МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1987

УДК 532.51.013.4:536.2

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ ВИБРАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ В НЕВЕСОМОСТИ

БРАВЕРМАН Л. М.

В рамках линейной теории исследуется устойчивость новой равновесной конфигурации, возможной в плоском слое неизотермической жидкости, совершающем вибрации высокой частоты в невесомости. Рассмотрение ведется на основании уравнений вибрационной конвекции. Изучена неустойчивость относительно одномерных и плоских возмущений. Для одномерных возмущений получено элементарное точное решение.

Вибрационно-конвективная неустойчивость жидкости в невесомости изучалась в ряде работ [1–3].

Рассмотрим плоский слой жидкости, ограниченный твердыми теплопроводными плоскостями $z=\pm h$. В жидкости задан однородный градиент температуры $\nabla\Theta_0$, направленный под произвольным углом ϑ к оси z; для определенности будем считать его лежащим в плоскости zy, так что $\nabla\Theta_0=(0;\ A\sin\vartheta;\ A\cos\vartheta)$. Единичный вектор $\mathbf{n}$, определяющий направление оси вибрации, также лежит в плоскости zy и составляет с осью z угол α: $\mathbf{n}=(0;\ \sin\alpha;\ \cos\alpha)$.

Уравнения вибрационной конвекции в безразмерной форме приведены, например, в [1] и имеют следующий вид:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{1}{P}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\nabla p+\Delta\mathbf{v}+R(w\nabla)(T\mathbf{n}-\mathbf{w})$$

$$P\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla T=\Delta T;\qquad T\mathbf{n}=\mathbf{w}+\nabla\varphi \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0;\qquad \operatorname{div}\mathbf{w}=0,\qquad P=\frac{\nu}{\chi};\qquad R=\frac{(Ab\Omega\beta h^2)^2}{2\nu\chi}$$

Здесь $\mathbf{v}$, T, p — соответственно осредненные скорость, температура и давление; $\mathbf{w}$ — соленоидальная часть поля $T\mathbf{n}$ (по существу $\mathbf{w}$ — амплитуда пульсационной компоненты скорости); $\nabla\varphi$ — потенциальная часть поля $T\mathbf{n}$; P и R — число Прандтля и вибрационное число Рэлея; b и Ω — амплитуда и частота вибраций; ν, χ, β — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения.

На твердых границах исчезают осредненная скорость и нормальная составляющая поля $\mathbf{w}$: $\mathbf{v}|_s=0$; $w_n|_s=0$, а температура задана. При определенной форме полости, распределении температуры и направлении оси вибрации в жидкости возможно механическое квазиравновесие, т. е. состояние, в котором отсутствует осредненное течение, а остальные поля стационарны.

Условия равновесия получаются из (1) и имеют следующий вид:

$$\nabla(\mathbf{w}_0\mathbf{n})\times\nabla T_0=0;\qquad \Delta T_0=0,\qquad \operatorname{rot}(\mathbf{w}_0)=\nabla T_0\times\mathbf{n} \tag{2}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{w}_0)=0;\qquad w_{0n}|_s=0$$

(равновесные поля снабжены индексом ноль).

Можно показать, что конфигурация, описанная выше, равновесна; безразмерные равновесные поля имеют следующий вид:

$$\nabla T_0=\{0;\ \sin\vartheta;\ \cos\vartheta\},\qquad \mathbf{w}_0=\{x\sin\vartheta(\operatorname{tg}\vartheta\cos\alpha-\sin\alpha);\ y(\sin\alpha-$$
$$-\operatorname{tg}\vartheta\cos\alpha)\sin\vartheta+z\sin(\alpha-\vartheta);\ 0\}\tag{3}$$

Введем нормальные возмущения равновесия (3), периодические по продольным координатам x и y, так, что все возмущения пропорциональны $\exp\{-\lambda t+i(k_1x+k_2y)\}$.

Линеаризуя систему (1) около положения равновесия, получим после перенормировки давления (в давление включается потенциальная часть виброконвективной силы) следующую систему амплитудных уравнений, описывающую эволюцию малых возмущений:

$$-\lambda v_x=-ik_1p+v_x''-k^2v_x,\qquad -\lambda v_y=-ik_2p+v_y''-k^2v_y+RD\sin\vartheta$$
$$-\lambda v_z=-p'+v_z''-k^2v_z+RD\cos\vartheta,\qquad -\lambda PT+v_y\sin\vartheta+v_z\cos\vartheta=T''-k^2T\tag{4}$$
$$\varphi''-k^2\varphi=ik_2T\sin\alpha+T'\cos\alpha$$
$$D=T(\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\vartheta)-ik_2\varphi\sin\alpha-\varphi'\cos\alpha$$
$$i(k_1v_x+k_2v_y)+v_z'=0,\qquad k^2=k_1^2+k_2^2$$

На твердых теплопроводных гранях слоя выполняются однородные граничные условия

$$v=T=\varphi'=0;\qquad z=\pm1\tag{5}$$

Изучим устойчивость равновесия относительно некоторых типов возмущений.

Рассмотрим следующую моду: возмущение скорости не имеет поперечной компоненты, так что $\mathbf{v}=(v_x(x;\ y;\ z);\ v_y(x;\ y;\ z);\ 0)$, $T=T(x;\ y;\ z)$; $\varphi=\varphi(x;\ y;\ z)$. С помощью последнего уравнения системы (4) получается связь между продольными компонентами скорости: $v_x=-\varepsilon v_y$, где $\varepsilon\equiv k_2/k_1$. Исключая из (4) компоненту скорости v_x и давление, получим

$$v_y''-(k^2-\lambda)v_y+\frac{R}{(1+\varepsilon^2)}\sin\vartheta[T(\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\vartheta)-$$
$$-ik\varepsilon\varphi\sin\alpha-\varphi'\cos\alpha]=0$$
$$T''-(k^2(1+\varepsilon^2)-\lambda P)T-v_y\sin\vartheta=0\tag{6}$$
$$\varphi''-k^2(1+\varepsilon^2)\varphi-ik\varepsilon T\sin\alpha-T'\cos\alpha=0$$
$$v_y=T=\varphi'=0;\qquad z=\pm1$$

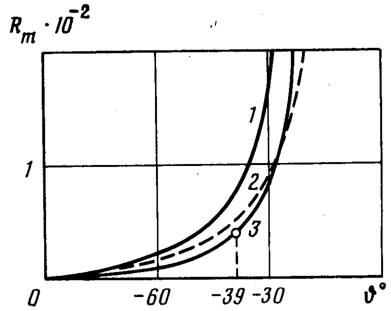
Здесь обозначено $k\equiv k_1$.

Если $\varepsilon=0$, отлична от нуля лишь компонента скорости v_y; сами амплитуды при этом от y не зависят

$$v_y''-(k^2-\lambda)v_y+R\sin\vartheta[T(\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\vartheta)-\varphi'\cos\alpha]=0$$
$$T''-(k^2-\lambda P)T-v_y\sin\vartheta=0,\qquad \varphi''-k^2\varphi-T'\cos\alpha=0\tag{7}$$
$$v_y=T=\varphi'=0;\qquad z=\pm1$$

Краевая задача (7) допускает элементарное точное решение. При этом существует два типа решений с четным и нечетным профилями скорости

$$v_y=\left\{\begin{matrix}\cos\varkappa_nz\\ \sin\varkappa_nz\end{matrix}\right\},\qquad T=-\frac{\sin\vartheta}{\varkappa_n^2+k^2}v_y$$
$$\varphi=-\frac{\varkappa_n\sin\vartheta\cos\alpha}{(\varkappa_n^2+k^2)^2}\left\{\begin{matrix}\sin\varkappa_nz\\ \cos\varkappa_nz\end{matrix}\right\}\tag{8}$$



Фиг. 1

Здесь $\varkappa_n=(\pi/2)(n+1)$; $n=0, 2, 4,\ldots$ для четной моды, $n=1, 3, 5,\ldots$ для нечетной моды.

Анализ выражения для декрементов λ показывает, что неустойчивость относительно данной моды монотонна $(\operatorname{Im}(\lambda)=0)$.

Спектр критических чисел Рэлея, определяющих границу устойчивости четных и нечетных решений, дается общей формулой

$$R_n=-\frac{(\varkappa_n^2+k^2)^3}{\sin^2\vartheta\cos^2\alpha[(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\vartheta)k^2+\varkappa_n^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\vartheta]}\qquad(n=0,1,2,\ldots)\tag{9}$$

По определению, вибрационное число Рэлея неотрицательно; это требование ограничивает интервал значений углов ϑ и α, при которых возможна обсуждаемая мода неустойчивости. Отметим, что прямая $\vartheta=-\pi/2$ является частью границы, разделяющей области устойчивости и неустойчивости, при любом значении α.

Легко убедиться, что минимум выражения (9) достигается при $k\to 0$ (длинноволновая неустойчивость). При этом имеем

$$R_n=-\frac{\varkappa_n^4}{\sin^2\vartheta\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\vartheta}\qquad(n=0,1,2,\ldots)\tag{10}$$

Зависимость критического числа Рэлея от ϑ для $n=0$ (нижний четный уровень) представлена на фиг. 1. Из (10) видно, что кривые $R_n(\vartheta)$ для углов α и $(90°-\alpha)$ совпадают так, что кривая *1* соответствует $\alpha=15$ и $75°$, а кривая *3* – $\alpha=45°$.

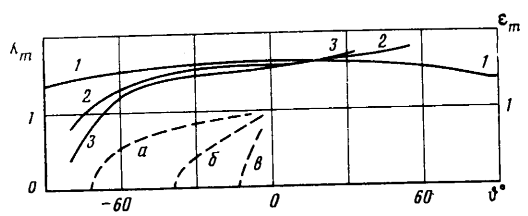
Рассмотрим случай $\varepsilon\neq 0$ (отличны от нуля компоненты скорости v_x и v_y; возмущение скорости «повернуто» относительно оси y на угол $\gamma=-\operatorname{arctg}\varepsilon$). Система (6), описывающая эволюцию малых возмущений, решалась в этом случае численно методом Рунге – Кутта.

Как и в описанном выше случае, неустойчивость является монотонной и длинноволновой. Расчеты показывают, что для любого угла α существует такой угол ϑ_*, что при $\vartheta>\vartheta_*$ происходит смена типа неустойчивости: наиболее опасными становятся возмущения с $\varepsilon\neq 0$.

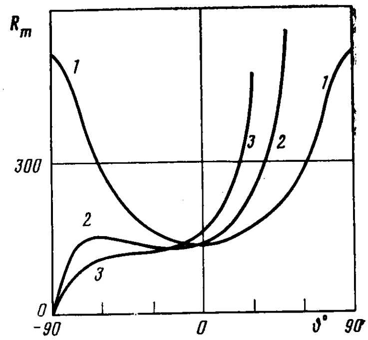
На фиг. 1 штриховой линией (кривая *2*) изображена проминимизированная по ε нейтральная кривая, соответствующая $\alpha=75°$. Смена типа неустойчивости происходит при $\vartheta_*=-72°$. Масштаб графика не позволяет изобразить соответствующие нейтральные кривые для других углов α, поэтому для $\alpha=45°$ отмечена точка $\vartheta_*=-39°$, где ответвляется новая мода; при $\alpha=15°$ это происходит при $\vartheta_*=-13°$.

На фиг. 2 представлена зависимость значений параметра $\varepsilon_m(\vartheta)$, при которых достигается минимум устойчивости; кривые *а–в* соответствуют $\alpha=75$, 45, 15°.

Рассмотрим теперь двумерные возмущения скорости с отличной от нуля поперечной компонентой. Ограничимся рассмотрением плоской за-



Фиг. 2



Фиг. 3

дачи; возмущения имеют структуру

$$\mathbf{v}=(0;\ v_y(y,\ z);\ v_z(y,\ z));\quad T=T(y,\ z);\qquad \varphi=\varphi(y,\ z)$$

Вводя обычным образом функцию тока $\psi(y,\ z)$, исключая из (4) давление и полагая $\lambda=0$, получим

$$\psi^{\text{IV}}-2k^2\psi''+k^4\psi+R[(\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\vartheta)(T'\sin\vartheta-ikT\cos\vartheta)-$$

$$-\varphi''\cos\alpha-k^2\varphi\sin\alpha-ik\varphi'(\sin\alpha-\cos\alpha)]=0 \qquad (11)$$

$$T''-k^2T-\psi'\sin\vartheta-ik\psi\cos\vartheta=0,\qquad \varphi''-k^2\varphi-T'\cos\alpha-ikT\sin\alpha=0$$

Граничные условия имеют вид: $\psi=\psi'=T=\varphi'=0$; $z=\pm1$. В (11) обозначено $k\equiv k_2$.

Краевая задача (11) решалась численно методом Рунге — Кутта; определялось минимальное по k критическое число Рэлея. Зависимость $R_m(\vartheta)$ для углов $\alpha=90$, 80, 70° (кривые *1*, *2*, *3*) представлена на фиг. 3. Неустойчивость относительно рассматриваемой моды является монотонной.

При $\alpha=90°$ зависимость $R_m(\vartheta)$ симметрична относительно значения $\vartheta=0$; при $\alpha\neq90°$ симметрия нарушается, причем при $\alpha>\alpha_*$ кривая немонотонна (имеются локальные максимум и минимум), а при $\alpha<\alpha_*$ нейтральная кривая становится монотонной. Значение $\alpha_*\approx73°$.

На фиг. 2 представлена зависимость значений волнового числа $k_m(\vartheta)$, при которых достигается минимум числа Рэлея, для некоторых углов α (кривая *1* соответствует $\alpha=90°$, *2* — $\alpha=80°$, *3* — $\alpha=70°$). Расчет показывает, что для всех $\alpha\neq90°$ $k_m\to0$ при $\vartheta\to-90°$.

Автор выражает благодарность Г. З. Гершуни за постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершуни Г. З., Жуковицкий Е. М.* О конвективной неустойчивости жидкости в вибрационном поле в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 12—19.
2. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Вибрационная тепловая конвекция в невесомости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. С. 86—105.
3. *Браверман Л. М.* К вопросу о вибрационно-конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 178—180.

Пермь

Поступила в редакцию
17.XI.1986