Номерами *1–4* на фигуре обозначены кривые, рассчитанные для толщин слоя чистой жидкости $h_2=5$, 10, 25, 50 см соответственно при фиксированной толщине пористого слоя 10 см.

Из фигуры видно, что при увеличении волнового числа k при заданном h_2 модуль декремента затухания уменьшается, т. е. более длинные волны затухают быстрее коротких (*а*). При увеличении h_2 и фиксированном k величина $|\beta|$ уменьшается. При увеличении волнового числа k при заданном h_2, частота увеличивается (*б*). При увеличении h_2 и фиксированном k частота уменьшается (расчеты проводились в интервале волновых чисел от 0 до $2{,}5\cdot10^3k$).

При $k=2\pi/\lambda\to0$ ($\lambda\to\infty$) для всех h_2 $\beta\to-4{,}05$ с, $\omega\to6{,}37$ с$^{-1}$.

В заключение отметим, что представляет интерес решение аналогичных задач для электропроводных, а также намагничивающихся жидкостей.

Авторы выражают благодарность Ю. З. Алешкову за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 350 с.
2. *Тактаров Н. Г.* Конвекция намагничивающихся жидкостей в пористых средах // Магнитн. гидродинамика. 1981. № 4. С. 33–35.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
4. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
5. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 431 с.
6. *Slichter Ch.* Theoretical investigation of the motion of ground waters // XIX Annual Rept. U. S. Geol. Survey 1897–1898. 1899. Pt 2. P. 295–384.
7. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

Саранск

Поступила в редакцию 20.II.1986

УДК 532.59

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ДЛИННОЙ ВОЛНЫ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ

ЛОКШИН А. А., РОК В. Е.

Получены асимптотические формулы для амплитуды нелинейной длинной волны, распространяющейся по мелкой воде переменной (плавно меняющейся) глубины.

В двумерном случае уравнения мелкой воды в гидростатическом приближении имеют вид [1, 2]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial\eta}{\partial x},\qquad \frac{\partial}{\partial x}(u(\eta+h))=-\frac{\partial\eta}{\partial t}\tag{1}$$

Здесь $u(t,x)$ – горизонтальная компонента скорости, $\eta(t,x)$ – возвышение свободной поверхности, g – ускорение силы тяжести, $h=h(\varepsilon x)$ – глубина дна относительно невозмущенного уровня жидкости, $0<\varepsilon\ll1$.

Пусть ν_0 – плотность воды. Следуя известной газодинамической аналогии [1], введем «плотность» $\rho\equiv(\eta+h)\nu_0$ и «давление» $P\equiv g\rho^2/2\nu_0$. Тогда система (1) перепишется в виде

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\rho=-\frac{\partial P}{\partial x}+\varepsilon g\rho h'(\varepsilon x)$$
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\tag{2}$$

Перейдем теперь от эйлеровой координаты x к лагранжевой координате r по формулам

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\rho(0,r)}{\rho(t,r)},\qquad \frac{\partial x}{\partial t}=u(t,r),\qquad x(0,r)=r$$
$$x(t,r)=r+\int_0^t u(t,r)\,dt\tag{3}$$

Будем считать, что при $t\leqslant0$, $x>0$ жидкость находилась в покое. Тогда ясно, что в (3) следует положить

$$\rho(0,r)=\nu_0 h(\varepsilon r),\quad r>0\tag{4}$$

После замены (3), (4) система (2) перепишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\nu_0 h(\varepsilon r)}\frac{\partial P(\rho)}{\partial r}=\varepsilon g h'(\varepsilon x), \quad x=x(t,r)$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\nu_0 h(\varepsilon r)}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \tag{5}$$

Исключая из этой системы функцию $u(t, r)$ перекрестным дифференцированием, приходим к одному нелинейному волновому уравнению с правой частью

$$\nu_0 h(\varepsilon r)\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}-\frac{1}{\nu_0 h(\varepsilon r)}\frac{\partial^2}{\partial r^2}P(\rho)=-\varepsilon^2 g h''\frac{\partial x}{\partial r}$$

Правая часть в последнем уравнении равномерно мала и имеет порядок $O(\varepsilon^2)$. Пренебрегая ею, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{\rho}+\frac{k^2}{2h^2(\varepsilon r)}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\rho^2=0, \qquad k\equiv\left(\frac{g}{\nu_0^3}\right)^{1/2} \tag{6}$$

Поставим следующее граничное условие для этого уравнения: $\rho(t, 0)=\rho_0(t)$. Поставленную граничную задачу для уравнения (6) будем решать с помощью следующего преобразования Грина – Лиувилля

$$\rho=wh^{-2/5}(\varepsilon r), \qquad y=\int_0^r h^{8/5}(\varepsilon r)\,dr \tag{7}$$

Преобразование (7) переводит уравнение (6) с точностью до равномерно малой невязки порядка $O(\varepsilon^2)$ в уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{w}+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}w^2=0 \tag{8}$$

Представим теперь полученное уравнение (8) в виде операторного произведения [3]

$$\frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}w^{-3/2}+k\frac{\partial}{\partial y}\right\}\left\{w^{-3/2}\frac{\partial}{\partial t}+k\frac{\partial}{\partial y}\right\}w^2=0 \tag{9}$$

Здесь при перемножении операторных скобок принимается, что раньше действует оператор, стоящий правее. Из (9) очевидно, что простая волна, распространяющаяся вправо, будет описываться уравнением первого порядка, соответствующим внутреннему операторному множителю: $w^{-3/2}\partial w^2/\partial t+k\partial w^2/\partial y=0$. Возвращаясь к переменным ρ, r по формулам (7), получим отсюда уравнение простой волны, распространяющейся вправо, в следующей форме:

$$\frac{h(\varepsilon r)}{k}\rho^{-3/2}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho}{\partial r}+\frac{2}{5}\frac{\varepsilon h'(\varepsilon r)}{h(\varepsilon r)}\rho=0 \tag{10}$$

Запишем уравнения характеристик для (10)

$$\frac{dt}{dr}=\frac{h(\varepsilon r)}{k}\rho^{-3/2}, \qquad \frac{d\rho}{dr}=-\frac{2}{5}\frac{\varepsilon h'(\varepsilon r)}{h(\varepsilon r)}\rho$$

Эти уравнения удается проинтегрировать в квадратурах

$$\rho(t,r)=\rho_0(\tau)\left(\frac{h(0)}{h(\varepsilon r)}\right)^{2/5}$$
$$t=\tau+\frac{1}{kh^{3/5}(0)\rho_0^{3/2}(\tau)}\int_0^r h^{2/5}(\varepsilon r)\,dr \tag{11}$$

Здесь считаем, что параметр $\tau\geqslant0$, поскольку при $\tau<0$ характеристики проходят по невозмущенной области (где, очевидно, $\rho\equiv\nu_0 h(\varepsilon r)$).

Чтобы определить возвышение свободной поверхности, воспользуемся связью между η и ρ

$$\eta(t,r)=\frac{\rho(t,r)}{\nu_0}-h(\varepsilon x(t,r)),\qquad x(t,r)=r+\int_0^t u(t,r)\,dt \tag{12}$$

Здесь функция $u(t,r)$ однозначно определяется из (5) и из вытекающего из сделанных предположений условия $u(0,0)=0$. Из формул (11), (12) ясно, что вдоль характеристик возвышение свободной поверхности

$$\eta(t,r)\sim\mathrm{const}\,h^{-2/5}(\varepsilon r) \tag{13}$$

что представляет собой соотношение, отличное от закона Грина, имеющего место в линейной ситуации.

Наконец, момент опрокидывания волны нетрудно определить из (11), записав уравнения огибающей семейства характеристик и определив наименьшую ординату точек этой огибающей. Для определения момента опрокидывания, возможно, перспективен также метод [4].

Авторы благодарны С. Л. Лопатникову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стокер Дж.* Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
2. *Пелиновский Е. Н.* Нелинейная динамика волн цунами. Горький: Ин-т прикл. физики. АН СССР, 1982. 226 с.
3. *Локшин А. А.* Нелинейная ударная волна в наследственной среде и точная факторизация нелинейного волнового оператора // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 104–108.
4. *Гринфельд М. А.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в нелинейно-упругом материале // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 883–898.

Москва

Поступила в редакцию
23.XII.1986