

УДК 532.526

**ДЕМПФИРУЮЩИЙ ФАКТОР В ТЕОРИИ ПУТИ  
СМЕЩЕНИЯ ПРАНДТЛЯ<sup>1</sup>**

**ЗЯБРИКОВ В. В., ЛОЙЦЯНСКИЙ Л. Г.**

Введение в классическую формулу Прандтля дополнительного, учитывающего влияние молекулярной вязкости множителя — «демпфирующего фактора» — позволяет, опираясь на модель взаимодействия молекулярного и молярного обмена импульсом между слоями осредненного турбулентного движения, описать процесс течения в переходном участке пристенной области турбулентного пограничного слоя.

Применение наряду с универсальными формами физических переменных специальных консервативных переменных, связь между которыми не зависит от условий на внешней границе пограничного слоя, расширяет возможности применения метода к пристенной области градиентного пограничного слоя. Сравнительная трудоемкость расчета по консервативным формулам вызвала выдвижение значительно более простых и вместе с тем достаточно точных аппроксимационных формул.

**1. Уравнение Рейнольдса переноса импульса и замыкающая его обобщенная формула Прандтля. Демпфирующий фактор.** В основу настоящего исследования положено уравнение плоского стационарного турбулентного пограничного слоя в форме Рейнольдса, выражающее перенос импульса между слоями осредненного потока

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (1.1)$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_t = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \left( 1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right), \quad \nu_t = l^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

Здесь  $\psi(x, y)$  — функция тока,  $\tau$  — полное напряжение трения между слоями осредненного турбулентного движения, в котором в отличие от прандтлевских величин

$$l_P, \nu_{tP} = l_P^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_{tP} = \rho l_P^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

не учитывающих взаимодействие молекулярного вязкого и молярного турбулентного переносов в переходном участке, под  $l, \nu_t, \tau_t$  подразумеваются действительные, учитывающие это взаимодействие величины. Назовем переходной функцией двучлен  $f = 1 + \nu_t/\nu$ , удовлетворяющий в вязком подслое ( $\nu_t = 0$ ) условию  $f = 1$ , а в турбулентном ядре, где взаимодействие отсутствует ( $\nu_t = \nu_{tP}$ ), равенству

$$f = 1 + R, \quad R = \frac{\nu_{tP}}{\nu} = \frac{l_P^2}{\nu} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.3)$$

Здесь  $R$  — локальное число Рейнольдса [1]<sup>2</sup>. Величину отношений

$$\frac{\tau_t}{\tau_{tP}} = \frac{\nu_t}{\nu_{tP}} = \left( \frac{l}{l_P} \right)^2 = D \quad (1.4)$$

<sup>1</sup> Содержание статьи доложено на заседании VI Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Ташкент, 24–30 сентября 1986 г.

<sup>2</sup> Переменная  $R$  была введена Л. Г. Лойцянским в статье [1] в 1933 г и в дальнейшем была использована многими авторами без ссылки на первоисточник.

выражающую демпфирующее влияние вязкости жидкости на турбулентные характеристики движения, будем именовать демпфирующим фактором.

Из определений переходной функции  $f$  и выражений (1.4) непосредственно следует ее связь с демпфирующим фактором  $D$

$$f = 1 + \frac{\nu_t}{\nu_{IP}} \frac{\nu_{IP}}{\nu} = 1 + DR, \quad D = \frac{f-1}{R} \quad (1.5)$$

Исключая производную  $\partial u / \partial y$  из равенств (1.2) и (1.3), найдем важное соотношение

$$Rf = l_p^2 \tau / (\rho \nu^2) \quad (1.6)$$

которое в дальнейшем послужит уравнением связи между переменной  $R$  и физической переменной  $y$ .

**2. Взаимодействие молекулярного и турбулентного обменов.** Разобьем осредненный турбулентный поток [1-4] на слои толщиной  $l_p$  и, принимая во внимание малость толщин слоев, будем считать относительные движения в слоях приблизительно подобными друг другу. Выберем за масштабы длин  $l_p$ , относительных скоростей — разность осредненных скоростей на верхней и нижней границах слоев  $V$ , напряжений трения —  $\rho V^2$

$$V = u(y + l_p) - u(y) = l_p \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \rho V^2 = \rho l_p^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \tau_{IP}$$

Тогда в принятом предположении локального подобия будем иметь следующие числа подобия: локальное число Рейнольдса  $R$  (см. (1.4)) и локальное число Эйлера

$$E = \frac{\tau_t}{\rho V^2} = \frac{\tau_t}{\tau_{IP}} = D$$

Согласно II-теореме теории размерностей (новый ее вывод дан в [5] и подробно изложен в [6]), будут справедливы равенства

$$D = D(R), \quad f = f(R) \quad (2.1)$$

вид которых определен ниже из дополнительных предположений.

**3. Универсальные переменные в пристенной области.** В проводимом далее анализе используются два типа масштабов и переменных в физической плоскости: прандтлевские ( $\tau_w$  — напряжение трения на стенке) и стратфордские [7]

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad l_* = \frac{\nu}{v_*}, \quad \tau_*^{(m)} = \rho v_*^2 = \tau_w \quad (3.1)$$

$$u_* = \frac{u}{v_*}, \quad \eta_* = \frac{y v_*}{\nu}, \quad \tau_* = \frac{\tau}{\tau_w}$$

$$v_s = \alpha^{1/3}, \quad l_s = \frac{\nu}{v_s}, \quad \tau_s^{(m)} = \rho v_s^2 = \rho \alpha^{2/3} \quad (3.2)$$

$$u_s = \frac{u}{v_s}, \quad \eta_s = \frac{y \alpha^{1/3}}{\nu}, \quad \tau_s = \frac{\tau}{\tau_s^{(m)}}$$

$$\alpha = \frac{\nu}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (3.3)$$

Здесь индекс  $m$  отличает масштаб от безразмерной переменной, выраженной в этом масштабе.

По самому своему смыслу масштабы, в частях которых определяются безразмерные величины, должны иметь конечное и отличное от нуля значения. Сечение пограничного слоя, в котором это условие не выполняется,

назовем особым. Таким особым сечением для прандтлевских переменных (3.1) является отрывное сечение. Для стрэтфордовских масштабов (3.2) особым будет безградиентное сечение, т. е. сечение, в котором  $dp/dx=0$ . Переход от прандтлевских масштабов к стрэтфордовским совершается при помощи переводных коэффициентов  $p_s$  и  $p_*$  и может быть представлен следующими соотношениями:

$$p_* = \frac{\nu}{v_*^3} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{\alpha}{v_*^3}, \quad p_s = \frac{v_*^2}{\alpha^{1/2}} \quad (3.4)$$

$$p_* = p_s^{-1/2}, \quad p_s = p_*^{-2} \quad (3.5)$$

$$\frac{v_*}{v_s} = p_*^{-1/3} = p_s^{1/2}, \quad \frac{l_*}{l_s} = p_*^{1/3} = p_s^{-1/2}, \quad \frac{\tau_*^{(m)}}{\tau_s^{(m)}} = p_*^{-2/3} = p_s \quad (3.6)$$

$$\frac{u_*}{u_s} = p_*^{1/3} = p_s^{-1/2}, \quad \frac{\eta_*}{\eta_s} = p_*^{-1/3} = p_s^{1/2}, \quad \frac{\tau_*}{\tau_s} = p_*^{2/3} = p_s^{-1} \quad (3.7)$$

Отметим, что в промежуточной между безградиентным и отрывным сечениями части диффузорного пограничного слоя ( $dp/dx > 0$ ) находится нейтральное сечение, в котором прандтлевские и стрэтфордовские масштабы, а также безразмерные переменные совпадают

$$p_* = p_s = 1, \quad v_* = v_s, \quad l_* = l_s, \quad \tau_*^{(m)} = \tau_s^{(m)} \quad (3.8)$$

$$u_* = u_s, \quad \eta_* = \eta_s, \quad \tau_* = \tau_s$$

Нейтральное сечение делит пристенную область на две, расположенные друг за другом подобласти пограничного слоя: безотрывную, где  $-\infty < p_\infty \leq 1$ , занимающую в продольном направлении почти весь пограничный слой, и предотрывную, где  $0 \leq p_s \leq 1$ , сосредоточенную непосредственно перед отрывным сечением. Профиль скорости в нейтральном сечении мало отличается от профиля скорости в отрывном сечении, что свидетельствует о тонкости предотрывной области. В области турбулентного ядра отрывного сечения профиль скорости подчиняется известному «закону половинной степени» [7, 8]. Заметим, что автор работы [7] ошибочно распространил область справедливости этого закона вплоть до стенки, что эквивалентно предположению об отсутствии вязкого подслоя и переходного участка. По свойству прилипания вязкой жидкости к твердой стенке вязкий подслон сохраняется конечным по толщине вдоль всего пограничного слоя безотносительно к тому, будет подобласть безотрывной или предотрывной. Последнее утверждение относится и к отрывному сечению.

Локальные числа Рейнольдса  $R$ , как это следует из его определения (1.3) и уравнение связи (1.6), будучи выражены в универсальных переменных (3.1), (3.2), примут вид

$$R_* = \lambda_{P*}^2 \frac{du_*}{d\eta_*}, \quad R_s = \lambda_{PS}^2 \frac{du_s}{d\eta_s} \quad (3.9)$$

$$\lambda_{P*} = \frac{l_P v_*}{\nu}, \quad \lambda_{PS} = \frac{l_P v_s^{(m)}}{\nu} \quad (3.10)$$

$$R_* f(R_*) = \lambda_{P*}^2 \tau_*, \quad R_s f(R_s) = \lambda_{PS}^2 \tau_s \quad (3.11)$$

где  $\lambda_{P*}$ ,  $\lambda_{PS}$  — универсальные значения прандтлевского пути смешения.

**4. Консервативные формулы для переходной функции и демпфирующего фактора.** Для определения переходной функции и демпфирующего фактора используем прием интерполяции для разыскания функции по двум ее асимптотам, соответствующим малым и большим значениям аргумента. Первая асимптотика переходной функции  $f(R)$  в области малых  $R$  соответствует «закону четвертой степени» убывания кинематического

коэффициента турбулентной вязкости при приближении к твердой стенке:  $\nu_t/\nu = \gamma \kappa^4 \eta_*^4$ ,  $\kappa = 0,4$ . Здесь  $\gamma = 0,0092$  по [9],  $\gamma = 0,0125$  по [10]. Так как при малых  $\eta_*$   $du_*/d\eta_* = 1$ , то, полагая при этом  $\lambda_{p*} = \kappa \eta_*$ , согласно (3.9) получим  $R_* = \kappa^2 \eta_*^2$ .

Отсюда в области малых  $\eta_*$  найдем выражение для первой асимптотики

$$f_-(R_*) = 1 + \gamma R_*^2 \quad (4.1)$$

При больших  $R_*$  переходная функция  $f$  уже была определена равенством (1.9)

$$f_+(R_*) = 1 + R_* \quad (4.2)$$

Интерполяционные значения  $f(R_*)$  по этим двум асимптотикам найдем для разрывного и непрерывного вариантов

$$f(R_*) = \frac{1}{2} [f_+(R_*) + f_-(R_*)] + \frac{1}{2} [f_+(R_*) - f_-(R_*)] \text{sign}(R_* - R_{*k}) \quad (4.3)$$

$$f(R_*) = \frac{1}{2} [f_+(R_*) + f_-(R_*)] + \frac{1}{2} [f_+(R_*) - f_-(R_*)] \frac{2}{\pi} \arctg[\beta(R_* - R_{*k})] \quad (4.4)$$

$$\text{sign}(R_* - R_{*k}) \sim \frac{2}{\pi} \arctg[\beta(R_* - R_{*k})]$$

Легко проверить, что формула (4.3) удовлетворяет условиям

$$f(R_*) = f_-(R_*) \quad (R_* < R_{*k}), \quad f(R_*) = f_+(R_*) \quad (R_* > R_{*k})$$

а формула (4.4) — тем же условиям, но только асимптотически при  $\beta \rightarrow \infty$ . Значение  $\beta = 100$  было принято достаточным для сглаживания разрыва, при этом результаты расчета профиля скорости по формулам (4.3) и (4.4) практически совпадают. Параметр  $R_{*k}$  играет роль критического значения локального числа Рейнольдса и характеризует переход от ламинарного режима движения в вязком подслое к турбулентному в турбулентном ядре. Уменьшение параметра  $R_{*k}$  при большом положительном градиенте давления сильно влияет на профиль скорости, уменьшая значения скорости в логарифмической области по сравнению с универсальными логарифмическим профилем скорости. Этот факт был не так давно экспериментально установлен рядом авторов, в частности [11, 12]. Поскольку в этом случае влияние параметра  $p_*$  изменяет профиль скорости даже сильнее, чем учитываемое в настоящей статье влияние параметра  $R_{*k}$ , ограничимся рассмотрением малых градиентов давления. В этом предположении будем считать параметр  $R_{*k}$  постоянным и равным значению в безградиентном сечении. Принятие такого упрощающего предположения делает формулы (4.3), (4.4) консервативными, т. е. сохраняющими свой вид независимо от условий на внешней границе пограничного слоя и характеризующего его рейнольдсова числа [13].

Переменные  $R$ ,  $f$ ,  $D$ , входящие в консервативные соотношения, также назовем консервативными. Чтобы перейти от консервативной переменной  $R_*$  к физической  $\eta_*$ , нужно исключить первую из совокупности равенств (3.11), (4.4). Назовем такой процесс преобразованием к физической переменной. Для его выполнения необходимо задаться зависимостями  $\lambda_{p*}$  и  $\tau_*$  от переменной  $\eta_*$ , а также выбрать значение критического рейнольдсова числа  $R_{*k}$ .

**5. Распределения скоростей и напряжений трения. Гипотеза консервативности профилей скорости в турбулентном ядре пристенной области.** Выведем сначала пригодные для рассматриваемой в настоящей статье

тонкой зоны пристенной области, состоящей из вязкого подслоя и переходного участка, приближенные формулы для напряжения трения. Положим левую часть основного уравнения турбулентного пограничного слоя в форме Рейнольдса (1.1) равной нулю, т. е. пренебрежем конвективным ускорением. Интегрируя полученное уравнение от 0 до  $y$ , получим известную двучленную формулу напряжения трения  $\tau = \tau_w + (dp/dx)y$  и запишем ее в универсальных переменных (3.1), (3.2)

$$\tau_* = 1 + p_* \eta_*, \quad \tau_s = p_s + \eta_s \quad (5.1)$$

Для определения распределений скоростей в сечениях пристенной области выразим формулу (1.2) в универсальных масштабах

$$\tau_* = \frac{\partial u_*}{\partial \eta_*} + \lambda_{P*}^2 D_* \left( \frac{\partial u_*}{\partial \eta_*} \right)^2, \quad \tau_s = \frac{\partial u_s}{\partial \eta_s} + \lambda_{PS}^2 D_s \left( \frac{\partial u_s}{\partial \eta_s} \right)^2 \quad (5.2)$$

Совокупность равенств (5.1) и (5.2) дает квадратное уравнение относительно производных  $\partial u_*/\partial \eta_*$  и  $\partial u_s/\partial \eta_s$ . Разрешая их, а затем интегрируя решения по поперечной координате, будем иметь

$$u_* = 2 \int_0^{\eta_*} \frac{(1 + p_* \eta_*) d\eta_*}{1 + \sqrt{1 + 4(1 + p_* \eta_*) \lambda_{P*}^2 D_*}}, \quad u_s = 2 \int_0^{\eta_s} \frac{(p_s + \eta_s) d\eta_s}{1 + \sqrt{1 + 4(p_s + \eta_s) \lambda_{PS}^2 D_s}} \quad (5.3)$$

Вычисление профилей скорости станет возможным лишь после задания прандтлевского пути смещения  $\lambda_P$  и определения демпфирующего фактора  $D$  в функции от физической координаты  $\eta$ .

Перейдем к определению формулы для длины пути смещения в пристенной части турбулентного пограничного слоя при наличии градиента давления. Первые попытки ограничивались применением к градиентному пограничному слою классической формулы длины пути смещения в безградиентном слое

$$\lambda_{P*} = \kappa \eta_* \quad (5.4)$$

Как это следует из (5.3), предположение о консервативности последнего соотношения противоречит экспериментальному факту сохранения одного и того же отрезка прямой профиля скорости, построенного в полупологарифмическом масштабе при различных, но сравнительно малых положительных и отрицательных значениях параметра  $p_*$ . В литературе этот факт получил название закона Г. Людвига и В. Тильмана по имени авторов, впервые его обнаруживших [14]. Графики, подтверждающие справедливость этого закона, можно найти на рис. 11.11 монографии [15, с. 75] и на рис. 2.2 монографии [13, с. 24] (последний воспроизводит результаты работы [16]). Систематическое сопоставление экспериментальных данных [17] окончательно подтвердило справедливость закона Г. Людвига и В. Тильмана в пограничных слоях с малыми градиентами давления.

Отказавшись от предположения о консервативности пути смещения, положим в основу вывода формулы для пути смещения закон консервативности логарифмического участка профиля скорости. Полагая во внутренней части турбулентного ядра потока демпфирующий фактор равным единице и пренебрегая молекулярной вязкостью по сравнению с турбулентной, перепишем (5.3) в виде

$$u_* = \int \frac{\sqrt{1 + p_* \eta_*}}{\lambda_{P*}} d\eta_* + B_* \quad (5.5)$$

Согласно принятой для малых градиентов давления гипотезе консервативности логарифмических участков профилей скорости, последняя формула должна приводить к логарифмическому закону  $u_* = (\kappa^{-1}) \ln \eta_* + B_*$  ( $\kappa = 0,4$ ;  $B_* = 5,1$  по [17]) независимо от  $p_*$ , следовательно, должно быть

$$\lambda_{p_*} = \kappa \eta_* \sqrt{1 + p_* \eta_*} \quad (5.6)$$

Впервые последняя формула, записанная через напряжение турбулентного трения  $\tau_*$ , была предложена в [18]. В том же виде формула (5.6) присутствует в [19], где авторы, сопоставляя результаты расчетов с экспериментальными данными, доказали ее преимущество по сравнению с формулой (5.4). Заметим, что при  $p_* \rightarrow 0$  формулы (5.4) и (5.6) совпадают.

**6. Результаты расчетов. Формула для демпфирующего фактора в физических переменных.** Сосредоточим внимание на безотрывной области, для которой имеются надежные экспериментальные результаты, относящиеся к малым значениям  $p_*$ . Для предотрывной области ( $p_* > 1$ ) таких экспериментальных данных нет. Отсутствует и метод сращиваемых асимптотических разложений, необходимый для описания предотрывной зоны турбулентного пограничного слоя. С учетом полученных для напряжения трения и длины пути смещения формул (5.1) и (5.6) для осуществления преобразования к физической переменной образуем основную систему уравнений из консервативной формулы для  $f$  (4.4), выражения  $D$  через  $f$  (1.5), уравнения связи (3.11) и формулы для профиля скорости (5.3).

Для определения критического числа  $R_{*k}$  в безградиентном сечении зададим ряд его конкретных значений и с помощью численного решения основной системы уравнений определим соответствующие значения  $B_*$  (фиг. 1). Связь между  $B_*$  и  $R_{*k}$  в исследованном диапазоне  $R_{*k}$  оказывается линейной. Принимая как наиболее достоверное значение  $B_* = 5,1$  [17], найдем по этому графику  $R_{*k} = 13$  и примем это значение в дальнейших расчетах не только для безградиентного, но и для других сечений турбулентного пограничного слоя с малыми значениями  $p_*$ . Изменяя значения  $p_*$  при фиксированном  $R_{*k} = 13$  и применяя вновь процесс преобразования к физической переменной, определим  $D_*(\eta_*, p_*)$ .

Это семейство кривых с параметром  $p_*$  показано на фиг. 2 сплошными линиями 1-3:  $p_* = 0,1$ ; 0;  $-0,005$ . На фиг. 2 также представлены результаты экспериментов для  $p_* = 0$ : 4-5 - данные работ [20] и [21]. Приведенные на фиг. 2 экспериментальные данные определены на основе имеющихся в цитированных статьях результатов прямых измерений турбулентных напряжений трения  $\tau_t = \langle -\rho u'v' \rangle$ , а также экспериментального профиля скорости  $u_*(\eta_*)$  из [22]. На этой же фигуре штрихпунктирными линиями показана аппроксимация кривых  $D_*(\eta_*, p_*)$  кусочно-гладким семейством

$$D_{*a} = 0,0008 \eta_*^2 (1 + p_* \eta_*)^2 \quad (0 \leq \eta_* < \eta_{*0}), \quad D_{*a} = 1 \quad (\eta_* \geq \eta_{*0}) \quad (6.1)$$

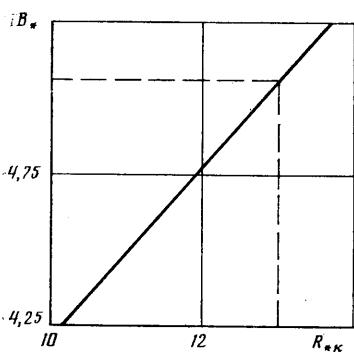
$$D_{*a}(\eta_*) = 0,0008 \eta_*^2 \quad (0 \leq \eta_* < 36), \quad D_{*a}(\eta_*) = 1 \quad (\eta_* \geq 36) \quad (6.2)$$

где  $\eta_{*0}$  - координата, в которой значение  $D_{*a}$  становится равным единице. Формула (6.2) соответствует частному случаю отсутствия градиента давления и оказывается более точной и простой, чем широко распространенная формула Ван-Дрифта [23]

$$D_{v*}(\eta_*) = [1 - \exp(-\eta_*/A_*)]^2, \quad A_* = 26 \quad (6.3)$$

Кривая, построенная по (6.3), показана на фиг. 2 штриховой линией.

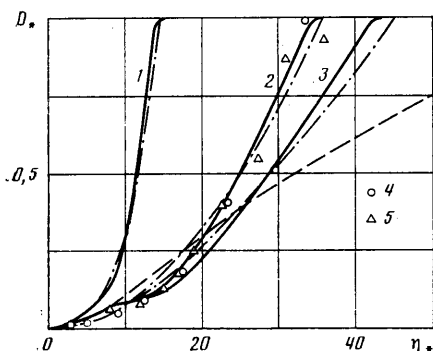
Полученные в настоящей работе точная и аппроксимационная формулы обладают еще одним весьма важным преимуществом по сравнению с



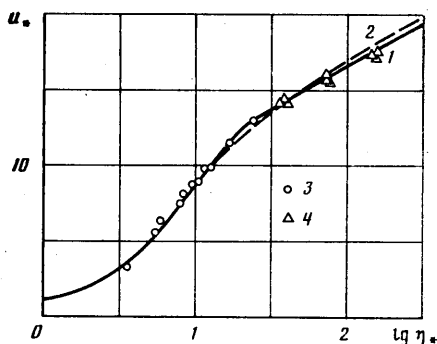
Фиг. 1

формулой Ван-Дрифта: координата внешней границы переходного участка, определенная по этим формулам для безградиентного пограничного слоя  $\eta_{*0} \approx 34-36$ , соответствует многочисленным экспериментальным данным, в то время как формула Ван-Дрифта дает для этой величины явно завышенное значение  $\sim 140$ .

После определения  $D_*(\eta_*, p_*)$  можно построить семейство профилей скорости с параметром  $p_*$ , используя для этого уравнение (5.3). Полученное семейство при малых  $p_*$  мало разнится по сравнению с профилем, отвечающим значению  $p_*=0$  и представленным на фиг. 3 сплошной линией 1. Профиль скорости, рассчитанный с помощью формулы



Фиг. 2



Фиг. 3

Ван-Дрифта (6.3), показан на фиг. 3 штриховой кривой 2; она мало отличается от сплошной кривой, но все же отклонения заметны. Экспериментальные точки, соответствующие опытам [22], обозначены цифрой 3, а результаты эксперимента № 1400 Стэнфордской конференции [17] — цифрой 4.

Для расширения диапазона рассматриваемых градиентов давления необходимо заменить гипотезу консервативности логарифмических участков профилей скорости более общей гипотезой консервативности наклона логарифмических прямых, а также учесть переменность критического числа Рейнольдса  $R_{*к}$ . Это выходит, однако, за рамки настоящей статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Турбулентное движение жидкости и внутренняя задача // Изв. науч.-исслед. ин-та гидротехники. 1933. Т. 9. С. 1-30.
2. Лойцянский Л. Г. Перенос тепла в турбулентном движении // ПММ. 1960. Т. 24, вып. 4. С. 637-645.
3. Loitsianski L. G. Sur l'action reciproque de la transmission moleculaire et molaire dans l'ecoulement turbulent // Proc. 10th Intern. Congr. of Applied Mech., Stresa, Italy, 1960. Amsterdam - New York: Elsevier Publ. Comp., 1962. P. 202-204.
4. Лойцянский Л. Г. Демпфирующий фактор к формуле Прандтля для переходного участка турбулентного пограничного слоя // Инж.-физ. журн. 1983. Т. 45. № 6. С. 924-932.
5. Görtler H. Zur Geschichte des П-Theorems // Z. angew. Math. und Mech. 1975. В. 55. Н. 1. S. 3-8.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
7. Stratford B. S. The prediction of separation of the turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Pt 1. P. 1-16.

8. *Кагер Б. А., Яглом А. М.* Влияние шероховатости и продольного градиента давления на турбулентные пограничные слои // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1984. Т. 18. С. 3–111.
9. *Deissler R.* Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer, and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt number // NASA. 1955. Rep. № 1210. 14 p.
10. *Hanratty Th.* Study of turbulence close to a solid wall // Phys. Fluids, Suppl. 1967. P. 125–133.
11. *Хабахпашева Е. М., Ефименко Г. И.* Структура турбулентного течения в плоском диффузоре // Структура вынужденных и термогравитационных течений. Новосибирск, 1983. С. 5–31.
12. *Ляхов В. К., Деветерикова М. И., Украинский Ю. Ф., Грабарник С. Я.* О нарушении «закона стенки» в потоках с положительным градиентом давления. М., 1982. 12 с. – Деп. в ВИНТИ 29.04.82, № 2124.
13. *Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В.* Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973. 256 с.
14. *Ludwig H., Tillmann W.* Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten // Ing.-Arch. 1949. B. 17. H. 4. S. 288–299.
15. *Роттв И. К.* Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1967. 232 с.
16. *Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler P. W.* The structure of turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Pt 4. P. 741–773.
17. Proc. Comp. of turbulent boundary layer 1968. AFOSR – 1 Fr., Stanford Conference; Univ. of Stanford, Thermosciencis Division, Dep. of Mech. Eng., California, USA; 1969, v. 2.
18. *Reeves B. L.* Two-layer model of turbulent boundary layers // AIAA Journal. 1974. V. 12. № 7. P. 932–939.
19. *Nituch M. J., Sjolander S., Head M. R.* An improved version of Cebeci – Smith eddy-viscosity model // Aeronaut. Quart. 1978. V. 29. № 3. P. 207–225.
20. *Мизайлова Е. С., Хабахпашева Е. М.* Турбулентное трение в вязком подслое и переходной области при течении воды в плоском канале // Структура пристенного пограничного слоя: вынужденное течение, тепловая конвекция/Под ред. Кутателадзе С. С., Хабахпашевой Е. М. Новосибирск: 1978. С. 46–63.
21. *Schubauer G. B.* Turbulent processes as observed in boundary layer and pipe // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. № 2. P. 188–196.
22. *Lauffer J.* The structure of turbulence in fully developed flow // NASA Rep. № 1174. 1954. 18 p.
23. *Van-Driest E.* On turbulent flow near a wall // J. Aeronaut. Sci. 1956. V. 23. № 11, p. 1007–1011.

Ленинград

Поступила в редакцию  
21.X.1986