МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1987

УДК 532.529

О ТЕЧЕНИЯХ С ЗАМКНУТЫМИ ЛИНИЯМИ ТОКА И ДВИЖЕНИИ КАПЕЛЬ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

ВОИНОВ О. В., ПЕТРОВ А. Г.

Предложен общий асимптотический метод описания течений вязкой несжимаемой жидкости с замкнутыми линиями тока при больших числах Рейнольдса, позволяющий вычислять неизвестную постоянную в теореме Прандтля – Бэтчелора для широкого класса задач.

Рассмотрена задача о движении сферической капли в жидкости. Получены и решены уравнения пограничного слоя внутри капли. Показано, что поле скорости внутри капли стремится с ростом числа Рейнольдса к скорости течения вихря Хилла. На основе решения уравнений пограничного слоя выведена формула для постоянной интенсивности вихря внутри капли, подтверждающая общее соотношение, полученное в работе. Проводится сравнение асимптотической теории с численными расчетами различных авторов.

Установлен закон подобия для жидких капель по двум критериям (вместо трех в общем случае) при относительно медленном внутреннем движении. Этот случай обычно имеет место для жидких капель, движущихся в газах при большом числе Рейнольдса.

1. Метод расчета течений с замкнутыми линиями тока при больших числах Рейнольдса. Пусть имеется область V установившегося осесимметричного движения жидкости с замкнутыми линиями тока, ограниченная замкнутой осесимметричной поверхностью тока ∂V. Число Рейнольдса предполагается большим по сравнению с единицей. Как известно [1–4], при больших числах Рейнольдса – в пределе исчезающе малой вязкости $\nu\to 0$ – существует предельный режим движения с замкнутыми линиями тока, в котором абсолютная величина вихря $\omega=\operatorname{rot}\mathbf{v}$ пропорциональна расстоянию до оси симметрии y. В соответствующей плоской задаче вихрь постоянен. Этот факт составляет содержание теоремы Прандтля – Бэтчелора. Известные доказательства этой теоремы содержат определенные допущения [1–4]. В монографии [4] доказательство проведено для плоской задачи в предположении, что на границе

$$\nu\Delta\omega/v\to 0 \qquad (\nu\to 0) \tag{1.1}$$

Доказательство распространяется на осесимметричное течение в аналогичном предположении для величины ω/y.

В соответствии с теоремой предельное поле скоростей $\mathbf{v}_0$ определяется с точностью до постоянного множителя c

$$\mathbf{v}_0=cl^2\boldsymbol{\varphi}_0; \qquad \omega=|\operatorname{rot}\mathbf{v}_0|=cy \tag{1.2}$$

где l – диаметр области V, φ_0 – безразмерная функция, не зависящая от числа Рейнольдса, определяемого по формуле

$$\mathrm{Re}=cl^3/\nu\gg 1$$

Известно немного примеров применения теоремы Прандтля – Бэтчелора [1, 2, 5, 6], использование которой затруднено из-за отсутствия метода вычисления неизвестной постоянной c в предельном решении. В связи с этим представляет интерес отыскание общего класса задач, в котором возможен общий способ определения неизвестной интенсивности вихря c через заданные граничные условия, с тем чтобы получать асимптотические решения соответствующих краевых задач.

В случае задания касательной скорости на границе задача построения асимптотического решения с учетом пограничного слоя около границы достаточно сложна даже для областей частного вида в форме эллипса с малым эксцентриситетом при простейшем условии постоянства скорости на границе [5].

Вместо задач, в которых задается касательная скорость на замкнутой поверхности тока, будем рассматривать общий класс задач, в которых задается касательное напряжение σ_τ на поверхности. При этом для скорости $\mathbf{v}$ на границе ∂V имеет место условие

$$\mu \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{v_2}{h_2}\right)=\sigma_\tau(x_2)=\sigma\tau(x_2), \qquad x_1=0 \tag{1.3}$$

где x_1, x_2 — ортогональные криволинейные координаты, h_1, h_2 — коэффициенты Ламе, τ — безразмерная функция, постоянная величина σ имеет размерность напряжения; $x_1=0$ — уравнение граничной поверхности ∂V.

Проанализируем вид решения в области пограничного слоя вблизи поверхностного тока ∂V, на которой задано касательное напряжение σ_τ. На поверхности тока вне пограничного слоя толщиной порядка $1/\sqrt{\mathrm{Re}}$ выполняется условие (1.1) и скорость $\mathbf{v}$ внутри этой поверхности тока стремится к предельной $\mathbf{v}_0$, которая соответствует постоянной интенсивности вихря. Внутри пограничного слоя скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_0$ могут различаться. Таким образом, скорость внутри V представляется в виде

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\delta\mathbf{v} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{v}_0$ соответствует предельному при $\mathrm{Re}\to\infty$ решению уравнений Навье — Стокса, изменяющемуся на масштабе l, а величина $\delta\mathbf{v}$ представляет собой добавку, которая отлична от нуля в области пограничного слоя и стремится к нулю с удалением от поверхности ∂V.

Масштаб изменения функции $\delta\mathbf{v}$ определяется числом Рейнольдса

$$\delta\mathbf{v}=\delta\mathbf{v}(x,\ x_2), \qquad x=x_1\sqrt{\mathrm{Re}} \tag{1.5}$$

причем $\delta\mathbf{v}\to 0$ при $x\to\infty$.

Дальнейший анализ решения можно сделать при двух допущениях, проверяемых в конце этого анализа: 1) интенсивность вихря имеет порядок $c\sim\sigma/\mu l$, и следовательно, предельная скорость $\mathbf{v}_0\sim cl^2\sim\sigma l/\mu$; 2) уравнения пограничного слоя для $\delta\mathbf{v}$ являются линейными уравнениями.

При выполнении этих условий в силу линейности уравнений и граничных условий относительно $\delta\mathbf{v}$ из (1.2)—(1.5) следует точный вид решения

$$\delta\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\left(\frac{\sigma l}{\mu}\varphi_1+cl^2\varphi_2\right) \tag{1.6}$$

причем функции φ_1, φ_2 от аргументов x и x_2 не зависят от числа Рейнольдса Re. С учетом первого допущения из (1.6) следует, что в пограничном слое величина $\delta v\sim v_0/\sqrt{\mathrm{Re}}$ пренебрежимо мала по сравнению с $\mathbf{v}_0$, т. е. скорость мало меняется в пограничном слое и его уравнения действительно можно писать в линеаризованном виде, если только $\mathrm{Re}\gg 1$. Следовательно, допущение о линейности уравнений пограничного слоя выполнено.

Диссипация энергии в единицу времени E в предельном течении равна

$$E_0=2\mu\int\limits_V e_{ij}^\circ e_{ij}^\circ\, dV\sim c^2l^5\mu \tag{1.7}$$

где e_{ij}° — тензор скоростей деформаций в предельном течении.

Диссипация энергии δE в пограничном слое, дополнительная к диссипации энергии E_0 в предельном течении, равна

$$\delta E=2\mu\int\limits_V (e_{ij}^\circ+\delta e_{ij})(e_{ij}^\circ+\delta e_{ij})\,dV-E_0 \tag{1.8}$$

Учитывая вид возмущенных значений тензора скоростей деформаций δe_{ij}, соответствующего (1.6), и приближенно вычисляя интеграл в (1.8), при $\mathrm{Re}\to\infty$, найдем

$$\delta E\approx\frac{2\mu}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\int\limits_{\partial V} dS\int\limits_0^\infty (2e_{ij}^\circ\delta e_{ij}+\delta e_{ij}\delta e_{ij})h_1\,dx\sim\frac{c^2l^5\mu}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \tag{1.9}$$

Сравнение (1.9) и (1.7) показывает, что диссипация энергии в пограничном слое пренебрежимо мала по сравнению с диссипацией энергии в предельном течении.

Проведенная общая оценка дает основание заключить, что в пределе $\mathrm{Re}\to\infty$ основной является диссипация энергии E_0 на предельном поле скоростей v_0.

В соответствии с сохранением энергии работа касательных напряжений в единицу времени равна диссипируемой энергии внутри неподвижной поверхности ∂V. Поэтому справедливо соотношение

$$E_0=\int\limits_{\partial V}\sigma_\tau v_0\,dS \tag{1.10}$$

Из (1.2), (1.3) и (1.7), (1.10) находим постоянную c в теореме Прандтля — Бэтчелора

$$c=\frac{\sigma}{\mu l}C \tag{1.11}$$

где C — безразмерная постоянная, зависящая только от формы области V замкнутых линий тока.

Соотношение (1.11) убеждает в правильности первого допущения, т. е. существует решение, удовлетворяющее обоим принятым допущениям. Соотношение (1.10) удобно переписать также в эквивалентном виде

$$\mu\int\limits_V|\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0|^2\,dV-2\mu\int\limits_{\partial V}kv_0^2\,dS=\int\limits_{\partial V}\sigma_\tau v_0\,dS \tag{1.12}$$

где k — кривизна линии тока на поверхности ∂V.

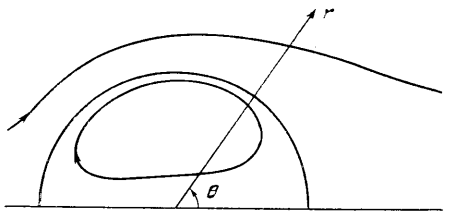
Для шара радиуса a

$$|\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0|=cy,\qquad v_0|_{\partial V}={}^1/_5cay$$

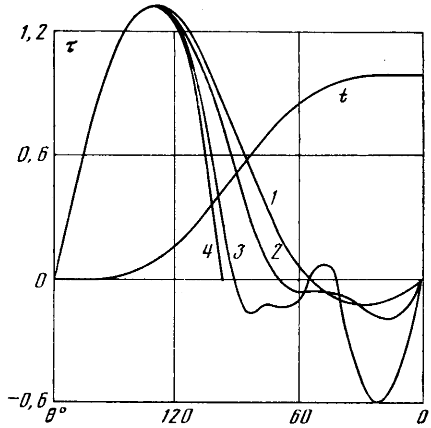
интегралы в (1.12) легко вычисляются и для постоянной c получим

$$C=\frac{c\mu a}{\sigma}=\frac{5}{4}\int\limits_0^\pi\tau\sin^2\theta\,d\theta \tag{1.13}$$

В качестве примера применения изложенного метода ниже построено асимптотическое решение задачи обтекания капли одной жидкости пото-



Фиг. 1



Фиг. 2

ком другой жидкости. В пределе, когда вязкость μ_- внутри капли достаточно велика по сравнению с вязкостью μ_+ снаружи капли, можно пренебречь малой скоростью поверхности капли и получить внешнюю задачу обтекания твердого тела. В этом пределе касательное напряжение σ_τ оказывается равным касательному напряжению на поверхности твердого тела и не зависит от структуры течения внутри капли.

По функции σ_τ, известной из эксперимента и численных расчетов для обтекания твердого шара, будет получено асимптотическое при $\mathrm{Re}\gg 1$ решение внутри сферической капли в соответствии с теоремой о предельном распределении вихря внутри области замкнутых линий тока и замыкающим энергетическим соотношением.

2. Предельная краевая задача. Рассмотрим стационарное движение сферической жидкой капли в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности (фиг. 1). Жидкости считаем вязкими, несжимаемыми. Пусть $\mathbf{v}_+$, $\boldsymbol{\omega}_+$ — соответственно векторы скорости и вихря движения жидкости вне капли, μ_+, ν_+ — динамическая и кинематическая вязкости, ρ_+ — плотность жидкости вне капли. Соответствующие характеристики движения жидкости внутри капли отметим индексом минус.

В сферической системе координат векторы скорости имеют только две отличные от нуля компоненты, а у векторов вихря ω_+, ω_- только одна компонента отлична от нуля. Внутри и вне капли поле скоростей подчиняется системе уравнений Навье — Стокса, в соответствии с которой

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_\pm=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}_\pm=\boldsymbol{\omega}_\pm,\quad (\mathbf{v}_\pm\nabla)\boldsymbol{\omega}_\pm=\nu_\pm\Delta\boldsymbol{\omega}_\pm \tag{2.1}$$

На поверхности сферической капли радиуса a заданы четыре условия: равенства нулю нормальных скоростей, непрерывность тангенциальной скорости v и касательного напряжения

$$v_{\pm n}=0,\quad v_+=v_-,\quad \tau_+=\tau_- \tag{2.2}$$

где касательные напряжения τ_+ вне капли и τ_- внутри нее выражаются через компоненты вихря и скорости

$$\tau_\pm=\mu_\pm(\omega_\pm-v_\pm/a)$$

Кроме того, на бесконечности должно выполняться условие $\mathbf{v}_+\to\mathbf{v}_\infty$.

Введем безразмерные координаты $\mathbf{x}'$, скорости $\mathbf{v}_\pm'$, вихри $\omega_\pm'$ и касательное напряжение τ_+'

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}'a,\quad \mathbf{v}_+=v_\infty\mathbf{v}_+',\quad \boldsymbol{\omega}_+=v_\infty\boldsymbol{\omega}_+'/a$$

$$\mathbf{v}_-=Rv_\infty\mathbf{v}_-',\quad \boldsymbol{\omega}_-=Rv_\infty\boldsymbol{\omega}_-'/a,\quad \tau_+=\sigma\tau_+' \tag{2.3}$$

$$\mathrm{Re}_+=av_\infty/\nu_+,\quad R=\sqrt{\mathrm{Re}_+}\,\mu_+/\mu_-,\quad \sigma=\mu_+v_\infty\sqrt{\mathrm{Re}_+}/a \tag{2.4}$$

Тогда граничные условия (1.2) примут вид

$$v_{\pm n}'=0, \quad v_+'=Rv_-', \quad \omega_-'-2v_-'=\tau_+' \tag{2.5}$$

В пределе при $R\to 0$ для v_+' из (2.1) и (2.5) получается краевая задача для обтекания твердого шара

$$\begin{gathered}\operatorname{div} \mathbf{v}_+'=0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_+'=\boldsymbol{\omega}_+' \\ (\mathbf{v}_+'\nabla)\boldsymbol{\omega}_+'=\frac{1}{\mathrm{Re}_+}\Delta\boldsymbol{\omega}_+' \\ v_{+n}'=0, \quad v_+'=0; \quad \mathbf{v}_+'\to\mathbf{i}, \quad r\to\infty\end{gathered} \tag{2.6}$$

где $\mathbf{i}$ — единичный вектор, направленный по скорости потока в бесконечности.

Из (2.6) определяется предел касательного напряжения τ_+' при $R\to 0$, равный касательному напряжению на твердом шаре $\tau(\theta, \mathrm{Re}_+)$, где θ — угол с осью симметрии.

На фиг. 2 изображены зависимости $\tau(\theta)$ при различных числах Re_+. Цифрами *1* и *2* помечены зависимости, приведенные в [7] при $\mathrm{Re}_+=50$ и 150. Зависимость *3* при $\mathrm{Re}_+=500$ взята из работы [8]. Зависимость *4* построена по экспериментальным данным Фэйджа, приведенным в [9] при $\mathrm{Re}=78\,600$.

Для течения внутри капли при $R\to 0$ получим следующую краевую задачу:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_-'=0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_-'=\omega_-', \quad (\mathbf{v}_-'\nabla)\omega_-'=\varepsilon_0^2\Delta\omega_-' \tag{2.7}$$

$$v_{-n}'=0, \quad \omega_-'-2v_-'=\tau(\theta, \mathrm{Re}_+) \tag{2.8}$$

$$\varepsilon_0^2=\frac{\rho_-\nu_-^2}{\rho_+\nu_+^2}\mathrm{Re}_+^{-1/2}=\frac{1}{\mathrm{Re}}$$

Течение внутри зависит только от функции $\tau(\theta, \mathrm{Re}_+)$ и параметра ε_0, связанного с внутренним числом Рейнольдса Re. Для безразмерной скорости v_-' из (2.7) вытекает уже рассмотренная в разд. 1 краевая задача с граничным условием (1.3). Вихрь внутри капли можно представить в виде

$$\omega_-=yc(1+\delta\omega), \quad \omega_-'=y'C(1+\delta\omega), \quad y'=y/a \tag{2.9}$$

где постоянные c и C определяются из энергетического соотношения (1.13).

Величина $\delta\omega$ и соответствующая ей величина δv определяются в главном приближении из линейного уравнения пограничного слоя, которое описывает конвективную диффузию $\delta\omega$ в поле скоростей вихря Хилла, причем в пограничном слое $\delta v\sim\varepsilon_0$, $\delta\omega\sim 1$.

Аналогично линейность уравнений пограничного слоя имеет место для течения около свободной поверхности [3, 10, 11]. Явление отрыва в этих условиях выражено существенно слабее, чем на твердой поверхности, где $\delta v\sim 1$, $\delta\omega\sim 1/\varepsilon_0$.

В [12] было введено безразмерное число $\sqrt{\Omega}=ca^2/v_\infty$, характеризующее интенсивность внутренней циркуляции в капле. Проведено исследование зависимости деформации капли от Ω и числа Вебера. Энергетическое соотношение (1.12) дает выражение параметра Ω через данные задачи.

Для сферической капли это замыкающее соотношение имеет следующий вид:

$$\frac{\sqrt{\Omega}}{R}=C=\frac{5}{4}\int_0^\pi \tau(\theta, \mathrm{Re}_+)\sin^2\theta\, d\theta \tag{2.10}$$

3. Уравнения для функции тока и вихря внутри капли. Для исследования уравнений конвективной диффузии вихря (2.7) внутри сферической капли удобно ввести естественные ортогональные координаты Кронига, Бринка [13]

$$
\begin{gathered}
x_1=\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta(1-r^2), \qquad x_2=\frac{r^4\cos^4\theta}{4(2r^2-1)} \\
h_1=\frac{1}{r\sin\theta\sqrt{\Delta}}, \qquad h_2=\frac{(2r^2-1)^2}{r^3\cos^3\theta\sqrt{\Delta}}, \qquad h_3=r\sin\theta \\
\Delta=(1-r^2)^2\cos^2\theta+(2r^2-1)^2\sin^2\theta
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

где h_1, h_2, h_3 – коэффициенты Ламе, линии $x_1=\mathrm{const}$ определяют линии тока для вихря Хилла внутри сферы, линии $x_2=\mathrm{const}$ – ортогональное семейство линий.

Введем функцию тока ψ и завихренность ω_-' внутри капли, соответствующие полю скорости v_-'

$$
\psi=C(^1/_5x_1+\delta\psi), \quad \omega_-'=r\sin\theta\, C(1+\delta\omega) \tag{3.2}
$$

где первое слагаемое в выражении для функции тока определяет течение вихря Хилла с интенсивностью C, а второе – течение с завихренностью $\delta\omega$. Множитель C подлежит определению.

На границе капли компонента v_1 скорости v_-' равна нулю, а вторая компонента v_2 находится из соотношения

$$
v_2=\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=\frac{C}{5}\sin\theta+\delta v, \qquad \delta v=\sin\theta\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_1} \tag{3.3}
$$

Краевая задача (2.7) через функции $\delta\psi$ и $\delta\omega$ запишется следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1h_3}\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_2}\right)=-h_1h_2h_3\delta\omega \\
\frac{D(^1/_5x_1+\delta\psi,\delta\omega)}{D(x_1,x_2)}=\frac{\varepsilon^2}{5h_3^2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3^3}{h_1}\frac{\partial\delta\omega}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1h_3^3}{h_2}\frac{\partial\delta\omega}{\partial x_2}\right)\right] \\
\varepsilon^2=5\varepsilon_0^2/C \\
\delta\psi=0, \qquad C\left(\delta\omega+\frac{3}{5}-\frac{2}{\sin\theta}\delta v\right)=\frac{\tau}{\sin\theta}, \qquad x_1=0
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

Ниже исследуется решение краевой задачи (3.4) при $\varepsilon\ll1$, методом сращивания асимптотических разложений [14].

4. Уравнения пограничного слоя. Введем внутреннюю переменную $x=x_1/\varepsilon$ и разобьем область пограничного слоя $x_1\leqslant\varepsilon$ на четыре области. (Аналогичное разбиение выполнено в [15] при интегрировании уравнений нестационарной конвективной диффузии при больших числах Пекле).

В первой области $1-r\leqslant\varepsilon$, $\sin\theta\gg\varepsilon^{1/3}$, собирая главные по ε члены, получим

$$
\frac{\partial\delta\omega}{\partial x_2}=\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial x^2}, \qquad x_2=\frac{1}{4}\cos^4\theta \tag{4.1}
$$

Во второй области вблизи оси симметрии $r^2\sin^2\theta\leqslant\varepsilon$, $1-r\gg\varepsilon^{1/3}$ уравнение для завихренности с точностью до главных членов по ε имеет вид

$$
\frac{\partial\delta\omega}{\partial x_2}=\frac{2\varepsilon(2r^2-1)^2}{r^3(1-r^2)x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial\delta\omega}{\partial x}\right), \qquad x_2=\frac{r^4}{4(2r^2-1)}
$$

В переменных x, r это уравнение упрощается

$$
\frac{\partial\delta\omega}{\partial r}=-\frac{2\varepsilon}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial\delta\omega}{\partial x}\right)
$$

В обоих областях функция тока $\delta\omega$ удовлетворяет уравнению

$$
\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2}=-(h_1h_3)^2\delta\omega=-\frac{\delta\psi}{\Delta} \tag{4.2}
$$

В третьей и четвертой областях, представляющих окрестности носовой и кормовой точек капли, уравнения (3.4) удобно записать в переменных ξ, η

$$
r=1-\varepsilon^{1/3}\xi, \quad \sin\theta=\varepsilon^{1/3}\eta, \quad x=\xi\eta^2 \tag{4.3}
$$

$$\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial\delta\psi}{\partial\eta}=-\varepsilon^{4/3}\eta^2\delta\omega$$

$$\frac{D(^1/_5x+\delta\psi/\varepsilon,\delta\omega)}{D(\xi,\eta)}=O(\varepsilon^{4/3})$$

Решение последнего уравнения (4.3) с точностью до $\varepsilon^4/_3$ имеет вид

$$\delta\omega=f(^1/_5x+\delta\psi/\varepsilon)$$

согласно которому завихренность внутри областей *3* и *4* переносится вдоль линий тока без изменения.

5. **Решение уравнений пограничного слоя.** Уравнение (4.1), определяющее конвективную диффузию вихря в первой области, можно переписать в виде уравнения типа теплопроводности для функции $\delta\omega(t, x)$

$$\frac{\partial\delta\omega}{\partial t}=\frac{4}{3}\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial x^2},\qquad t=\frac{3}{4}\int\limits_{\theta}^{\pi}\sin^3\theta'\,d\theta'=\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^2(2-\cos\theta)\quad(5.1)$$

Зависимость $t(\theta)$ представлена на фиг. 2. При изменении θ от π до 0 функция $t(\theta)$ меняется от 0 до 1.

Во второй, третьей и четвертой областях с точностью до главных членов величина $\delta\omega$ переносится вдоль линий тока без изменения. Поэтому с этой точностью функции $\delta\omega(0, x)$ и $\delta\omega(1, x)$ совпадают, т. е. $\delta\omega(t, x)$ — периодическая по t функция.

Функция $\delta\psi$ удовлетворяет в первой и второй областях уравнению (4.2), на границе $x=0$ — условию $\delta\psi=0$, а вне пограничного слоя потребуем, чтобы скорость течения не отличалась от скорости вихря Хилла, откуда

$$\partial\delta\psi/\partial x\to0,\quad \delta\omega\to0\quad(x\to\infty)\tag{5.2}$$

Решение уравнения (4.2), удовлетворяющее указанным условиям, имеет вид

$$\delta\psi=\frac{\varepsilon^2}{\Delta}\int\limits_0^x dx'\int\limits_{x'}^{\infty}\delta\omega(t,x'')\,dx''\tag{5.3}$$

На границе сферы безразмерная скорость δv определяется через функцию тока (5.3) по (3.4)

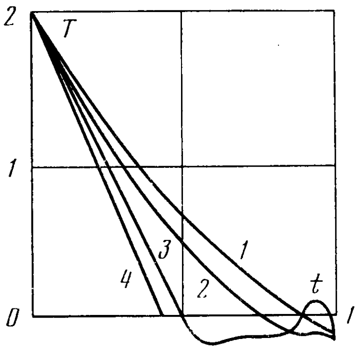
$$\delta v=\frac{\varepsilon}{\sin\theta}\int\limits_0^{\infty}\delta\omega(t,x)\,dx\tag{5.4}$$

Функция $\delta v/\sin\theta\sim\varepsilon$ всюду, за исключением окрестностей кормовой и носовой точек, в которых функция $\delta\psi$ удовлетворяет уравнению (4.3), а $\delta v/\sin\theta\sim\varepsilon^{1/3}$. С точностью до главных по малому параметру ε членов получим вместо (2.8) упрощенное граничное условие при $x=0$

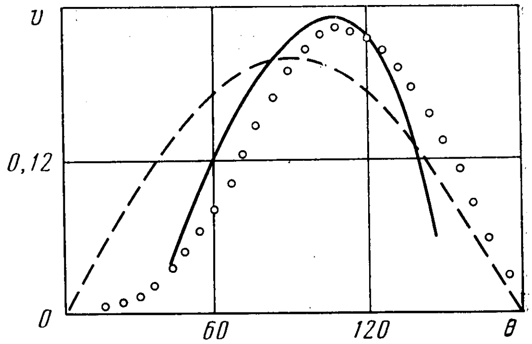
$$C(\delta\omega+{}^3/_5)=T(t),\qquad T=\tau/\sin\theta\tag{5.5}$$

Итак, требуется найти периодическое по t решение уравнения (5.1) с граничным условием (5.5) и условием на бесконечности (5.2). Такое решение нетрудно получить методом Фурье, и оно существует лишь в случае, если средняя за период величина $\delta\omega$ равна нулю [16]. Учитывая это условие существования решения, из (5.5) найдем

$$C=\frac{5}{3}\int\limits_0^1 T(t,\mathrm{Re}_+)\,dt\tag{5.6}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Соотношение (5.6) эквивалентно общему соотношению (1.13), полученному из теоремы о диссипации энергии.

На фиг. 3 изображены зависимости $T(t)$, соответствующие касательным напряжениям τ, изображенным на фиг. 2, для твердого шара при $\mathrm{Re}_+=50$, 150, 500, 78 600.

Ниже представлены значения функции $C(\mathrm{Re}_+)$, найденные численным интегрированием функций $T(t)$.

Re_+	50	150	500	78 600
C	1,3	1,1	0,78	0,7

6. Расчет поправки к скорости в приближении пограничного слоя. Функция $T(t)$, изображенная на фиг. 3 при $\mathrm{Re}_+=50$ и 150, хорошо аппроксимируется функцией

$$T=A_1-A_2t+A_3\cos(2\pi t) \tag{6.1}$$

При $\mathrm{Re}_1=50$ коэффициенты имеют следующие значения: $A_1=1{,}81$; $A_2=2{,}06$; $A_3=0{,}07$.

Периодическое решение уравнения (5.1) с условием (5.5) имеет вид

$$\delta\omega=\frac{1}{C}(-A_2\delta\omega_0+A_3\delta\omega_1) \tag{6.2}$$

где $\delta\omega_0$ и $\delta\omega_1$ удовлетворяют при $x=0$ условиям

$$\delta\omega_0(t,0)=t-{}^1/_2,\quad \delta\omega_1(t,0)=\cos(2\pi t)$$

Соответствующие решения имеют вид

$$\delta\omega_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty y\varphi(y)\sin zy\,e^{-y^2t/4}\,dy-\frac{2z\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2/t}+\left(t-\frac{1}{2}+2z^2\right)\operatorname{erfc}\frac{z}{\sqrt{t}}$$

$$\delta\omega_1=e^{-\sqrt{\pi}z}\cos(2\pi t-\sqrt{\pi}z),\qquad z=\frac{\sqrt{3}}{4}x \tag{6.3}$$

$$\varphi=\frac{1}{u}\left[(1-e^{-u})^{-1}-\frac{1}{2}-u\right],\qquad u=\frac{y^2}{4}$$

Скорость на границе сферы вычисляется по формуле (5.4) с помощью (6.2) и (6.3), откуда находим

$$\delta v=\frac{4\varepsilon}{\sqrt{3}C\sin\theta}\left[-A_2\left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left(\frac{2}{3}t-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\varphi(y)e^{-y^2t/4}\,dy\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{A_3}{\sqrt{2\pi}}\cos\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)\right]; \tag{6.4}$$

7. Сравнение теории с численными расчетами. В соответствии с (2.10) и (1.11) для максимальной скорости на границе капли получим

$$v_{\max}=\max v_-/v_\infty CR\approx 0{,}2 \qquad (7.1)$$

Асимптотика (7.1) достигается при следующем ограничении на параметр R:

$$\max v_-/v_\infty=0{,}2CR\ll 1 \qquad (7.2)$$

Известно немного работ по численным расчетам движения капель. В [7] рассчитано движение капли воды в воздухе. Наиболее подробные расчеты движения капель проведены в [17, 18].

Ниже приведены значения $v_{\max}$, соответствующие данным численных расчетов работ [7, 17, 18] при различных значениях числа Re_+ и безразмерных параметров R и ε_0:

Источник	[7]	[7]	[17]	[17]	[18]
R	0,13	0,22	0,07	0,007	0,7
ε_0	0,10	0,044	0,053	0,053	0,17
Re_+	50	150	50	50	50
$v_{\max}$	0,22	0,18	0,21	0,71	0,22

Как видно из приведенных выше данных, все значения $v_{\max}$ близки к теоретическому 0,2, кроме $v_{\max}=0{,}71$. Причина этого единственного несоответствия обсуждается в разд. 8.

В целом изложенная теория согласуется с расчетами [7, 17, 18].

Формула (7.1) может служить простым тестом для проверки правильности численных расчетов при условиях $\varepsilon\ll 1$ и (7.2).

На фиг. 4 проведено сравнение скорости на границе сферы, полученной теоретически с помощью (3.4) и (6.4), с численными данными [7] при $\mathrm{Re}_+=50$, $R=0{,}129$, $\varepsilon=0{,}19$. Штриховая линия — главное приближение, сплошная — с учетом ε, точки — данные [7].

8. Критерии подобия. Из теории подобия известно, что задача о стационарном движении сферической капли в вязкой несжимаемой жидкости имеет три безразмерных критерия подобия [19, 20], за которые удобно выбрать

$$\mathrm{Re}_+, \qquad R=\frac{\mu_+}{\mu_-}\mathrm{Re}_+^{1/2}, \qquad \varepsilon_0^2=\frac{\rho_-\nu_-^2}{\rho_+\nu_+^2}\mathrm{Re}_+^{-1/2} \qquad (8.1)$$

Первый параметр определяет толщину пограничного слоя вне капли, второй — интенсивность вихря внутри капли и третий — толщину пограничного слоя внутри капли.

При ограничении (7.2) на R скорость внутри капли v_-, отнесенная к $v_\infty R$, находится из решения краевой задачи (2.7), в которую входят только два параметра: Re_+ и ε_0, т. е. отношение $v_-/v_\infty R$ зависит только от двух параметров Re_+ и ε_0. Безразмерные характеристики течения вне капли зависят только от Re_+.

Полученный вывод существенно упрощает теоретическое и экспериментальное исследования задачи движения капель в вязкой жидкости.

Из сказанного, в частности, следует, что величина $v_{\max}$ зависит только от Re_+ и ε_0. Однако из данных численных расчетов работы [17], помещенных в третьем и четвертом столбцах таблицы, видно, что для одних и тех же значений Re_+ и ε_0 получены два различных значения $v_{\max}$. Возможно это соответствует двум решениям одной и той же краевой задачи (2.7).

Вопрос о возможной неединственности требует дополнительного исследования.

Представленные здесь расчеты справедливы при ограничении (7.2), т. е. при достаточно малом R, когда скорость внутренней циркуляции существенно меньше скорости поступательного движения капли. Противоположный случай, когда R достаточно велико, изучен в [6]. Предельное течение в этом случае совпадает с течением вихря Хилла, в котором скорость внутренней циркуляции на границе сферы непрерывно сшивается со скоростью потенциального обтекания сферы. Уравнения пограничного слоя оказываются линейными не только внутри капли, но и вне ее, а скорость падения капель находится по диссипации энергии на течении идеальной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Batchelor G. K.* On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt 2. P. 177–190.
2. *Пухначев В. В.* Неклассические задачи теории пограничного слоя // Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1979. 74 с.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.
5. *Wood W. W.* Boundary layers whose streamlines are closed // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. Pt 1. P. 77–88.
6. *Harper J. F., Moore D. W.* The motion of a spherical liquid drop at high Reynolds number // J. Fluid Mech. 1968. V. 32. Pt 2. P. 367–391.
7. *Le Clair B. P., Hamielec A. E., Pruppacher H. R., Hall W. D.* A theoretical and experimental study of the internal circulation in water drops falling at terminal velocity in air // J. Atmosph. Sci. 1972. V. 29. № 4. P. 728–740.
8. *Rimon G., Cheng S. I.* Numerical solution of a uniform flow over a sphere at intermediate Reynolds numbers // Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 5. P. 949–959.
9. *Tomotica S., Imai I.* The distribution of laminar skin friction on a sphere placed in a uniform stream // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1936. V. 20. № 3. P. 288–303.
10. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
11. *Moore D. W.* The boundary layer on a spherical gas bubbles // J. Fluid Mech. 1963. V. 16. Pt 2. P. 161–176.
12. *Петров А. Г.* Функция Лагранжа для вихревых течений и динамика деформированных капель // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 79–94.
13. *Kronig R., Brink J.* On the theory of extraction from falling droplets // Appl. Sci. Res. A. 1951. V. 2. № 2. P. 142–154.
14. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
15. *Головин А. М., Животягин А. Ф.* Нестационарный конвективный массоперенос внутри капли при наличии объемной химической реакции // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 771–780.
16. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
17. *Ривкинд В. Я., Рыскин Г. М.* Структура течения при движении сферической капли в жидкой среде в области переходных чисел Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 1. С. 8–15.
18. *Ривкинд В. Я., Рыскин Г. М., Фишбейн Г. А.* Обтекание сферической капли в переходной области чисел Рейнольдса // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 741–745.
19. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.
20. *Гонор А. Л., Ривкинд В. Я.* Динамика капли // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 17. С. 86–189.

Москва

Поступила в редакцию
2.X.1985