aligned}$$

Здесь $\chi(u, v)$ — четная функция переменной v , которая имеет вид

$$\chi(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^{2k+1} e^{-v} R_k(v), \quad v \geq 0 \quad (4.12)$$

$$R_k(v) = Q_k''(v) - 2Q_k'(v) + Q_k(v), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Формулы (4.10) и (4.11) задают закон подобия для волновых движений стратифицированной жидкости. Характерный масштаб в направлении потока V/N есть, вообще говоря, большая величина по сравнению с глубиной жидкости, следовательно, волны, генерируемые неровностью дна, — длинные. Это подтверждает соображение о недостаточности исследования только дальнего поля в такого рода задачах. Характерный масштаб поперек потока для n -й моды есть $h/\pi n$ и, следовательно, при небольших n -ой сравним с величиной h . Из закона подобия также следует, что с ростом n линии горбов и впадин сжимаются к оси x . Поэтому для описания волновой картины на некотором расстоянии от оси потока существуют только первые моды.



Фиг. 2

5. Результаты расчетов. Картина радиальных волн, согласно решению (4.10), определяется свойствами универсальных функций $U(u, v)$ и $T(u, v)$, где

$$T(u, v) = \frac{6}{\pi^4} \left(\frac{h}{c} \right)^3 \left(U(u, v-\alpha) - U(u, v+\alpha) + \alpha \frac{\partial U}{\partial v}(u, v-\alpha) + \alpha \frac{\partial U}{\partial v}(u, v+\alpha) \right), \quad \alpha = \frac{\pi h c}{h}$$

При малых α функция $T(u, v)$ выражается через более простую универсальную функцию $\chi(u, v)$ по формуле (4.12). В силу симметрии течения жидкости относительно плоскости $v=0$ достаточно описать поверхность $T(u, v)$ или $\chi(u, v)$ при $v \geq 0$. Значения функций $T(u, v)$ и $\chi(u, v)$ были вычислены при $\alpha=0,25$; $u=u_i=0,5i$ ($i=1, 2, \dots, 60$); $v=v_j=0,5j$ ($j=1, 2, \dots, 20$). Для первой моды результаты, основанные на использовании функций $T(u, v)$ и $\chi(u, v)$, практически совпали и поэтому исследование проводилось для функции $\chi(u, v)$.

При фиксированных значениях $u=u_i$ рассматривались экстремумы функции $\chi(u_i, v)$. В каждом сечении функция $\chi(u_i, v)$, $v > 0$, имеет конечное число экстремумов, причем крайний справа обязательно максимум, а далее $\chi(u_i, v)$ монотонно стремится к нулю при $v \rightarrow +\infty$. При $0,5 \leq u \leq 3$ имеется один максимум, который с ростом u слабо смещается вправо, на фиг. 2 кривым 1–4 соответствуют значения $u=0,5; 1,5; 2,5$ и 3. Расстояние между двумя крайними симметричными максимумами является характеристикой ширины волновой зоны, она имеет порядок глубины жидкости и не связана с геометрическими размерами неровности дна. Это существенно отличает волновую картину в ближнем поле от картины корабельных волн на поверхности однородной жидкости, где ширина волновой зоны вблизи препятствия имеет порядок геометрических размеров препятствия [6].

Значения $u > 3$ соответствуют уже дальнему полю, поскольку при $3,5 \leq u \leq 6,5$ имеются уже два экстремума, при $7 \leq u \leq 13$ — три и т. д. На фиг. 2 кривым 5, 6 соответствуют значения $u=3,5$ и 4,5. Смещение крайних максимумов вправо увеличивается с ростом u и все они лежат на прямой, проходящей через начало координат, что определяет угловой размер в дальнем поле. Таким образом, метод малого параметра, примененный для расчета ближнего поля, позволяет рассчитать амплитудно-фазовую картину волнового движения и в дальнем поле.

Функция $\chi(u, 0)$ — заметно колеблющаяся функция, т. е. волновое движение жидкости усиливается при приближении к оси потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Докучаев В. П., Долина И. С. Излучение внутренних волн источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1977. Т. 13. № 6. С. 655–663.
2. Городцов В. А., Теодорович Э. В. Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16. № 9. С. 954–961.
3. Стурова И. В. Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. С. 200–242.
4. Бежанов К. А., Тер-Крикоров А. М. Многослойные установившиеся течения идеальной несжимаемой жидкости над неровным дном // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 750–760.
5. Snyder W. H., Thompson R. S., Eskridge R. E. et al. The structure of strongly stratified flow over hills: dividing-streamline concept // J. Fluid Mech. 1985. V. 152. P. 249–288.
6. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
7. Тер-Крикоров А. М. Пространственные установившиеся течения слоистой жидкости и внутренние волны // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 127–132.
8. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
9. Дородницын А. А. Некоторые задачи обтекания неровностей поверхности Земли воздушным потоком // Тр. главн. геофиз. обсерватории. 1940. Вып. 31. С. 3–41.
10. Черкесов Л. В. Гидродинамика волн. Киев: Наук. думка, 1980. 259 с.
11. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовиц М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.IV.1986