МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1987

УДК 532.517.4

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

ЦЕСКИС А. Л.

Существенное отличие двумерной гидродинамики от трехмерной сводится, как правило, к значительному упрощению соответствующих задач, благодаря чему количество точных и численных результатов в двумерной гидродинамике больше, чем в трехмерной. Например, для двумерных движений несжимаемой жидкости доказаны существование и единственность решений как уравнений Эйлера, так и Навье – Стокса [1–3]; в трехмерном случае этого сделать не удается.

Поскольку решения гидродинамических уравнений для двумерных движений в общем виде до сих пор не получены, двумерная статистическая гидродинамика не более проста, чем трехмерная. Указанное обстоятельство объясняет тот факт, что первое исследование, касающееся двумерной турбулентности, появилось тогда, когда в трехмерной статистической гидродинамике уже были получены многочисленные результаты и в большой степени был развит математический аппарат для описания последней. Это исследование было предпринято Онсагером с целью описания предложенных им квантованных вихревых нитей в сверхтекучей жидкости [4]. Вслед за этим в [5, 6] была указана возможность объединения вихрей одного знака в более крупные, так что динамика двумерной турбулентности сводилась к передаче энергии от компонент с большими волновыми числами к компонентам с малыми волновыми числами. Такое аномальное поведение двумерной турбулентности (подтвержденное в какой-то степени численными результатами [7, 8]), а также отсутствие лабораторных экспериментов и приложений делали подобные исследования в некотором роде абстрактными до тех пор, пока не обнаружилось, что многочисленные экспериментальные данные о динамике атмосферы и океана требуют для своего объяснения предположений о передаче энергии от мелкомасштабных движений к крупномасштабным (впоследствии такие процессы были связаны с представлениями о так называемой отрицательной турбулентной вязкости [9]).

В последние годы опубликовано значительное число работ, посвященных как собственно двумерной турбулентности, так и возможным приложениям к динамике атмосферы, океана, магнитосферы и движению тонких пленок квантовых жидкостей (см., например, [10, 11]). Как указано выше, уже в ранних исследованиях двумерной турбулентности была установлена возможность передачи энергии от мелкомасштабных движений к крупномасштабным. Известно, с другой стороны, что при трехмерном турбулентном движении имеет место обратная ситуация – поток энергии направлен в сторону больших волновых чисел (во всяком случае это происходит при вырождении трехмерной турбулентности, т. е. когда некоторый начальный спектр эволюционирует без воздействия внешних сил). Это различие вызвало большое число исследований, касающихся именно вопроса о направлении передачи энергии по спектру двумерной турбулентности. Другое важное направление в изучении двумерной турбулентности заключается в поиске универсальной формы спектра. Как оказалось, и в этом отношении отличие двумерной турбулентности от трехмерной весьма существенно.

Необычностью свойств двумерной турбулентности в значительной степени объясняется и своеобразие методов, применяемых при ее исследовании, например модель точечных вихрей, а также конечномерная модель, основанная на разложении скорости в ряд Фурье с последующим применением методов статистической механики (подробное изложение содержится в [11]). К более традиционным следует отнести методы, связанные с численной [12] или аналитической [13] реализацией гипотезы Миллионщикова, а также численное интегрирование двумерных гидродинамических уравнений [14, 15]. Практически во всех перечисленных работах фигурируют утверждения об отсутствии передачи энергии в сторону больших волновых чисел. Что касается формы спектра, то даже идентичные модели зачастую приводят к различным результатам. Наиболее часто обсуждаются так называемый канонический спектр $E(k) \sim k/(a+bk^2)$ и спектры типа k^{-n} (в большинстве случаев $n=3$).

Строгий результат относительно направления передачи энергии по спектру изотропной двумерной турбулентности получен в [16], где выведено спектральное неравенство, демонстрирующее увеличение тэйлоровского масштаба с ростом времени. Там же показано, что вырождение двумерной турбулентности связано с «коллапсом» спектра и его стремлением к δ-образному. Такой спектр был получен в стационарной гауссовой модели двумерной турбулентности [13], а также упоминался в [17]. Однако какого-либо обсуждения δ-спектра в последних двух работах не содержится, а, напротив, рассмотрена обратная ситуация, когда энергия «размазана» по широкому интервалу волновых чисел.

Ниже в этой работе обсуждается именно δ-спектр двумерной изотропной турбулентности. Показано, что такой спектр соответствует некоторому специальному автомодельному решению уравнения для корреляционных функций поля скорости. Рассмотрены следствия, к которым может приводить образование δ-особенности в спектре изотропной двумерной турбулентности.

1. Уравнение для корреляционных функций поля скорости. В трехмерной гидродинамике уравнение для корреляционных функций поля скорости изотропной турбулентности были впервые получены Карманом и Ховартом [18]. Источником для вывода этих уравнений является основное динамическое уравнение, связывающее вторые и третьи моменты поля скорости однородной турбулентности (см. [19, § 14]), а также некоторые специальные соотношения для корреляционных тензоров изотропной турбулентности.

Поскольку основное динамическое уравнение является фактически формой записи уравнения Навье — Стокса, имеющей один и тот же вид в трех- и двумерной гидродинамике, оно сохраняет свой вид при переходе от трех пространственных измерений к двум. Что касается упомянутых выше специальных соотношений, связывающих компоненты корреляционных тензоров, то они меняют свой вид при изменении размерности пространства. В силу этого обстоятельства двумерное уравнение Кармана — Ховарта не может быть непосредственно выписано по аналогии с трехмерным и должно быть выведено отдельно.

Рассмотрим сначала тензор $B_{ij}(r)$ (обозначения совпадают с имеющимися в [19]). Согласно известным общим результатам, такой тензор может быть выражен через два скаляра — продольный B_{LL} и поперечный B_{NN} — в виде

$$B_{ij}(r)=(B_{LL}(r)-B_{NN}(r))\frac{r_ir_j}{r^2}+B_{NN}(r)\delta_{ij} \tag{1.1}$$

Очевидно, что (1.1) в двумерном и трехмерном случаях имеет один и тот же вид. Связь между B_{LL} и B_{NN} получается приравниванием нулю дивергенции (1.1) (следствие уравнения неразрывности). Здесь уже проявляется разница в соответствующих выражениях, поскольку дивергенция радиус-вектора (а также след единичного тензора), появляющаяся в выражении $(\partial/\partial x_j)B_{ij}$, равна размерности пространства. Опуская громоздкие вычисления, приводим окончательный результат соответственно для случаев двух и трех измерений

$$B_{NN}=B_{LL}+r\frac{\partial B_{LL}}{\partial r},\qquad B_{NN}=B_{LL}+\frac{1}{2}r\frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \tag{1.2}$$

Аналогично для $B_{ij,k}$ справедливо общее утверждение, согласно которому такой изотропный тензор может быть выражен через три скаляра (для краткости опущен аргумент r)

$$B_{ij,k}=\frac{1}{r^3}(B_{LL,L}-B_{NN,L}-2B_{LN,N})r_ir_jr_k+$$
$$+\frac{B_{LN,N}}{2}(\delta_{jk}r_i+\delta_{ik}r_j)+\frac{B_{NN,L}}{r}\delta_{ij}r_k \tag{1.3}$$

Беря дивергенцию (1.3) и приравнивая нулю коэффициенты при тензоре δ_{ij} (или, что равносильно, при тензоре r_ir_j), получим после простых, но громоздких вычислений связи

$$B_{NN,L}=-B_{LL,L}$$

$$B_{LN,N}=\frac{1}{2}B_{LL,L}+\frac{1}{2}r\frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r} \tag{1.4}$$

Для сравнения укажем, что в случае трех измерений

$$B_{NN,L}=-\frac{1}{2}B_{LL,L},\qquad B_{LN,N}=\frac{1}{2}B_{LL,L}+\frac{1}{4}r\frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r}$$

Теперь с учетом (1.2), (1.4) получим из (1.1) и (1.3) соответственно

$$B_{ij}=-\frac{\partial B_{LL}}{\partial r}\frac{r_ir_j}{r^2}+\left(B_{LL}+r\frac{\partial B_{LL}}{\partial r}\right)\delta_{ij} \tag{1.5}$$

$$B_{ik,j}=\frac{1}{r^3}\left(B_{LL,L}-r\frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r}\right)r_ir_kr_j+\frac{1}{2r}\left(r\frac{\partial B_{LL,L}}{\partial r}+B_{LL,L}\right)\times$$
$$\times(\delta_{kj}r_i+\delta_{ij}r_k)-\frac{B_{LL,L}}{r}\delta_{ik}r_j \tag{1.6}$$

Что касается тензоров, включающих давление, то они в изотропном случае равны нулю [19]. Учитывая это и подставляя (1.5) и (1.6) в основное динамическое уравнение с последующим приравниванием нулю коэффициентов при δ_{ij} (или r_ir_j) в левой и правой частях получающегося уравнения, получим одно скалярное соотношение

$$\left(1+r\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial B_{LL}}{\partial t}=\left(1+r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{3}{r}\right)B_{LL,L}+2\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)B_{LL}\right] \tag{1.7}$$

Перенеся все члены этого уравнения в одну сторону и обозначив через f выражение, на которое действует оператор $(1+r\partial/\partial r)$, можно убедиться в том, что единственным неособым решением получающегося уравнения является $f=0$. Поэтому окончательно искомое уравнение есть

$$\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{3}{r}\right)\left(B_{LL,L}(r,t)+2\nu\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r}\right) \tag{1.8}$$

Отметим, что в трехмерном уравнении Кармана — Ховарта оператор в правой части содержит слагаемое $4/r$ вместо $3/r$ в рассматриваемом случае.

2. Автомодельная двумерная турбулентность. Поскольку уравнение Кармана — Ховарта оказывается недостаточным для определения фигурирующих в нем неизвестных функций, оно может быть дополнено какими-либо гипотезами, содержащими информацию относительно поведения корреляционных скаляров. Простейшая из таких гипотез — гипотеза Кармана [19] — выражается равенствами

$$B_{LL}(r,t)=v^2(t)f\left(\frac{r}{l(t)}\right),\qquad B_{LL,L}(r,t)=v^3(t)h\left(\frac{r}{l(t)}\right) \tag{2.1}$$

где $l(t)$ и $v(t)$ — специально подобранные масштабы длины и скорости.

Полная классификация всех автомодельных решений уравнения Кармана — Ховарта в трехмерном случае была дана в [20] (см. также [21]). Не останавливаясь на обсуждении всех результатов [20] применительно к двумерной турбулентности, рассмотрим интересный частный случай, соответствующий δ-спектру.

Подставляя (2.1) в (1.8) и дифференцируя полученное уравнение по времени, имеем

$$f\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{v^2}\frac{dv}{dt}\right)-\frac{xf'}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\frac{dl}{dt}\right)-\left(f''+\frac{3}{x}f'\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\nu}{vl}\right)=0,\qquad x=\frac{r}{l(t)} \tag{2.2}$$

где штрих отвечает производной по x. Будем рассматривать случай, когда существует только одно независимое линейное соотношение с постоянными коэффициентами вида (обозначения совпадают с введенными в [20])

$$c_1xf'+c_2f+c_3\left(f''+3\frac{f'}{x}\right)=0 \tag{2.3}$$

Именно в этом случае могут быть получены уравнения, определяющие v, l, f и h как функции, не сводящиеся к тривиальным. Переопределяя, как и в [20], постоянные, получим из (2.3)

$$f''+\frac{3}{x}f'+\frac{a_1}{2}xf'+\frac{a_2}{2}f=0 \tag{2.4}$$

Интересующий нас специальный случай сводится к $a_1=0$. Введем также обозначение $\varkappa=1/l$, так что $x=\varkappa r$. Как будет видно из дальнейшего, можно положить для удобства $a_2/2=1$. Тогда (2.4) принимает вид

$$f''+\frac{3}{x}f'+f=0 \tag{2.5}$$

и может быть сведено к известному уравнению [22]

$$f''+\frac{1-2\alpha}{x}f'+\left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2+\frac{\alpha^2-n^2\gamma^2}{x^2}\right]f=0$$

имеющему решения

$$f=x^{\alpha}J_n(\beta x^{\gamma})$$

причем в рассматриваемом случае $\alpha=-1$, $\beta=\gamma=1$, $n=\pm1$, $J_n(z)$ — функция Бесселя индекса n. Ограниченное при $x=0$ решение соответствует $n=1$, так что

$$f=\frac{J_1(\varkappa r)}{\varkappa r} \tag{2.6}$$

Из (2.6) видно, что наличие множителя $a_2/2$ в (2.4), (2.5) свелось бы к умножению аргумента на несущественную постоянную $(a_2/2)^{1/2}$. Итак, имеем в рассматриваемом случае для продольного корреляционного скаляра

$$B_{LL}=v^2\frac{J_1(\varkappa r)}{\varkappa r}.$$

Найдем теперь спектр, соответствующий полученной корреляционной функции. Используя (1.2), а также известные рекуррентные соотношения для функций Бесселя, будем иметь (для удобства опустим пока множитель v^2)

$$B_{NN}=J_1'(\varkappa r)$$

так что из (1.1) следует

$$B_{ij}=\left[\frac{J_1}{\varkappa r}-J_1'\right]\frac{r_ir_j}{r^2}+J_1'\delta_{ij}$$

Взяв теперь след этого тензора, получим

$$B_{ii}=J_0(\varkappa r)$$

Для спектра $F(k)$, следовательно, имеем

$$F(k)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}r\,dr\int_0^{2\pi}e^{-ikr\cos\varphi}\,d\varphi\,J_0(\varkappa r)$$

или, переходя к спектральной плотности энергии и пользуясь интегральным представлением функции Бесселя J_0

$$J_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-iz\cos\varphi}\,d\varphi$$

придем к следующему выражению для $E(k)$:

$$E(k)=2\pi kF(k)=k\int\limits_0^{\infty} r\,dr\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikr\cos\varphi}\,d\varphi\,J_0(\varkappa r)=$$

$$=k\int\limits_0^{\infty} J_0(kr)J_0(\varkappa r)\,r\,dr$$

Это выражение с учетом известного тождества теории бесселевых функций есть $\delta(k-\varkappa)$, так что окончательно приходим к δ-спектру

$$E(k,t)=v^2(t)\delta(k-\varkappa)$$

Следует отметить здесь, что аналогичное специальное решение [20] [1] в трехмерном случае также приводит к δ-спектру, однако в той же работе указано, что такой спектр не имеет физического смысла. Действительно, есть серьезные основания полагать, что при трехмерном турбулентном движении δ-спектр быстро «размазывается» по конечному интервалу волновых чисел [19]. В двумерной же ситуации этого не происходит из-за отсутствия соответствующих нелинейных членов в уравнении для среднего квадрата вихря [16].

3. О возможности перехода изотропного спектра двумерной турбулентности в анизотропный. Тот факт, что изотропный δ-спектр является следствием некоторых точных решений уравнений гидродинамики, а также то, что он может быть тем предельным состоянием, к которому вообще может стремиться спектр изотропной двумерной турбулентности, требует обсуждения результатов, к которым может приводить столь необычная ситуация. Уже само наличие особенности в спектре свидетельствует о каком-то необычном поведении корреляционных функций на бесконечности. Действительно, с учетом известных асимптотических свойств функций Беселя получим из (2.6) при $\varkappa r\gg 1$

$$B_{LL}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi(\varkappa r)^3}}\cos\left(\varkappa r-\frac{3}{4}\pi\right) \tag{3.1}$$

Из (3.1), таким образом, следует, что B_{LL} затухает при больших r, но лишь по степенно́му закону. Если в начальный момент времени турбулентность такова, что корреляционные функции убывают с расстоянием экспоненциально, а по прохождении некоторого промежутка времени спектр в соответствии с полученными результатами становится δ-образным, со степенным характером убывания корреляционных функций, то мы имеем картину, согласно которой в жидкости возникает своеобразное дальнодействие. Для выяснения следствий, к которым может приводить такое дальнодействие, обратимся к вычислению инварианта Лойцянского. В двумерном случае эта величина выражается через B_{LL} [16]

$$\Lambda=\int\limits_0^{\infty} B_{LL}r^3\,dr \tag{3.2}$$

Легко видеть с учетом (3.1), что этот интеграл расходится. Как показано в [23], величина инварианта Лойцянского связана с сохраняющим-

[1] Фактически в [20] δ-спектр получен впервые как следствие точного решения уравнения Кармана – Ховарта.

ся моментом импульса жидкости в большом объеме

$$\Lambda \sim \lim_{V\to\infty} \frac{\langle [M(V)]^2\rangle}{V} = \lim_{V\to\infty} \left\langle \sum_{i<j} \left[\int_V m_{ij}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \right]^2 \right\rangle, \qquad m_{ij}=r_i u_j - r_j u_i$$

Здесь плотность положена равной единице, M — момент импульса в объеме V, m_{ij} — компонента тензора плотности момента импульса. Более точное соотношение этого типа было дано Колмогоровым (см. [19, § 15]), а именно в предыдущем соотношении правая часть меняется на

$$\lim_{\alpha\to 0} \lim_{V\to\infty} \frac{\alpha}{\pi} \langle [M(\alpha, V)]^2\rangle = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\pi} \lim_{V\to\infty} \left\langle \sum_{i<j} \left[\int_V m_{ij} e^{-\alpha r^2}\, d\mathbf{r} \right]^2 \right\rangle$$

В этом случае связь инварианта Лойцянского с соответствующим законом сохранения имела бы вид

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\pi} \lim_{V\to\infty} \langle [M(\alpha, V)]^2\rangle \sim \Lambda$$

и результат не зависел бы от формы границы объема, по которому производится интегрирование. Однако из-за расходимости интеграла (3.2) такой результат не имеет смысла. Но это как раз и означает, что при усреднении величины $\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{r})$ результат уже будет зависеть не только от r, как это должно быть при изотропном турбулентном движении, но также и от положения точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}+\mathbf{r}$. Поэтому образование δ-особенности несовместимо с изотропией (при движении в ограниченном объеме), и спектр становится анизотропным. Физически появление этой анизотропии связано как раз с тем, что при наличии указанного выше дальнодействия при достижении спектром δ-образного вида движение начинает «чувствовать» границу.

Этот вывод о возникновении анизотропии подтверждается проведенными недавно экспериментами [24] по исследованию двумерной турбулентности в тонкой пленке жидкости (турбулентность генерировалась пропусканием пленки через решетку). С течением времени масштаб турбулентности, практически изотропной вначале, увеличивался и в результате турбулентное движение становилось анизотропным, причем по истечении конечного времени оно приобретало выраженный когерентный характер.

Отметим, наконец, что при наличии границ линейные размеры области определяют естественный предел для растущего масштаба турбулентности и это является простейшим свидетельством определяющего влияния их на динамику движения при появлении указанного здесь дальнодействия.

Следует иметь в виду, что на самом деле при вырождении двумерной турбулентности имеют место два процесса: затухание движения за счет вязкости и, как уже было отмечено, деформация спектра, сводящаяся к коллапсу с соответствующим увеличением масштаба

$$k_*^{-1} = \left\{ \frac{\int E\, dk}{\int k^2 E\, dk} \right\}^{1/2}$$

Таким образом, необходимо выяснить, не произойдет ли затухание раньше, чем успеет существенно измениться указанный масштаб. Рассмотрим с этой целью характерные времена перечисленных процессов

$$\tau_E = \left\{ \frac{1}{\int E\, dk} \frac{d}{dt} \int E\, dk \right\}^{-1}, \qquad \tau_* = \left\{ k_*^2 \frac{d}{dt} (k_*^{-2}) \right\}^{-1} \tag{3.3}$$

Используя соотношения (см. [16])

$$\frac{d}{dt}\int E\,dk=-2\nu\int k^2E\,dk,\qquad \frac{d}{dt}\int k^2E\,dk=-2\nu\int k^4E\,dk$$

получим после несложных преобразований из (3.3) соответственно

$$\tau_E=(2\nu k_*^2)^{-1},\quad \tau_*=\{2\nu k_*^2[\Phi(E)-1]\}^{-1}$$

$$\Phi(E)=\frac{\int E\,dk\int k^4E\,dk}{\left\{\int k^2E\,dk\right\}^2}$$

так что $\tau_E/\tau_*=\Phi(E)-1$ и, таким образом, отношение указанных времен зависит от формы спектра. Поскольку всегда $\Phi(E)\geqslant 1$, затухание никогда не может произойти раньше существенного изменения формы спектра. Что же касается, например, спектра k^{-3}, обычно рассматриваемого в литературе, то очевидно, что он не может простираться до слишком больших значений K без заметной деформации, поскольку имеем

$$\Phi_K(E)=\int\limits_0^K E\,dk\int\limits_0^K k^4E\,dk\Big/\left\{\int\limits_0^K k^2E\,dk\right\}^2\sim\frac{K}{(\ln K)^2}$$

Величина в правой части неограниченно растет с ростом K, так что спектр k^{-3} сменяется убывающим быстрее. Такая картина была действительно обнаружена как в модельных [12] численных экспериментах, соответствующих вычислениям в рамках гипотезы Миллионщикова, так и при прямом численном интегрировании двумерных уравнений Навье – Стокса [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961. 203 с.
2. *Эбин Д., Марсден Дж.* Группы диффеоморфизмов и движение несжимаемой жидкости // Математика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1973. Т. 17. № 5. С. 142–166; № 6. С. 111–146.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
4. *Onsager L.* Statistical Hydrodynamics // Nuovo Cim., Suppl. 1949. V. 6. № 2.
5. *Fjørtoft R.* On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional nondivergent flow // Tellus. 1953. V. 5. № 3. P. 225–230.
6. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
7. *Ogura Y.* Energy transfer in a normally distributed and isotropic turbulent velocity field in two dimensions // Phys. Fluids. 1962. V. 5. № 4. P. 395–401.
8. *Ogura Y.* Energy transfer in an isotropic turbulent flow // J. Geophys. Res. 1962. V. 67. № 8. P. 3143–3150.
9. *Старр В. П.* Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир, 1971. 260 с.
10. *Мирабель А. П., Монин А. С.* Двумерная турбулентность // Успехи механики. 1979. Т. 2. № 3. С. 47–95.
11. *Kraichnan R. H., Montgomery D.* Two-dimensional turbulence // Repts. Progr. Phys. 1980. Т. 43. № 5. P. 547–619.
12. *Tatsumi T., Yanase S.* The modified cumulant expension for two-dimensional isotropic turbulence // J. Fluid. Mech. 1981. V. 110. P. 475–496.
13. *Кляцкин В. И.* К статистической теории двумерной турбулентности // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 889–891.
14. *Lilly D. K.* Numerical simulation of developing and decaying two-dimensional turbulence // J. Fluid Mech. 1971. V. 45. Pt 2. 395–415.
15. *Deem G. S., Zabusky N. J.* Ergodic boundary in numerical simulation of two-dimensional turbulence // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 27. № 7. P. 396–399.
16. *Цескис А. Л.* О двумерной турбулентности // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1982. Т. 83. № 1. С. 176–182.
17. *Новиков Е. А.* Спектральные неравенства для двумерной турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14. № 6. С. 668–671.
18. *Karman T., Howarth L.* On the statistical theory of isotropic turbulence // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1938. V. 164. № 917. P. 192–215.
19. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967.
20. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Гостехиздат, 1954.
21. *Седов Л. И.* Вырождение изотропных турбулентных движений несжимаемой жидкости. // Докл. АН СССР. 1944. Т. 42. № 3. С. 121–124.
22. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. М.: Наука, 1968. 618 с.
23. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
24. *Couder Y.* Two-dimensional grid turbulence in a thin liquid film // J. Phys. Lett. France. 1984. V. 45. № 8. P. 353–360.

Москва

Поступила в редакцию
28.VII.1986