

УДК 532.526

О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА БЫСТРО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

НЕГОДА В. В., СЫЧЕВ Вик. В.

Рассматривается плоское стационарное течение несжимаемой жидкости около вращающегося в однородном набегающем потоке кругового цилиндра. На основе асимптотического анализа уравнений Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса показано, что при некотором значении угловой скорости цилиндра возникает взаимодействие течения в пограничном слое с внешним потенциальным потоком. Численно получено решение, описывающее течение в области взаимодействия.

1. Визуальные наблюдения стационарного течения около вращающегося в потоке жидкости кругового цилиндра [1] указывают на существование некоторого критического значения его угловой скорости. При значениях угловой скорости, больших критического, течение безотрывное и «вокруг цилиндра образуется вращающееся жидкое кольцо» [1], а при меньших имеет место отрывное обтекание. Настоящая работа посвящена исследованию течений при значениях скорости вращения, близких к критическому.

Рассмотрим плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около вращающегося с заданной постоянной угловой скоростью кругового цилиндра. Согласно Прандтлю [2], при больших числах Рейнольдса в поле течения можно выделить две характерные области: внешний потенциальный поток и вязкий пограничный слой вблизи поверхности цилиндра. При этом во внешней области течение описывается решением Рэлея для безотрывного обтекания цилиндра с циркуляцией.

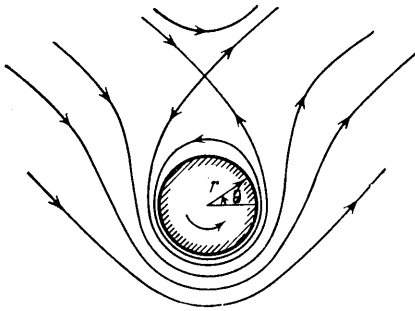
Введем следующие обозначения: $r_0 r$, θ — полярные координаты, где $r_0 r$ — расстояние от центра цилиндра радиуса r_0 , θ — угол, отсчитываемый против часовой стрелки в направлении вращения цилиндра (фиг. 1), u_∞ , p_∞ — скорость и давление однородного набегающего потока; $r_0 u_\infty \psi$ — функция тока, $p_\infty + \rho u_\infty^2 r$ — давление, ρ — плотность жидкости; $R = u_\infty r_0 / \nu$ — число Рейнольдса, ν — коэффициент кинематической вязкости. Значения скорости всюду отнесены к u_∞ .

Следуя [2], предположим, что предельное состояние поля течения при $R \rightarrow \infty$ описывается решением Рэлея. Соответствующее выражение для комплексного потенциала, отнесенного к $r_0 u_\infty$, имеет вид

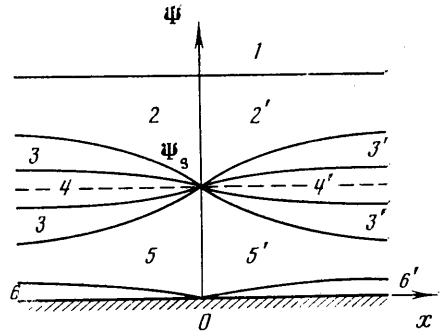
$$w(z) = z + \frac{1}{z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z, \quad z = r e^{i\theta} \quad (1.1)$$

где $r_0 u_\infty \Gamma$ — циркуляция. На фиг. 1 представлена картина линий тока этого течения при $\Gamma > 4\pi$, когда критическая точка находится в плоскости z на луче $\theta = \pi/2$ на расстоянии $l_0 = [\Gamma + (\Gamma - 16\pi^2)^{1/2}] / 4\pi$ от поверхности цилиндра.

Для удовлетворения условию прилипания при $r=1$ и определения значения Γ необходимо рассмотреть течение в пограничном слое. Введем ортогональные координаты x , y , связанные с поверхностью цилиндра: $x = \theta - \pi/2$, $y = r - 1$. Безразмерные значения компонент вектора скорости вдоль этих осей обозначим через u , v .



Фиг. 1



Фиг. 2

На внешней границе пограничного слоя распределения скорости $u_e(x)$ и давления $p_e(x)$ определяются решением (1.1) при $|z|=1$. Поскольку вблизи поверхности тела имеет место течение с замкнутыми линиями тока (при $\Gamma > 4\pi$), то решение уравнений пограничного слоя должно удовлетворять условию периодичности по x .

Запишем уравнения пограничного слоя вместе с соответствующими краевыми условиями в переменных Мизеса

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dp_e}{dx} = u \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \Psi} \right), \quad \frac{\partial Y}{\partial \Psi} = \frac{1}{u}, \quad V = u \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$u = u_w, \quad Y = V = 0 \quad (\Psi = 0), \quad u \rightarrow u_e(x) \quad (\Psi \rightarrow \infty) \quad (1.2)$$

$$u(x, \Psi) = u(x + 2\pi, \Psi), \quad u_e = \frac{\Gamma}{2\pi} - 2 \cos x$$

$$p_e = \frac{1}{2} (1 - u_e^2), \quad 0 \leq x \leq 2\pi; \quad \Psi = R^{1/2} \psi, \quad Y = R^{1/2} y, \quad V = R^{1/2} v$$

где $u_w > 0$ — скорость вращения поверхности цилиндра.

Решение задачи (1.2) при $u_w \rightarrow \infty$ находится путем разложения по степеням малого параметра u_w^{-1} [3–5]. Для конечных значений u_w решение этой задачи было получено численно [6]. Оказалось, что каждому значению u_w соответствует определенное значение Γ , причем решение существует для всех значений $u_w > u_w^* = 3,85$ и соответственно $\Gamma > \Gamma^* = 6,00\pi$, а при критическом значении $u_w = u_w^*$ в решении возникает особенность. (Согласно экспериментальным данным [1], критическое значение $u_w \approx 4$.)

Причина возникновения этой особенности состоит в следующем. Пограничный слой, который развивается на движущейся вниз по потоку поверхности, при значениях $\pi < x < 2\pi$ находится под действием неблагоприятного градиента давления и вследствие этого в профиле скорости появляется точка минимума. По мере уменьшения значения u_w (и соответственно Γ) величина этого минимума также уменьшается, а при критическом значении $u_w = u_w^*$ она обращается в нуль и в пограничном слое появляется точка Мура — Ротта — Сирса (см. [7]), в которой $u = \partial u / \partial Y = 0$. Продольная координата этой точки $x=0$ совпадает [6] с точкой максимума в распределении давления $p_e(x)$

$$p_e' = -\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + O(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\lambda_1 = 2q_0, \quad \lambda_2 = 0, \quad q_0 = \frac{\Gamma^*}{2\pi} - 2 \quad (1.3)$$

$$p_e(0) = p_{00} = \frac{1}{2} (1 - q_0^2)$$

Анализ решения в окрестности точки $x=0$ [8] показал, что особенность в ней устранима, т. е. решение задачи (1.2) при $u_w = u_w^*$ может быть непрерывно продолжено через эту точку.

Таким образом, исходное предположение, согласно которому в области внешнего потенциального течения решение имеет вид (1.1), при $u_w < u_w^*$ становится несправедливым, но остается в силе, если $u_w > u_w^*$. При этом, согласно теореме Жуковского, цилиндр подвержен со стороны жидкости действию силы, перпендикулярной направлению невозмущенного потока. Это есть так называемый эффект Магнуса (см. [9]).

2. Возникающая при $u_w = u_w^*$ особенность характеризуется неограниченным ростом толщины пограничного слоя при $|x| \rightarrow 0$ и, следовательно, в некоторой окрестности этого сечения исходные предположения теории пограничного слоя Прандтля будут нарушены. Представляет интерес рассмотреть течение при значениях u_w , близких к критическому. Положим, что

$$u_w = u_w^* + \varepsilon u_w^1 + o(\varepsilon), \quad \Gamma = \Gamma^* + \varepsilon \Gamma_1 + o(\varepsilon) \quad (2.1)$$

где u_w^1, Γ_1 — постоянные порядка единицы, а параметр $\varepsilon = \varepsilon(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, причем $\varepsilon > O(R^{-1/2})$. Подставляя разложение для Γ (2.1) в (1.1), находим, что

$$w = w_0(z) + \varepsilon w_1(z) + o(\varepsilon), \quad w_1 = -\frac{i\Gamma_1}{2\pi} \ln z \quad (2.2)$$

а $w_0(z)$ определяется выражением (1.1) при $\Gamma = \Gamma^*$.

В области пограничного слоя при этом решение также представляется в виде разложения по ε , и для главных членов приходим к задаче (1.2) с $u_w = u_w^*$, $\Gamma = \Gamma^*$. Согласно [8], при $|x| \rightarrow 0$ особое решение этой задачи имеет многослойную структуру (фиг. 2). В верхней части пограничного слоя (области 2 и 2'), где $\Psi = O(1)$, оно имеет вид

$$u = u_0^+(\Psi) + x u_1^+(\Psi) + x^2 u_2^+(\Psi) + O(x^3) \\ Y = \kappa_0 |x|^{-1/2} + y_0^+(\Psi) + b_0 + o(1) \quad (2.3)$$

$$V = -\frac{\kappa_0}{2} |x|^{-1/2} \text{sign}(x) u_0^+(\Psi) + o(|x|^{-1/2})$$

$$u_1^+ = (u_0^+ u_0^{+'})', \quad u_2^+ = \lambda_1 (2u_0^+)^{-1} + \frac{1}{2} (u_0^+ u_1^+)'$$

$$y_0^+ = \int \frac{d\Psi}{u_0^+(\Psi)}, \quad \kappa_0 = \frac{\Gamma^2 (1/4) \lambda_1^{-1/4}}{2\sqrt{\pi a_0}}$$

где a_0, b_0 — некоторые постоянные.

Разложения (2.3) становятся несправедливыми в той части пограничного слоя, где продольная составляющая вектора скорости стремится к нулю. Это происходит в области локально-невязкого течения, где $\Psi - \Psi_s = O(|x|^{1/2})$ (области 3 и 3') и соответствующее решение может быть представлено в виде

$$u = |x| \varphi_0(\xi) + O(|x|^{3/2}), \quad Y = |x|^{-1/2} z_0(\xi) + O(\ln |x|)$$

$$\varphi_0 = (a_0^2 \xi^4 + \lambda_1)^{1/2}, \quad z_0 = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{ds}{\varphi_0(s)}$$

$$\xi = \frac{\Psi - \Psi_s}{|x|^{1/2}}, \quad \Psi_s = \text{const} > 0 \quad (2.4)$$

Выражения для $V(x, \Psi)$ определяются из третьего уравнения (1.2) и в дальнейшем выписываться не будут. При $\xi \rightarrow \infty$ решение (2.4) сраци-

ваются с (2.3) и поэтому

$$u_0^+ = a_0(\Psi - \Psi_s)^2 + O[(\Psi - \Psi_s)^3] \quad (\Psi \rightarrow \Psi_s + 0)$$

При $\xi \rightarrow -\infty$ (2.4) сводится к решению для областей 5 и 5', охватывающих нижнюю часть пограничного слоя. Здесь решение, удовлетворяющее условию непротекания при $\Psi = 0$, есть

$$\begin{aligned} u &= u_0^-(\Psi) + x u_1^-(\Psi) + x^2 u_2^-(\Psi) + O(x^3) \\ Y &= y_0^-(\Psi) + O(x), \quad u_1^- = (u_0^- u_0'^-)' \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$u_2^- = \lambda_1 (2u_0^-)^{-1} + \frac{1}{2} (u_0^- u_1^-)''', \quad y_0^- = \int_0^\Psi \frac{ds}{u_0^-(s)}$$

$$u_0^- = a_0(\Psi_s - \Psi)^2 + O[(\Psi_s - \Psi)^3] \quad (\Psi \rightarrow \Psi_s - 0)$$

Заметим, что вблизи линии тока $\Psi = \Psi_s$ лежит также вязкий подслой (области 4 и 4'), в котором $\Psi - \Psi_s = O(|x|)$. Однако для главных членов разложений при $|x| \rightarrow 0$ решение здесь представляет собой переразложение решения для областей 3 и 3' [8]. Поэтому если ограничиться анализом главных членов разложений, что и будет сделано ниже, то в рассмотрении областей 4 и 4' нет необходимости.

Наконец, для удовлетворения условия прилипания необходимо ввести вязкий пристеночный подслой (области 6 и 6'). Здесь

$$\begin{aligned} u &= u_w^* + \sum_{n=1}^4 |x|^{n/2} \omega_n(\xi) + O(|x|^{5/2}), \quad \xi = \Psi (2u_w^* |x|)^{-1/2} \\ \omega_1 &= d_1 \xi, \quad \omega_2 = d_2^* \xi^2, \quad \omega_3 = -\frac{d_3}{3} \xi^3 - (d_3 + d_3^*) \xi \operatorname{sign}(x) \\ \omega_4 &= d_4^* \xi^4 + d_4^\circ \xi^2 \operatorname{sign}(x), \quad d_2^* = -\frac{d_1^2}{2u_w^*}, \quad d_3^* = \frac{3}{2} \frac{d_1^3}{u_w^{*2}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Постоянные d_4^* , d_4° выражаются через d_1 , d_3 , λ_1 и u_w^* . Решение для функции $Y(x, \Psi)$ находится из второго уравнения (1.2) и здесь не приводится.

Выражения (2.3), (2.4) указывают, что основной вклад в вытесняющее действие пограничного слоя оказывает течение в его локально-невязкой части (области 3 и 3'), где продольная составляющая $u(x, \Psi)$ принимает минимальные значения, причем $u_{\min} = \sqrt{\lambda_1} |x| + O(x^2)$ при $|x| \rightarrow 0$.

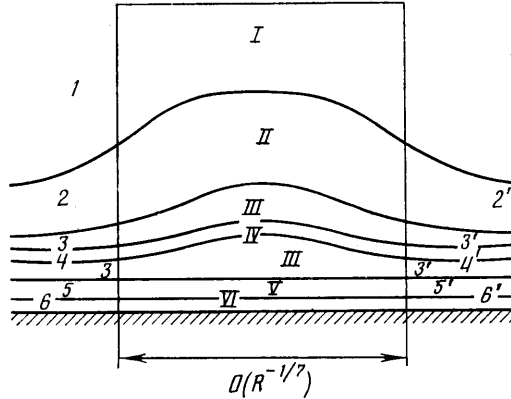
Заметим, что функции $u_0^+(\Psi)$ и $u_0^-(\Psi)$ в (2.3), (2.5), которые характеризуют профиль скорости при $x=0$, а следовательно, и постоянные a_0 , b_0 , Ψ_s , d_1 , d_3 , определяются из решения задачи (1.2) в целом.

Обратимся к решению в области внешнего потенциального течения (область 1) в окрестности рассматриваемой точки $z=i$. Используя выражения (2.2) и (2.3), получим следующее асимптотическое разложение для комплексной скорости dw/dz при $|Z| = |z-i| \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dZ} &= -q_0 - i q_1 Z + q_2 Z^2 + O(Z^3) + \varepsilon [-q_0^* + O(Z)] + \\ &+ \dots + R^{-1/2} \left[\frac{1}{2} q_0 \kappa_0 (1-i) Z^{-1/2} + o(Z^{-1/2}) \right] + o(R^{-1/2}) \\ q_0 &= q_1 = \frac{\Gamma^*}{2\pi} - 2, \quad q_2 = \frac{\Gamma^*}{2\pi} - 3, \quad q_0^* = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь члены порядка $R^{-1/2}$ обусловлены вытесняющим действием пограничного слоя.

Разложение (2.7) становится несправедливым при $|Z|=O(R^{-1/7})$, поскольку член $O(Z^2)$ здесь порядка $R^{-1/2}Z^{-1/2}$ и, следовательно, вытесняющее действие, которое оказывает пограничный слой, начинает влиять на изменения продольной составляющей вектора скорости и давления. Таким образом, при $|Z|=O(R^{-1/7})$ возникает взаимодействие течения в пограничном слое с внешним потенциальным потоком. Из сказанного также заключаем, что значение параметра ε в (2.2), (2.7) следует положить равным $R^{-2/7}$, поскольку в этом случае параметр Γ_1 , характеризующий степень отклонения угловой скорости от ее критического значения u_w^* , влияет на течение в области взаимодействия. При $\varepsilon < O(R^{-2/7})$ это влияние (в первом приближении) отсутствует.



Фиг. 3

3. Перейдем к анализу течения в области взаимодействия. Рассматривая разложения (2.3), (1.3) при $\Psi=O(1)$ и $|x|\rightarrow 0$ (области 2 и 2') как внешние и вводя внутреннюю переменную порядка единицы $x^*=R^{1/7}x$, представим решение в верхней части пограничного слоя области взаимодействия (область II, фиг. 3) в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0^+(\Psi) + R^{-1/7}U_1^+(x^*, \Psi) + R^{-2/7}U_2^+(x^*, \Psi) + o(R^{-2/7}) \\ y &= R^{-3/7}G^*(x^*) + R^{-1/2}[y_0^+(\Psi) + b_0] + o(R^{-1/2}) \\ v &= R^{-2/7}V_0^+(x^*, \Psi) + o(R^{-2/7}) \\ p &= p_{00} + R^{-2/7}P_1^+(x^*, \Psi) + o(R^{-2/7}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставляя эти асимптотические разложения в исходные уравнения Навье — Стокса, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1^+}{\partial \Psi} &= 0, \quad P_1^+ = p^*(x^*), \quad U_1^+ = x^*u_1^+ \\ U_2^+ &= -\frac{p^*}{u_0^+} + \frac{x^{*2}}{2}(u_0^+u_1^+)''', \quad V_0^+ = u_0^+G^{*'} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь и в (3.1) функции $u_1^+(\Psi)$, $y_0^+(\Psi)$ определяются выражениями из (2.3), а $p^*(x^*)$ и $G^*(x^*)$ остаются пока произвольными. Из сравнения с решением в областях 2 и 2' известно только, что $p^* \rightarrow -\lambda_1 x^{*2}/2$, $G^* \rightarrow \kappa_0 |x^*|^{-1/2}$ при $|x^*| \rightarrow \infty$.

Увеличение толщины пограничного слоя при $|x| \rightarrow 0$, определяемое выражением из (2.3), приводит к тому, что в области взаимодействия она становится величиной $O(R^{-3/7})$.

В нижней части области взаимодействия (область V), которая является продолжением областей 5 и 5' и сохраняет толщину исходного по-

граничного слоя, решение аналогично (3.1), (3.2)

$$\begin{aligned}
 u &= u_0^-(\Psi) + R^{-1/7} U_1^-(x^*, \Psi) + R^{-2/7} U_2^-(x^*, \Psi) + o(R^{-2/7}) \\
 y &= R^{-1/2} y_0^-(\Psi) + O(R^{-9/14}), \quad U_1^- = x^* u_1^- \\
 \frac{\partial U_2^-}{\partial x^*} &= -\frac{p^*}{u_0^-} + x^*(u_0^- u_1^-)''
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $u_1^-(\Psi)$, $y_0^-(\Psi)$ — функции из (2.5). Поперечное изменение давления здесь, как и в других областях пограничного слоя области взаимодействия (области II, III, IV, VI на фиг. 3), в первом приближении отсутствует и, следовательно, оно определяется выражениями (3.1), (3.2). Поэтому разложения для давления в дальнейшем выписываться не будут. При $|x^*| \rightarrow \infty$ решение (3.3) сращивается с (2.5), а при $\Psi = 0$ удовлетворяет условию непротекания.

Вблизи линии тока $\Psi = \Psi_s$ лежит область медленного течения III — продолжение областей \mathcal{Z} и \mathcal{Z}' . Переходя в (2.4) к внутренней переменной $x^* = R^{1/7} x$, нетрудно видеть, что решение здесь может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 \Psi - \Psi_s &= R^{-1/14} \Psi^*, \quad u = R^{-1/7} u_0^*(x^*, \Psi^*) + O(R^{-3/14}) \\
 y &= R^{-3/7} y_0^*(x^*, \Psi^*) + O(R^{-1/2} \ln R)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

После подстановки этого разложения в исходные уравнения находим, что

$$\frac{u_0^{*2}}{2} + p^* = H_0(\Psi^*), \quad \frac{\partial y_0^*}{\partial \Psi^*} = \frac{1}{u_0^*} \tag{3.5}$$

Таким образом, в области III течение локально-невязкое, а вид функции Бернулли $H_0(\Psi^*)$ определяется из сращивания с решением (2.4) при $|x^*| \rightarrow \infty$. В результате получим

$$H_0 = \frac{a_0^2}{2} \Psi^{*2}, \quad y_0^* = \int_{-\infty}^{\Psi^*} \frac{ds}{(a_0^2 s^4 - 2p^*)^{1/2}} \tag{3.6}$$

Проводя сращивание решений (3.4) — (3.6) и (3.1) — (3.3) для областей II и V при $|\Psi^*| \rightarrow \infty$ и $|\Psi - \Psi_s| \rightarrow 0$, находим, что

$$G^* = \frac{\kappa_0 \lambda_1^{1/4}}{(-2p^*)^{1/4}}, \quad G^{*'} = \lim_{\Psi^* \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial y_0^*}{\partial x^*} \right) = \frac{\kappa_0 \lambda_1^{1/4}}{2^{3/4}} \frac{p^{*'}}{(-p^*)^{5/4}} \tag{3.7}$$

Таким образом, в полученном решении вытесняющее действие создается медленным течением в нелинейной локально-невязкой области III и передается через верхнюю часть пограничного слоя внешнему потоку. Причем, согласно (3.5), (3.6), возвратных токов в области III не возникает.

Как уже отмечалось, вблизи линии тока $\Psi = \Psi_s$ лежит вязкий подслой (область IV), в котором $\Psi - \Psi_s = O(R^{-1/7})$, однако для главных членов разложений решение здесь совпадает с решением для области III при $|\Psi^*| \rightarrow 0$.

Для удовлетворения условию прилипания на поверхности тела необходимо ввести вязкий пристеночный слой (область VI). Исходя из тех же соображений, что и раньше, и используя выражения (2.6), (1.3), будем искать решение в виде

$$\varphi = R^{-1/7} \Psi^0, \quad u = u_w^* + \sum_{n=1}^4 R^{n/14} u_n^0(x^*, \Psi^0) + O(R^{-3/14})$$

Подставляя это разложение в уравнения Навье — Стокса, получим следующее решение для искомых функций, которое удовлетворяет ус-

ловиям на поверхности тела и условиям срачивания с решениями (2.6) и (3.3) соответственно при $|x^*| \rightarrow \infty$ и $\Psi^\circ \rightarrow \infty$:

$$u_n^\circ = |x^*|^{n/2} \omega_n(\xi), \quad \xi = \Psi^\circ (2u_w^* |x^*|)^{-1/2} \quad (n=1, 2, 3)$$

Для коэффициента в четвертом члене разложения тогда приходим к задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_4^\circ}{\partial x^*} + \frac{1}{u_w^*} \frac{dp^*}{dx^*} &= u_w^* \frac{\partial^2 u_4^\circ}{\partial \Psi^{\circ 2}} + \frac{\partial^2}{\partial \Psi^{\circ 2}} \left(u_1^\circ u_3^\circ + \frac{1}{2} u_2^{\circ 2} \right) \\ u_4^\circ &= u_w^{-1} (\Psi^\circ = 0), \quad u_4^\circ = d_4^* \Psi^{\circ 4} + O(\Psi^{\circ 2}) \quad (\Psi^\circ \rightarrow \infty) \\ u_4^\circ &\rightarrow x^{*2} \omega_4(\xi) \quad (|x^*| \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u_4^\circ = x^{*2} \omega_4(\xi) + u_w^{-1} - u_w^{*-1} p^\circ(x^*) + u_w^{*-1} T(x^*, \Psi^\circ), \quad p^\circ = p^* + \lambda_1 x^{*2}/2$$

$$T = \frac{\Psi^\circ}{2\sqrt{\pi} u_w^*} \int_{-\infty}^{x^*} \frac{p^\circ(s)}{(x^* - s)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\Psi^{\circ 2}}{4u_w^* (x^* - s)}\right] ds$$

Для замыкания системы соотношений, описывающей течение в области взаимодействия, необходимо рассмотреть область I внешнего потенциального потока, которая имеет поперечный размер $y = O(R^{-1/7})$. В этой области разложение (2.7) становится несправедливым. Согласно (3.1), переменная часть давления и нормальная составляющая вектора скорости на внешней границе пограничного слоя суть величины $O(R^{-2/7})$. Поэтому, принимая также во внимание вид разложения (2.7), представим решение в области I в виде

$$\begin{aligned} x &= R^{-1/7} x^*, \quad y = R^{-1/7} y^* \\ u &= q_0 + R^{-1/7} U_1(x^*, y^*) + R^{-2/7} U_2(x^*, y^*) + o(R^{-2/7}) \\ v &= R^{-2/7} V_0(x^*, y^*) + o(R^{-2/7}) \\ p &= p_{00} + R^{-1/7} P_1(x^*, y^*) + R^{-2/7} P_2(x^*, y^*) + o(R^{-2/7}) \end{aligned}$$

Подставив эти разложения в уравнения Навье — Стокса, получим следующее решение, которое удовлетворяет условиям срачивания с решением в области I при $|Z| \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} U_1 &= -K_0 q_0 y^*, \quad P_1 = -q_0 U_1, \quad U_2 = K_0^2 q_0 y^{*2} + U_2^\circ(x^*, y^*) \\ P_2 &= -\frac{3}{2} K_0^2 q_0^2 y^{*2} + P_2^\circ(x^*, y^*), \quad P_2^\circ = -q_0 U_2^\circ \end{aligned}$$

где K_0 — кривизна поверхности тела в рассматриваемой точке (для данного течения $K_0 = 1$); функции $P_2^\circ(x^*, y^*)$ и $q_0 V_0(x^*, y^*)$ — соответственно действительная и мнимая части аналитической в верхней полуплоскости функции $F^*(z^*)$, $z^* = x^* + iy^*$. Из срачивания с разложениями (2.7) и (3.1) для областей I и II следует, что

$$F^* = -\frac{\lambda_1}{2} z^{*2} - q_0 q_0^* + \frac{q_0^2 \kappa_0}{2} (1-i) z^{*-1/2} + o(z^{*-1/2}) \quad (z^* \rightarrow \infty) \quad (3.8)$$

$$\text{Im } F^* = q_0^2 G^{*'}(x^*), \quad \text{Re } F^* = p^*(x^*) \quad (y^* = 0)$$

Решение краевой задачи (3.8) для аналитической функции дает связь между $p^*(x^*)$ и $G^{*'}(x^*)$, которая замыкает задачу для области взаимо-

действия

$$q_0^2 G^{*'} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p^*(\tau) + 1/2 \lambda_1 \tau^2 + q_0 q_0^*}{\tau - x^*} \right] d\tau \quad (3.9)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения.

Прежде чем переходить к решению уравнения (3.9), (3.7), рассмотрим течение при значениях параметра $\varepsilon > O(R^{-2/7})$. В этом случае разложение (2.7) становится несправедливым при $|Z| = O(\varepsilon^{1/2})$. Переменная часть давления при $X^* = \varepsilon^{-1/2} x = O(1)$, согласно (1.3), есть $p - p_{00} = \varepsilon P_0^*(X^*) + o(\varepsilon)$. Причем изменения давления, обусловленные вытесняющим действием, в соответствии с (2.7) имеют порядок $\varepsilon^{-3/2} R^{-1/2} < O(\varepsilon)$. Поэтому в рассматриваемой области, где $X^* = O(1)$, имеем

$$P_0^* = -\frac{\lambda_1 X^{*2}}{2} - q_0 q_0^*$$

В нелинейной части пограничного слоя, которая является продолжением областей \mathcal{I} и \mathcal{I}' , решение аналогично (3.4)–(3.6)

$$\Psi - \Psi_s = \varepsilon^{1/2} \Psi^*, \quad u = \varepsilon^{1/2} U_0^*(X^*, \Psi^*) + o(\varepsilon^{1/2})$$

$$U_0^* = (a_0^2 \Psi^{*4} - 2P_0^*)^{1/2}, \quad P_0^* = -\frac{\lambda_1}{2} X^{*2} - q_0 q_0^*$$

Из этих выражений при $\Psi^* = 0$ следует, что это решение при $q_0^* = -\Gamma_1/2\pi < 0$ становится мнимым.

Таким образом, при $\varepsilon > O(R^{-2/7})$ и $\Gamma_1 > 0$, что соответствует увеличению величины циркуляции, а следовательно, и угловой скорости по сравнению с их критическими значениями, взаимодействие в первом приближении несущественно. Если же $\Gamma_1 < 0$, то решение задачи теряет смысл. Это означает, что предельное состояние поля течения при $R \rightarrow \infty$ не описывается решением вида (1.1). По-видимому, внешнее течение при $R \rightarrow \infty$ следует искать уже в классе отрывных течений идеальной жидкости.

4. Перейдем к решению уравнения (3.9), (3.7), служащего для описания течения в области взаимодействия. После преобразований

$$x^* = \left(\frac{\kappa_0 q_0^2}{2\lambda_1} \right)^{2/7} X, \quad p^* = 2^{-11/7} (\kappa_0 q_0^2 \lambda_1^{3/4})^{1/7} P \quad (4.1)$$

для искомой функции $P(X)$ получаем уравнение

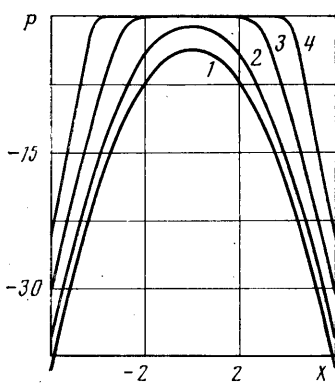
$$(-P)^{-5/4} \frac{dP}{dX} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{P(t) + t^2 + \omega_0}{t - X} \right] dt = 0 \quad (4.2)$$

$$P = -X^2 - \omega_0 + 2|X|^{-1/2} + o(|X|^{-1/2}) \quad (|X| \rightarrow \infty)$$

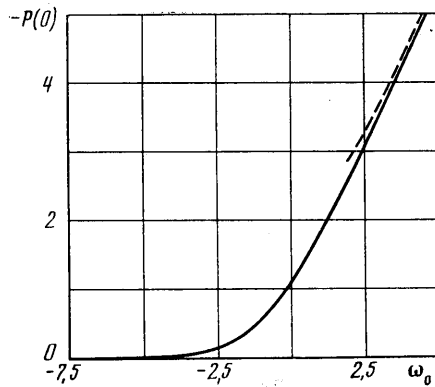
$$\omega_0 = 2^{11/7} q_0^* (q_0 \lambda_1^3 \kappa_0^4)^{-1/7}$$

Здесь также приведены краевые условия, которые получаются на основании (3.8) и обеспечивают сращивание с решением вне области взаимодействия. Уравнение (4.2) содержит в качестве параметра подобия постоянную ω_0 , увеличение которой, согласно (2.1), (2.7), соответствует увеличению величины циркуляции по сравнению с ее критическим значением Γ^* .

Рассмотрим решение уравнения (4.2) при $\omega_0 \rightarrow \infty$. Вводя независимую переменную $x' = \omega_0^{-1/2} X$ и применяя обычную процедуру разложения ре-



Фиг. 4



Фиг. 5

нения по малому параметру, получим

$$P = \omega_0 p_0(x') + \omega_0^{-3/4} p_1(x') + O(\omega_0^{-5/2}) \quad (4.3)$$

$$p_0 = -x'^2 - 1, \quad p_1 = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t dt}{(t^2 + 1)^{5/4} (t - x')}$$

Таким образом, при $\omega_0 \rightarrow \infty$ решение задачи для области взаимодействия переходит в рассмотренное выше решение при $\varepsilon > O(R^{-2/3})$ и $\Gamma_1 > 0$

При конечных значениях ω_0 решение уравнения (4.2) находилось численно. Использовалась разностная схема второго порядка

$$P_i + A^2 + \omega_0 - 2A^{-3/2} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{(P_i - P_{i-1})}{h} (-P_{i-1/2})^{-3/4} + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \left[\frac{P(t) + t^2 + \omega_0}{t - X_{i-1/2}} \right] dt + r(X_{i-1/2}; A) = 0, \quad 2 \leq i \leq N$$

Здесь $\{X_i\}_{i=1}^N$ — расчетная сетка с постоянным шагом h ; $X_{i-1/2} = 1/2(X_i + X_{i-1})$; $P_i = -P(X_i)$ — узловые значения давления; $P_{i-1/2} = 1/2(P_i + P_{i-1})$; $r(X_{i-1/2}; A)$ — оценка интеграла (4.2) вне отрезка $[-A, A]$, полученная с использованием асимптотики для $P(X)$ при больших $|X|$.

Отметим, что граничное условие (первое уравнение в (4.4)) следует ставить только на одном конце сетки во избежание переопределенности разностной краевой задачи. Получение симметричного решения при этом является дополнительным критерием его правильности. Интеграл в (4.4) аппроксимировался по формуле трапеций с выделением сингулярности в рамках второго порядка точности. Полученная система нелинейных уравнений относительно P_i решалась методом Ньютона (без релаксации), причем матрица Якоби вычислялась по явным формулам. Итерации заканчивались по достижении заданной относительной точности $\chi = \max_i |P_i^v - P_i^{v-1}| / |P_i^v|$, v — номер итерации.

Было проведено также численное решение задачи при помощи другой разностной схемы, несколько отличающейся от (4.4). Именно в области малых X и $|P|$ (в узлах $i^- \leq i \leq i^+$) второе уравнение в (4.4) умножалось на $(-P_{i-1/2})^{3/4}$. На всей сетке такую схему применить нельзя ввиду сильного нарастания невязки в крайних узлах, поэтому в точках $1, \dots, i^- - 1$ и $i^+ + 1, \dots, N$ по-прежнему использовалась схема (4.4). Узлы i^- и i^+ выбирались из условия минимального различия невязок двух схем в этих точках.

Для контроля точности расчеты проводились при различном числе узлов сетки $N = 50, 75, 100, 120$, различных значениях $A = 10, 15, 20, 25$ и разных $\chi = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ в диапазоне $-15 \leq \omega_0 \leq 10$.

Результаты численного анализа показывают, что решение уравнения (4.2) существует при всех значениях параметра ω_0 , причем зависимость решения от ω_0 является однозначной. На фиг. 4 представлены распределения давления $P(X)$ при $\omega_0 = 3, 0, -5, -10$ (кривые 1-4). В силу инвариантности (4.2) относительно преобразования $X \rightarrow -X$, $P \rightarrow P$ функция $P(X)$ — четная и при $X=0$ принимает максимальное значение. По мере уменьшения значений ω_0 в центральной части рассматриваемой области наблюдается уменьшение величины $-P(X)$. На фиг. 5 показана зависимость $-P(0)$ от ω_0 . Штриховой линией изображена соответствующая зависимость при

$\omega_0 \rightarrow \infty$, которая на основании (4.3) имеет вид

$$-P(0) = \omega_0 + \omega_0^{-1/2} \frac{2\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi}\Gamma(5/4)} + O(\omega_0^{-5/2})$$

При уменьшении величины ω_0 (фиг. 4) происходит расширение области значений X , в которой $P(X)$ мало, но нет никаких указаний на то, что решение перестанет существовать при каком-либо конечном $\omega_0 < 0$. Поскольку при этом толщина пограничного слоя в области взаимодействия, согласно (3.1), (3.7), (4.1), изменяется пропорционально $R^{-3/4}[-P(X)]^{-1/4}$, то уменьшение значений $-P(X)$ соответствует дальнейшему ее росту.

Таким образом, процесс перехода к течению с развитой зоной отрыва при обтекании вращающегося цилиндра происходит в результате постепенного увеличения толщины пограничного слоя, но без появления области возвратных токов.

В заключение заметим, что рассмотренное выше взаимодействие может возникать и в других течениях. Например, в плоском следе за телом, поскольку в окрестности точки торможения на оси симметрии возможно появление особенности рассмотренного типа [8], или в периодическом пограничном слое на подвижной поверхности произвольной цилиндрической формы. При этом решение задачи для области взаимодействия сводится к уравнению (4.2) и отличие от рассмотренного случая состоит лишь в том, что входящие в решение и преобразование подобия (4.1) постоянные принимают другие численные значения. Наконец, рассмотренная особенность, а следовательно, и взаимодействие могут возникать при критических значениях параметров в нестационарном периодическом пограничном слое на неподвижной поверхности. В этом можно убедиться, если в (1.2), используя обычные переменные x, Y , перейти в систему координат, связанную с подвижной поверхностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L., Tietjens O. Hydro-und Aeromechanik. Bd. 2. Berlin: Springer, 1931. 299 S.
2. Prandtl L. Magnuseffekt und Windkraftschiff // Naturwiss. 1925. Jrg. 13. H. 6. S. 93-108.
3. Glauert M. B. The flow past a rapidly rotating circular cylinder // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1957. V. 242. № 1228. P. 108-115.
4. Moore D. W. The flow past a rapidly rotating circular cylinder in a uniform stream // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. Pt 6. P. 541-550.
5. Wood W. W. Boundary layers whose streamlines are closed // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. Pt 1. P. 77-87.
6. Николаев К. В. Возникновение отрыва пограничного слоя на вращающемся цилиндре в потоке несжимаемой жидкости // Уч. зап. ЦАГИ. 1982. Т. 13. № 6. С. 32-39.
7. Sears W. R., Telionis D. P. Boundary-layer separation in unsteady flow // SIAM J. Appl. Math. 1975. V. 28. № 1. P. 215-235.
8. Сычев Вук. В. Особое решение уравнений пограничного слоя на подвижной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 43-52.
9. Swanson W. M. The Magnus effect: a summary of investigations to date // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng. 1961. V. 83. № 3. P. 461-470.

Москва

Поступила в редакцию
6.VIII.1986