

УДК 532.522:532.135

К МЕХАНИКЕ ФОРМОВАНИЯ ВОЛОКОН

ЕНТОВ В. М., КЕСТЕНБОЙМ Х. С.

Процесс формования волокна упрощенно можно представить как истечение раствора или расплава полимера, нагнетаемого некоторым напорным устройством, из сужающегося сопла (фильеры) с последующей намоткой образовавшейся на выходе струи (нити) на вращающийся с постоянной скоростью барабан. Для формования принципиальна сопряженность задачи, т. е. наличие обратного влияния волокна на условия истечения жидкости из фильеры. Рабочие растворы обычно представляют собой упруговязкие жидкости, способные к накоплению значительных обратимых деформаций. Известно, что это приводит к появлению специфических неустойчивостей течения, ограничивающих производительность формования. Гидродинамической теории, способной объяснить возникновение этих неустойчивостей без привлечения дополнительных гипотез, в настоящее время не существует.

В данной работе делается попытка построить в одномерном (гидравлическом) приближении гидродинамическую теорию процесса формования как сопряженного течения упруговязкой жидкости в системе напорное устройство — сопло — волокно. Такой подход позволяет провести детальный анализ и получить достаточно обзорные результаты. Он представляется вполне оправданным в настоящее время, когда несовершенство реологических моделей и методов гидродинамического расчета течений упругих жидкостей не дает основания надеяться на серьезный прогресс двумерного описания. Анализ упомянутой сопряженной задачи приводит, в частности, к выводу о возможности появления падающего участка расходной характеристики сопла и обусловленных этим автоколебательных режимов формования. Вопрос об отождествлении этой неустойчивости с экспериментально наблюдаемой неустойчивостью процесса формования остается открытым.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарное истечение жидкости из сужающегося осесимметричного сопла (фильеры) длины l с образованием на выходе волокна; точка приема волокна удалена от среза сопла на расстояние L . Ось x направлена вдоль течения, начало координат выбрано на срезе сопла. Движение описывается системой уравнений неразрывности и импульсов, дополненных реологическим соотношением жидкости. Уравнение неразрывности для канала в предположении несжимаемости жидкости дает

$$\rho v f = q(t) \quad (1.1)$$

Здесь $f = f(x)$ — сечение канала, v — средняя по сечению скорость, ρ — плотность. Расход $q(t)$ либо задается (в случае принудительного нагнетания жидкости), либо определяется из решения задачи.

Уравнение импульса для течения как в канале, так и в волокне запишем в предположении, что напряженно-деформированное состояние элемента жидкости близко к случаю одноосного растяжения. Это оправдано, если параметры течения плавно меняются вдоль оси.

Считая, что на выделенный объем жидкости в канале действуют растягивающее осевое напряжение $\sigma(x)$, реакция p твердой стенки, равная гидродинамическому давлению, и сила трения T , имеем [1, 2]

$$\frac{\partial \rho f v}{\partial t} + \frac{\partial \rho f v^2}{\partial x} = \frac{\partial f \sigma}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial x} - T \quad (1.2)$$

Уравнения движения для внешнего течения аналогичны (1.1) и (1.2) с той лишь разницей, что для струи (волокна) сечение f есть функция x ,

t , а давление p и трение T равны нулю. В пренебрежении капиллярными эффектами имеем

$$\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \frac{\partial \rho f v}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \rho f v}{\partial t} + \frac{\partial \rho f v^2}{\partial x} = \frac{\partial f \sigma}{\partial x} \quad (1.4)$$

Тензор напряжений в жидкости по предположению является диагональным; осевому направлению отвечает главное напряжение $\sigma_1 = \sigma$; два других («боковых») главных напряжения равны между собой, причем в силу условия на боковой поверхности канала $\sigma_2 = \sigma_3 = -p$; в свободном волокне $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Примем далее простейшую реологическую модель жидкости, подробно описанную в [3], полагая, что напряжения с точностью до гидростатического давления p^0 однозначно связаны с тензором обратимых упругих деформаций B^e жидкости известным соотношением Муни — Ривлина (с $\gamma = 0$)

$$\sigma + p^0 \delta = 2GB^e$$

где G — модуль сдвиговой упругости.

Для рассматриваемого течения главные значения тензора B^e выражаются через единственный параметр λ , имеющий смысл осевого упругого удлинения

$$B_{11}^e = \lambda^2, \quad B_{22}^e = B_{33}^e = \lambda^{-1}$$

что приводит с учетом условия на σ_2 к основному выражению для осевого напряжения

$$\sigma = \tau(\lambda) - p, \quad \tau(\lambda) = 2GF(\lambda) = 2G(\lambda^2 - 1/\lambda) \quad (1.5)$$

В рамках выбранной реологической модели эволюция осевого упругого удлинения λ определяется соотношением

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + v \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\tau(\lambda)}{3G\theta} \quad (1.6)$$

где θ — время релаксации. При $\theta \rightarrow \infty$ осуществляется переход к модели упругой «жидкости» — эластичного тела без релаксации.

Для завершения постановки задачи необходимо определить граничные условия. На входе в сопло ($x = -l$) задается упругое удлинение $\lambda = \lambda_b$ (в частности, при отсутствии начальной деформации жидкости $\lambda_b = 1$).

Выходное сечение канала ($x = 0$) — граница между внутренним и внешним течениями с соответствующим изменением набора неизвестных функций. Здесь должны выполняться законы сохранения массы и импульса, а также дополнительное условие, выражающее тот факт, что для максвелловской жидкости мгновенное изменение напряжений сопровождается только мгновенной упругой деформацией, происходящей при неизменном объеме элемента. Имеем в результате

$$f_c v_c = f_0 v_0 = q, \quad \lambda_c v_c^{-1} = \lambda_0 v_0^{-1} \quad (1.7)$$

$$(\rho q^2 / f - f \tau + f p)_c = (\rho q^2 / f - f \tau)_0 \quad (1.8)$$

Индексами c и 0 отмечены значения параметров потока на границе сопряжения течений в канале и в волокне соответственно. Строго говоря, при выводе соотношения (1.8) принимается, что производная $\partial f / \partial x$ обращается в нуль в некоторой малой окрестности среза сопла. Это ограничение связано с наличием в уравнении импульса (1.2) реакции стенки сопла p . Очевидно, этому условию всегда можно удовлетворить малым локальным изменением формы сопла.

На «приемном конце» волокна ($x=L$) задана скорость вытяжки

$$v=v_L \quad (1.9)$$

При надлежащем выборе начальных условий задача (1.1)–(1.9) оказывается замкнутой.

2. Дозвуковой и сверхзвуковой режимы истечения. Исключая σ и v из уравнений движения в сопле с помощью соотношений (1.1) и (1.5), полагая $T=0$ и вводя безразмерные переменные по формулам

$$x^* = \frac{x}{R_b}, \quad t^* = \frac{tc^\circ}{R_b}, \quad p^* = \frac{p}{G}, \quad f^* = \frac{f}{R_b^2}, \quad l^* = \frac{l}{R_b} \quad (2.1)$$

$$v^* = \frac{v}{c^\circ}, \quad q^* = \frac{q}{c^\circ R_b^2}, \quad \theta^* = \frac{\theta c^\circ}{R_b}, \quad L^* = \frac{L}{R_b}, \quad c^\circ = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

(c° – масштаб скорости, R_b – радиус входного сечения сопла), получим систему

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{f} \frac{dq}{dt} - \frac{q^2}{f^3} \frac{df}{dx} - \frac{1}{f} \frac{\partial fF}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{q}{f} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\lambda q}{f^2} \frac{df}{dx} + \frac{\lambda F}{3\theta} = 0 \quad (2.3)$$

Здесь и в дальнейшем звездочка над безразмерными величинами опускается. Эти уравнения отвечают течению, когда инерционные и упругие силы преобладают над силами вязкого трения о стенки.

Система уравнений (2.2)–(2.3) обладает одной конечной характеристикой $dx/dt=v$ и одной вырожденной характеристикой, в соответствии с которой возмущения давления распространяются в канале с бесконечной скоростью. Поэтому система (2.2)–(2.3) требует только задания начального распределения $\lambda(x)$.

Нестационарные уравнения, описывающие течение жидкости во внешней области, имеют в тех же безразмерных переменных вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial fv}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial fv}{\partial t} + \frac{\partial (fv^2 - fF)}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial (1/\lambda)}{\partial t} + \frac{\partial (v/\lambda)}{\partial x} = \frac{F}{3\lambda\theta} \quad (2.5)$$

Эта система уравнений гиперболического типа требует задания начальных распределений $f(x)$, $v(x)$ и $\lambda(x)$. Она обладает тремя характеристиками, отвечающими уравнениям

$$dx/dt=v, \quad dx/dt=v \pm c \quad (2.6)$$

$$c = \sqrt{\lambda F' - F} = \sqrt{2\lambda^2 + 4/\lambda} \quad (2.7)$$

где c – скорость распространения малых возмущений, далее для краткости называемая «скоростью звука».

Появление этой скорости связано с упругой сдвиговой деформацией, происходящей без изменения объема. При обычных для полимерных жидкостей значениях модуля сдвига $G \sim 10^2 - 10^6$ дин/см² эта скорость имеет порядок 0,1–10 м/с, т. е. близка к реальным скоростям движения волокна. Это обстоятельство имеет решающее значение для последующего анализа.

Из (2.6), (2.7) следует, что две характеристики уравнений переносят возмущения по потоку, а направление третьей зависит от соотношения величин скорости истечения жидкости из сопла и скорости звука. Если $v_0 > c_0$, то возмущения, возникающие во внешнем течении, сносятся пото-

ком; внешнее течение не оказывает влияния на течение в сопле. При этом естественно принять, что значения динамических переменных на выходе из сопла могут определяться только значениями, приносимыми из сопла

$$v_0 = v_c, \quad f_0 = f_c, \quad \lambda_0 = \lambda_c \quad (2.8)$$

Тогда из (1.8) немедленно находится давление в выходном сечении сопла

$$p_c = 0 \quad (2.9)$$

Следовательно, внутреннее течение определяется независимо от внешнего и, в частности, от скорости вытяжки v_L . Условия (2.8) согласуются с известным наблюдением, что при достаточно больших скоростях вытекающая струя упругой жидкости имеет диаметр сопла; они могут быть обоснованы более детальным анализом для свободной струи. В таком режиме течения (будем далее называть его сверхзвуковым) исчезает различие между струйным истечением жидкости из сопла и режимом формования. Процесс формования волокна в таких условиях, хотя и существует формально, по-видимому, нарушается.

В случае дозвукового режима истечения $v_0 < c_0$ и возмущения из внешнего потока проникают в канал. На срезе сопла происходит согласование внутреннего и внешнего решений и вырабатываются параметры λ_c , λ_0 , f_0 , v_0 , удовлетворяющие соотношениям (1.7). При этом упругая жидкость на выходе из канала частично разгружается ($\lambda_0 < \lambda_c$) и наблюдается эффект «разбухания струи». Из (1.7), (1.8) можно получить следующее выражение для давления в выходном сечении канала:

$$p_c = -\frac{q^2}{f_c^2} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right) + F(\lambda_c) - F(\lambda_0) \quad (2.10)$$

При малых и умеренных q и $\lambda_0 < \lambda_c$ давление p_c на срезе положительно.

3. Квазистационарное приближение. Расходные характеристики системы сопло — волокно. Рассмотрим предельный случай медленно меняющихся течений, когда характерное время t_1 изменения динамических параметров в сопле (определяемое постоянными времени напорного устройства) много больше, чем время $t_2 = L/c$ развития нестационарных процессов в волокне. При этом течение во внешней области можно считать стационарным. Тогда легко сформулировать краевую задачу для определения внешнего решения. Из (2.4)–(2.5) имеем

$$v - \frac{F}{v} = \frac{J}{q}, \quad \frac{dv\lambda^{-1}}{dx} = \frac{F}{3\lambda\theta} \quad (3.1)$$

Здесь $q = fv$ и $J = fv^2 - fF$ — интегралы уравнений движения (расход и поток импульса во внешнем течении).

В случае дозвукового режима вытяжки краевые условия таковы

$$v/\lambda = q/(\lambda_c f_c), \quad x=0 \quad (3.2)$$

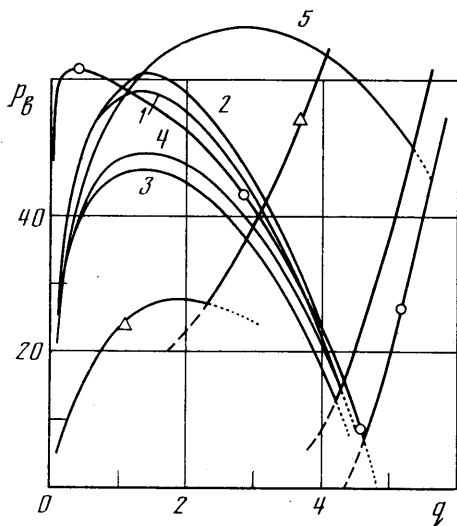
$$v = v_L, \quad x=L \quad (3.3)$$

В случае сверхзвукового истечения жидкости из сопла условие (3.2) должно быть заменено на

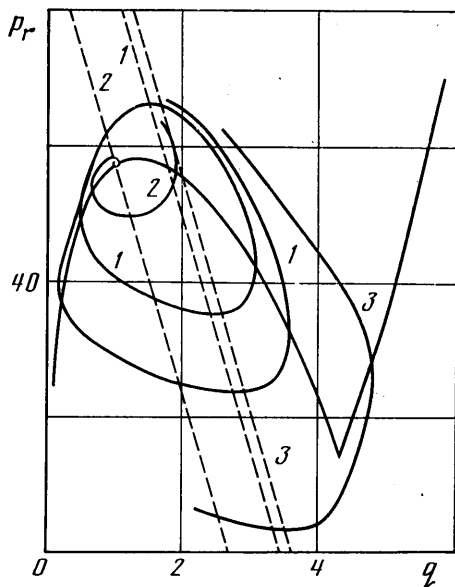
$$v = q/f_c, \quad \lambda = \lambda_c, \quad x=0 \quad (3.4)$$

Если расход q задан, то величина λ_c на срезе сопла находится с помощью уравнения (2.3). Тогда после решения краевой задачи (3.1)–(3.3) определяется недостающее граничное условие на давление p_c (2.10) для интегрирования уравнения (2.2), что обеспечивает расчет дозвукового режима вытяжки волокна.

В случае сверхзвукового истечения решение внутренней задачи обеспечивается условием (2.9), а решение внешней задачи (3.1), (3.3), (3.4)



Фиг. 1



Фиг. 2

дает определенное представление о том, как разрушается процесс формирования. Напомним, что по сказанному выше выход в сверхзвуковую область скорее всего означает срыв формирования.

Построим расходные характеристики системы сопло — волокно, т. е. связь между давлением на входе в сопло p_b и расходом q , отвечающую стационарному режиму течения. Рассмотрим сначала сверхзвуковой режим. В этом случае система уравнений движения в сопле

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{q^2}{f^3} \frac{df}{dx} + \frac{1}{f} \frac{dF}{dx} \quad (3.5)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{\lambda}{f} \frac{df}{dx} - \frac{\lambda f F}{3q\theta} \quad (3.6)$$

должна быть проинтегрирована при краевых условиях $\lambda_b = 1$ при $x = -l$ и $p = 0$ при $x = 0$ (расход q играет роль параметра). Полученные таким образом зависимости $p_b(q)$ для ряда значений параметров задачи показаны на фиг. 1. Сверхзвуковому режиму отвечают возрастающие ветви кривых, расположенные правее точки излома, и показанные штриховыми линиями их продолжения.

Для расчета расходной характеристики в дозвуковом режиме необходимо решать сопряженную задачу, в которой решение уравнений (3.5) — (3.6) согласуется с решением уравнений динамики волокна (3.1) — (3.3) при $x = 0$ с помощью условия (2.10), служащего фактически для определения давления p_c на срезе сопла.

Пренебрежем релаксацией, положив $\theta = \infty$. Тогда решение задачи (3.1) — (3.3) выписывается в явной форме

$$v = v_L, \quad \lambda = v_L \lambda_c f_c / q, \quad f = q / v_L \quad (3.7)$$

Используя (3.7) для получения величины p_c из (2.10), можно из (3.5) найти зависимость давления на входе от расхода q

$$p_b = \frac{q^2}{2} \left(\frac{2v_L}{qf_c} - \frac{1}{f_c^2} - \frac{1}{f_b^2} - \frac{4v_L f_b \lambda_c^2}{q^3} + \frac{4}{v_L^2 f_c^2 \lambda_c} \right) + \int_{\lambda_b}^{\lambda_c} \frac{F(\lambda)}{\lambda} d\lambda \quad (3.8)$$

При умеренных и больших q главными членами в скобках будут второе и пятое слагаемые. Их сумма обращается в нуль при скорости вытяжки волокна $v_L \approx 2/\sqrt{\lambda_c} = v_L^0$. При $v_L > v_L^0$ коэффициент при q^2 в (3.8) может принимать отрицательное значение, т. е. дозвуковая расходная характеристика сопла — волокна имеет падающий участок. Другими словами, существует диапазон скоростей истечения и вытяжки, когда рост расхода жидкости не обязательно сопровождается увеличением напорного давления на входе в сопло. По-видимому, этот факт связан с возможностью преобразования накопленной упругой энергии жидкости на выходе из канала в кинетическую.

Для релаксирующей жидкости стационарное решение строится численно. Результаты расчетов приведены на фиг. 1 (кривые левее точки излома и их продолжение пунктиром). Для наглядности зависимости $p_b(q)$, отвечающие значениям $\theta = 10, 10^2, 10^3$, изображены сплошными кривыми с треугольником, без значков и с кружком соответственно. В случае расслоения вариантов расчета по параметрам L и v_L соответствующие графики снабжены номерами.

Видно, что на всех кривых имеется участок убывания, расположенный в области умеренных скоростей истечения.

Дозвуковые участки расходных характеристик сопрягаются со сверхзвуковыми в точках излома. Естественно полагать, что при фиксированных прочих параметрах малым расходам соответствуют дозвуковые режимы истечения, а большим — сверхзвуковые. Оказывается, однако, что в рамках сформулированных выше задач дозвуковые и сверхзвуковые ветви характеристик могут быть формально построены для всего диапазона скоростей истечения.

Участки расходных характеристик, показанных на фиг. 1 штриховой и пунктирной линиями, физически нереализуемы в силу их неустойчивости. При превышении расходом критического значения q^* , отвечающего точке излома характеристик, давление p_c на срезе, полученное из дозвукового расчета, становится отрицательным, а присоединенный скачок, характерный для дозвукового решения, получает возможность смещаться по потоку. Это означает неустойчивость дозвукового режима и переход к сверхзвуковому. Напротив, в формально построенном сверхзвуковом решении с $q < q^*$ скорость v_0 оказывается меньше местной скорости звука c_0 , характеристика одного из семейств оказывается приходящей к срезу из внешнего потока, а это означает, что построенное решение неустойчиво. Таким образом, полная расходная характеристика «склеивается» из дозвукового участка при $q < q^*$ и сверхзвукового участка при $q > q^*$ (сплошные линии на фиг. 1).

Из сравнения графиков для разных θ , отвечающих расчету стационарной задачи при $v_L = 1,5$, $L/l = 10^2$ (кривая 1 для $\theta = 10^2$), видно, что при больших θ растет и сдвигается в область малых q максимум характеристики $p_b(q)$. При $\theta \rightarrow \infty$, как видно из формулы (3.8), этот максимум смещается на ось $q = 0$. Следовательно, для того чтобы продавить эластичную жидкость без релаксации через сужающееся сопло, нужно развить на входе конечное напорное давление.

Можно отметить, что с увеличением вязкости протяженность падающего участка расходной характеристики сокращается. Интересно сравнить результаты расчетов для разных скоростей вытяжки. Кривые 3, 4, 5 отвечают соответственно значениям $v_L = 2,4; 1,5; 0,5$ ($L/l = 10$). Видно, что с уменьшением v_L падающий участок также сокращается, что согласуется с приведенной выше оценкой для v_L^0 и связано с некоторым торможением потока в точке приема волокна. Краевой эффект проявляется и в увеличении максимума напорного давления с уменьшением v_L . Те же закономерности обнаруживаются при сопоставлении кривых 1, 2 (соответственно $v_L = 1,5$ и $0,5$; $L/l = 10^2$). Если ограничение на скорость в точке приема волокна не оказывает тормозящего действия на внешний поток, то при

вытяжке более короткого волокна можно наблюдать снижение уровня необходимого напорного давления p_b (кривые 1 и 4, отвечающие соответственно параметрам $L/l=10^2$ и 10 при $v_L=1,5$). Следует отметить также, что у кривых 1–5, объединенных общим значением времени релаксации θ и различающихся параметрами внешнего течения, сверхзвуковые участки расходной характеристики совпадают. Это обусловлено тем, что возмущения из внешнего потока не проникают в сопло, а сносятся вниз по течению.

4. Автоколебательный режим истечения. Наличие падающей расходной характеристики может быть причиной потери устойчивости движения в системе сопло — волокно. Для анализа ситуации необходимо рассмотреть нестационарную задачу о движении жидкости в канале, принимая во внимание характеристики напорного устройства. С учетом вязких потерь, упругой податливости и инерционности напорная система может быть описана системой первого порядка

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{S(P_0 - p_r) - q}{V}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{p_r - p_b(q)}{M} \quad (4.1)$$

Здесь p_r — мгновенное значение давления перед входом в сопло, S , V , P_0 , M — постоянные. Стационарная расходная характеристика напорной системы в соответствии с (4.1) дается прямой $p_r = P_0 - q/S$. Пусть p_s , q_s — координаты стационарного режима истечения, определяемые в силу (4.1) системой

$$-Sp_r - q + SP_0 = 0, \quad p_r - p_b(q) = 0$$

Геометрически ему соответствует точка на пересечении расходной характеристики напорной системы (штриховая прямая) и расходной характеристики сопла $p = p_b(q)$ на фиг. 2. Считая, что постоянная времени системы сопло — волокно много меньше постоянной времени напорной системы и линеаризуя систему (4.1) в окрестности стационарной точки, получим условия устойчивости в виде системы неравенств

$$\frac{S}{V} + \frac{1}{M} \frac{dp_b}{dq}(q_s) > 0, \quad S \frac{dp_b}{dq}(q_s) + 1 > 0 \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует, что если точка p_s , q_s в фазовой плоскости p_r , q находится на возрастающих участках характеристики $p_b(q)$, то стационарный режим устойчив. Если же единственный стационарный режим соответствует достаточно круто падающему участку расходной характеристики сопла $p_b(q)$, то может быть не выполнено одно из неравенств (4.2), и тогда естественно будет ожидать возникновения автоколебаний.

Приведенные выше соображения носят, по сути дела, характер наводящих, поскольку не учитывается нестационарность процесса релаксации в канале и переходные процессы в волокне.

Для более детального исследования неустойчивости процесса формирования волокна проведен численный эксперимент в предположении, что волокно мгновенно отслеживает изменения динамических параметров в напорном устройстве и сопле. Алгоритм расчета построен на идее метода расщепления по процессам. К моменту времени t с помощью уравнения (2.3) определяются изменения в деформированном состоянии жидкости, протекающей через сужающееся сопло. После вычисления деформации на срезе сопла решается краевая задача (3.1)–(3.3) во внешней области. Это позволяет вычислить давление p_c на срезе сопла. Интегрируя уравнение (2.2) от текущего значения x до $x=0$, можно получить формулу для расчета мгновенного распределения давления в канале

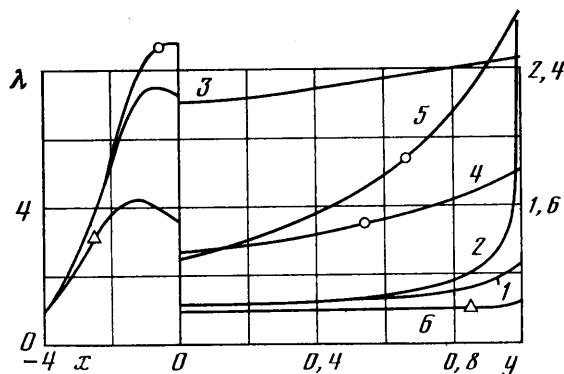
$$p(x, t) = p_c + \frac{dq}{dt} \int_x^0 \frac{dx}{f(x)} - \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{f_c^2} \right) - F(\lambda_c) + F(\lambda) - \int_x^0 \frac{F}{f} \frac{df}{dx} dx \quad (4.3)$$

если известно распределение $\lambda(x, t)$.

Воспользовавшись выражением (4.3), можно затем исключить величину $p_b(q)$ из второго уравнения системы (4.1) и получить для расхода q уравнение

$$\frac{dq}{dt} = \left(M + \int_{-1}^0 \frac{dx}{f(x)} \right)^{-1} \left[p_r + \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{f_b^2} - \frac{1}{f_c^2} \right) + \int_{-1}^0 \frac{F}{f} \frac{df}{dx} dx + F(\lambda_c) - p_c \right]$$

которое совместно с первым уравнением (4.1) образует систему для определения значений $q(t)$, $p_r(t)$. В качестве начальных условий используются координаты некоторой точки p_r^0 , q^0 фазового пространства, начальное распределение деформации $\lambda(x, t^0)$ берется из решения соответствующей стационарной задачи.



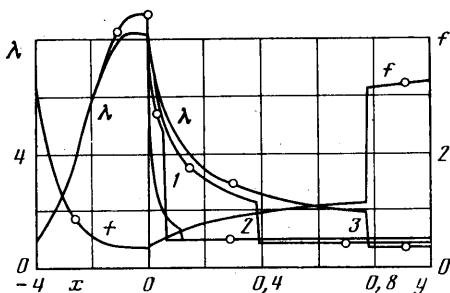
Фиг. 3

Следует заметить, что при некотором выборе начальных условий p_r^0 , q^0 и параметров напорной системы траектория изображающей точки может выйти в сверхзвуковую ($q > q^*$) область фазовой плоскости. Это соответствует смене дозвукового режима истечения сверхзвуковым: решение задачи (3.1)–(3.3) приводит к неравенству $p_c < 0$. В этом случае давление на срезе сопла полагается равным нулю и предусматривается переход на решение краевой задачи (3.1), (3.3)–(3.4) во внешней области.

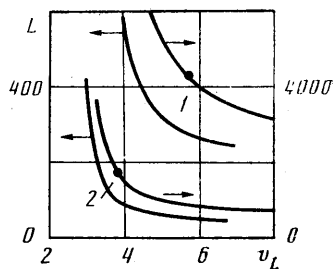
5. Результаты расчетов. Приведем некоторые результаты расчетов для фиксированной геометрии сопла со степенным изменением радиуса сопла по координате; при этом отношение площади входного сечения к выходному равно девяти ($R_c = 1/3$), а длина канала $l = 4$ (см. (2.1)). Результаты представлены на фиг. 2–4; система обозначений близка к принятой ранее при описании фиг. 1. Разница состоит в том, что кривые на фиг. 3–4, иллюстрирующие деформированное состояние жидкости в канале и волокне в некоторые моменты времени, могут отвечать помимо θ , v_L , L и разным значениям расхода q .

На фиг. 2 представлены три варианта расчета процесса формирования волокна для различного выбора положения рабочей точки системы ($\theta = 10^\circ$, $L = 400$, $v_L = 1,5$). Если рабочая точка располагается вблизи вершины расходной характеристики сопла на падающем участке, то в системе имеют место автоколебания с малой амплитудой. Происходят они полностью в дозвуковой области; отвечающая этому случаю траектория движения точки в фазовом пространстве наматывается на предельный цикл (кривая 1). При таком периодическом решении изменения расхода и давления во времени близки к синусоидальным. На фиг. 3 приводятся результаты расчета, дающие представление о структуре внутреннего и внешнего течений при дозвуковом режиме. Распределения деформации λ в канале построены по координате x , в волокне – по относительной переменной $y = x/L$. Сплошная кривая в первой и кривая 1 во второй областях отвечают расчету опорного варианта при $\theta = 10^\circ$, $v_L = 1,5$, $L = 400$ и относятся к моменту времени, когда расход $q = 1,7$. Все остальные кривые соответствуют расчетам, выполненным с изменением одного параметра; представлены также сечения в разные моменты времени. Из фиг. 3 видно, что упругая жидкость, подвергаясь в канале значительному растяжению, разгружается при выходе во внешнюю область, а площадь сечения струи скачкообразно увеличивается. Таким образом, на дозвуковой стадии истечения наблюдается явление «разбухания» струи.

При вытяжке с достаточной скоростью образуется волокно, растяжение которого растет, а площадь сечения уменьшается к приемному концу (кривые 1–5). Интен-



Фиг. 4



Фиг. 5

сивность разгрузки существенно зависит от длины волокна; это можно заметить, сравнивая распределение 1 в опорном варианте с данными расчета для короткой нити ($L=40$, кривая 3). По-видимому, здесь проявляется краевой эффект: при одинаковой скорости вытяжки $v_L=1,5$ в коротком волокне поддерживается более высокий уровень напряжения.

При меньшем времени релаксации жидкость заметно релаксирует уже в канале (см. распределение $\lambda(x)$ для $\theta=10^\circ$). После дальнейшей разгрузки во внешней области получается практически свободное от напряжения волокно (кривая 6, $q=1,7$). При $\theta=10^\circ$ (кривые отмечены кружком) жидкость в канале практически не релаксирует. После частичной разгрузки на выходе из сопла волокно в процессе вытяжки подвергается дополнительному растяжению (кривые 4, 5; $q=1,7$ и $0,5$). Из сравнения этих кривых можно также заметить, что натяжение волокна в точке приема падает при увеличении скорости истечения жидкости из сопла. Непосредственный расчет показывает, что обнаруженная зависимость усиливается при формировании более коротких волокон. Таким образом, возможность значительных колебаний свойств волокна при колебаниях величины расхода подтверждается численным экспериментом.

Для стабилизации течения достаточно выбрать постоянные напорной системы так, чтобы рабочая точка переместилась на возрастающий участок расходной характеристики (см. фиг. 2). При этом траектория изображающей точки в фазовой плоскости (кривая 2) быстро попадает в окрестность этой рабочей точки, «наматываясь» на нее как на устойчивый фокус.

Если же сместить рабочую точку на падающем участке характеристики вправо по сравнению с вариантом 1, то амплитуда колебаний возрастает и траектория выходит в сверхзвуковую область фазовой плоскости (фиг. 2, кривая 3). Здесь, так же как и при расчете струйных течений (см. [2]), можно обнаружить периодическое решение с колебаниями релаксационного типа, причем часть предельного цикла решения будет отвечать сверхзвуковым скоростям истечения. Некоторое представление о возможных последствиях надкритичного увеличения скорости дает формальное решение краевой задачи (3.1), (3.3)–(3.4). Здесь удается построить разрывное решение, удовлетворяющее двум граничным условиям при $x=0$ и одному – при $x=L$, причем «лишнее» граничное условие позволяет определить местоположение разрыва. Результаты расчетов приведены на фиг. 4. Видно, что при малых надкритичностях стационарный скачок разгрузки, находящийся ранее на срезе сопла, смещается во внешний поток (кривая 1, $q=4,7$, $\theta=10^\circ$). При дальнейшем увеличении скорости истечения этот скачок сдвигается к приемному концу волокна (кривые 2, 3, $q=4,8$ и $4,9$). (Для последнего момента времени на фиг. 4 приводится также зависимость площади сечения f от длины.) Заметим, что правее скачка фактически имеется зона сжатия.

При $\theta=10^\circ$ из-за значительной релаксации жидкости во внешней области интенсивность скачка уменьшается (сплошная кривая на фиг. 4), однако все особенности течения сохраняются. Очевидно, что сверхзвуковой режим формирования невозможен. Остается открытым вопрос о том, обязательно ли режимы с временным выходом в сверхзвуковую область приведут к срыву формирования, хотя это представляется вполне вероятным.

В заключение отметим еще один, несколько неожиданный результат. Оказывается, что в определенном диапазоне параметров при фиксированных свойствах жидкости, заданных скорости намотки и расходе, отвечающем дозвуковому истечению, существует предельное значение длины волокна, для которой может быть построено дозвуковое стационарное решение, т. е. существует предельная длина стационарного формирования (или, что то же, для фиксированной длины существует предельная скорость вытяжки). Достижение этой предельной скорости не связано с какими-либо характерными неустойчивостями; скорее всего оно означает просто появление локальной сверхзвуковой зоны в окрестности точки приема отрелаксировавшего волокна. Указанное явление наблюдается при превышении скорости вытяжки величины $s(1)$. Распределение упругой деформации по длине волокна в предкритических режимах имеет характерный вид кривой 2 на фиг. 3. На фиг. 5 построены для

двух значений θ в плоскости параметров L, v_L границы области существования дозвукового решения. Сплошная кривая 1 получена для стационарного течения с расходом $q=1,7$; область несуществования расположена справа от нее. Видно, что для формирования волокна длины $L=400$ величина предельной скорости вытяжки v_L равна $\sim 4,4$. Скорость формирования более короткого волокна может быть увеличена. Существенно усиливается ограничение на скорость вытяжки при течении с большим ($q=3,0$) расходом (сплошная кривая 2). С другой стороны, с увеличением времени релаксации все ограничения существенно смягчаются (см. кривые 1 и 2, отмеченные кружком, $\theta=10^3$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Прокатка и волочение при больших скоростях деформирования // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 3. С. 266–230.
2. Ентов В. М., Кестенбойм Х. С., Рожков А. Н. Об истечении упруговязких жидкостей из сужающихся каналов // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 879–882.
3. Ентов В. М., Кестенбойм Х. С., Рожков А. Н., Шарчевич Л. И. О динамической форме равновесия пленки вязкой и упруговязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 2. С. 9–18.

Москва

Поступила в редакцию
11.X.1986