

когда характерные времена изменения насыщенности и релаксации к равновесному состоянию близки (в рассмотренном случае их отношение более 0,5). Если отношение этих времен меньше или равно 0,1, то модель [1] неприменима.

Авторы благодарны В. М. Ентову за интерес к работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М. Неравновесные эффекты при фильтрации несмешивающихся жидкостей // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. С. 33–43.
2. Цыбульский Г. П. Уравнения неравновесной двухфазной фильтрации // Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. С. 203–213.
3. Баренблатт Г. И. Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 144–151.
4. Баренблатт Г. И., Винниченко А. П. Неравновесная фильтрация несмешивающихся жидкостей // Успехи механики. 1980. Т. 2. № 3. С. 35–50.
5. Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И. и др. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 190 с.
6. Ентов В. М. К теории неравновесных эффектов при фильтрации неоднородных жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 52–57.
7. Манучарянц Э. О., Мишина А. Ю., Юдин В. А. Моделирование неравновесного вытеснения двух несмешивающихся жидкостей в сетке капилляров на ЭВМ. Деп. в ВИНТИ. М. 1985. 47 с. № 3748–85.
8. Ентов В. М., Фельдман А. Я., Ченсин Э. Программное моделирование процесса капиллярного вытеснения в пористой среде // Программирование. 1975. № 3. С. 67–74.
9. Белихова М. Г., Данилова Н. Л., Ентов В. М., Ченсин Э. Моделирование неравновесной и нелинейной фильтрации в сетке капилляров // Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. С. 17–24.
10. Эфрос А. Л. Физика и геометрия беспорядка. М.: Наука, 1982. 175 с.
11. Скал А. С., Шкловский Б. И. Топология бесконечного кластера в теории протекания и теория прыжковой проводимости // Физика и техника полупроводников. 1974. № 8. С. 1586–1592.

Москва

Поступила в редакцию  
9.VI.1986

УДК 532.59

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СЛОЕ ЖИДКОСТИ НА ПОРИСТОМ ОСНОВАНИИ

СТОЛЯРОВ И. В., ТАКТАРОВ Н. Г.

Рассматривается распространение волн по поверхности слоя тяжелой однородной несжимаемой жидкости, находящейся на недеформируемом пористом основании. Пористая среда ограничена снизу твердой непроницаемой стенкой и насыщена этой же жидкостью целиком.

Система координат выбирается так, что ось  $z$  направлена вертикально вверх, а плоскость  $z=0$  совпадает с поверхностью раздела свободной жидкости и пористой среды, насыщенной жидкостью. Толщины плоских слоев пористой среды и свободной жидкости равны  $h_1$  и  $h_2$  соответственно. Величины, относящиеся к насыщенной пористой среде, обозначим индексом 1, а к свободной жидкости — 2.

Уравнения движения жидкости в пористой среде запишем в виде [1, 2]

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \rho \mathbf{g} - \frac{\eta}{K} \mathbf{u}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon$  — пористость матрицы;  $\rho$ ,  $\eta$  — плотность и динамическая вязкость жидкости,  $K$  — коэффициент проницаемости,  $\mathbf{u}_1$  — макроскопическая скорость фильтрации,  $p_1$  — давление,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения.

Потенциал скорости  $\varphi(x, y, z, t)$  ( $\mathbf{u}_2 = \nabla \varphi$ ) в слое свободной жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа [3]

$$\Delta \varphi = 0 \quad (2)$$

Применяя к первому уравнению (1) операцию  $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$  и проецируя получившееся уравнение на ось  $z$ , получим уравнение для вертикальной компоненты скорости  $u_{1z}$

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{1z} = -\frac{\eta}{K} \Delta u_{1z} \quad (3)$$

Граничные условия на поверхностях раздела имеют вид [1, 4]

$$\begin{aligned} u_{1z}|_{z=-h_1}=0, \quad u_{1z}|_{z=0}=u_{2z}|_{z=0} \\ p_1|_{z=0}=p_2|_{z=0}, \quad \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_2} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Первое из условий (4) – это условие непротекания на твердой стенке, ограничивающей снизу пористую среду; второе – условие непрерывности расхода на границе раздела жидкость – пористая среда, насыщенная жидкостью; третье – непрерывность давления на этой же границе; четвертое условие является следствием непрерывности давления на свободной возмущенной поверхности слоя жидкости с учетом линейризованного интеграла Коши – Лагранжа [3] и кинематического условия  $u_{2z} = \partial \zeta / \partial t$ , где  $\zeta(x, y, t)$  – смещение точек свободной поверхности в вертикальном направлении. Решение уравнений (2), (3) с граничными условиями (4) ищем в виде

$$\begin{aligned} u_{1z}(x, y, z, t) &= v(z) \exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)] \\ \varphi(x, y, z, t) &= \Phi(z) \exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)] \\ \gamma &= \text{Re}(\gamma) + i \text{Im}(\gamma), \quad |\text{Im}(\gamma)| = \omega \end{aligned} \quad (5)$$

где  $k_1, k_2$  – вещественные волновые числа, характеризующие периодичность волновых решений (5) по направлениям  $x$  и  $y$ ,  $\omega$  – частота колебаний;  $\text{Re}(\gamma) = \beta$  – декремент затухания колебаний.

Подставляя (5) в (2), (3), находим

$$\Phi'' - k^2 \Phi = 0 \quad (6)$$

$$\left( \gamma - \frac{\eta \varepsilon}{\rho K} \right) (v'' - k^2 v) = 0, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

где штрих означает дифференцирование по  $z$ .

Граничные условия (4) для амплитуд  $v(z)$ ,  $\Phi(z)$  имеют вид

$$\begin{aligned} v(z) &= 0 \quad (z = -h_1), \quad v(z) = \Phi'(z) \quad (z = 0) \\ \left( \frac{\rho \gamma}{\varepsilon} - \frac{\eta}{K} \right) v'(z) - \rho \gamma \Phi''(z) &= 0 \quad (z = 0) \\ \frac{\gamma^2}{g} \Phi(z) + \Phi'(z) &= 0 \quad (z = h_2) \end{aligned} \quad (7)$$

Третье из условий (7) получено с учетом линейризованных уравнений идеальной жидкости в области 2 и непрерывности расхода жидкости на поверхность пористой среды.

Решением системы (6) являются функции

$$v(z) = C_1 \exp(-kz) + C_2 \exp(kz), \quad \Phi(z) = C_3 \exp(-kz) + C_4 \exp(kz) \quad (8)$$

Граничные условия (7) с учетом (8) приводят к однородной системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \exp 2kh_1 + C_2 = 0, \quad C_1 + C_2 + k(C_3 - C_4) = 0 \\ \left( \frac{\eta}{K} - \frac{\rho \gamma}{\varepsilon} \right) C_1 + \left( \frac{\rho \gamma}{\varepsilon} - \frac{\eta}{K} \right) C_2 - \rho \gamma k (C_3 + C_4) = 0 \\ C_3 + C_4 \left[ \left( \frac{\gamma^2}{gk} + 1 \right) \left( \frac{\gamma^2}{gk} - 1 \right)^{-1} \right] \exp 2kh_2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Приравнявая определитель системы (9) к нулю, находим дисперсионное уравнение для поверхностных волн

$$\frac{\rho}{g} \left( a_1 - \frac{a_2}{\varepsilon} \right) \gamma^3 + \frac{\eta a_2}{gK} \gamma^2 + \rho k \left( \frac{a_4}{\varepsilon} - a_3 \right) \gamma - \frac{\eta k a_4}{K} = 0 \quad (10)$$

$$a_1 = \exp 2kh_1 + \exp 2kh_2 - \exp 2k(h_1 + h_2) - 1$$

$$a_2 = \exp 2kh_1 + \exp 2kh_2 + \exp 2k(h_1 + h_2) + 1$$

$$a_3 = \exp 2kh_1 - \exp 2kh_2 + \exp 2k(h_1 + h_2) - 1$$

$$a_4 = \exp 2kh_1 - \exp 2kh_2 - \exp 2k(h_1 + h_2) + 1$$

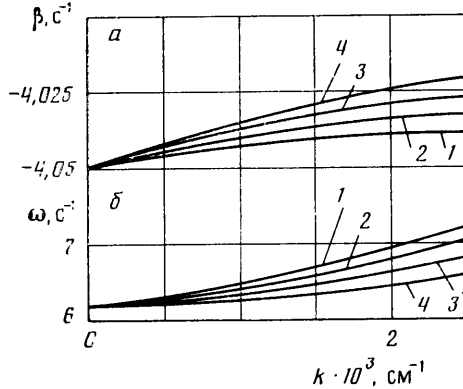
Отметим, что при  $\varepsilon \rightarrow 1$ ,  $\eta/K \rightarrow 0$  из уравнения (10) следует дисперсионное уравне-

ние для волн на слое жидкости конечной глубины  $h_1+h_2$  с непроницаемым дном [4]

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} k(h_1+h_2)$$

Предельный переход  $\epsilon \rightarrow 1$ ,  $\eta/K \rightarrow 0$  соответствует замене пористой среды слоем идеальной жидкости. При этом уравнение Дарси (1) переходит в уравнение Эйлера для идеальной жидкости, а третье граничное условие в (7) удовлетворяется тождественно в силу второго условия.

Выясним предельный вид дисперсионного уравнения (10) при  $h_1 \rightarrow 0$ . Очевидно, что при  $h_1 \rightarrow 0$  должны выполняться условия  $u_{1x} \rightarrow 0$ ,  $u_{1y} \rightarrow 0$ . Физический смысл этих условий заключается в том, что фильтрацию в тонком слое можно рассматривать как течение Пуазейля в плоскопараллельной щели толщиной  $h_1$ , а поэтому скорость фильтрации (средний расход на единицу толщины) будет порядка  $\sim h_1^2$ . Из уравне-



ния неразрывности  $\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0$  следует, что  $\partial u_{1z} / \partial z \rightarrow 0$  при  $h_1 \rightarrow 0$ . Далее, поскольку  $\Phi'(z) \neq 0$  при  $z=0$ , из третьего условия в (7) следует, что при  $z=0$

$$\left( \frac{\rho\gamma}{\epsilon} - \frac{\eta}{K} \right) v'(z) \neq 0$$

Для выполнения этого условия необходимо потребовать, чтобы  $K \rightarrow 0$ , так как  $v'(z) = 0$ . Нетрудно проверить, что при  $h_1 \rightarrow 0$ ,  $K \rightarrow 0$  уравнение (10) принимает вид

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kh_2)$$

Из уравнения Дарси (1) при  $K \rightarrow 0$  следует  $\mathbf{u}_1 = 0$ .

Уравнение (10) кубическое относительно  $\gamma$  и может быть приведено к так называемому неполному кубическому уравнению [5] с дискриминантом  $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$ , где  $p$  и  $q$  имеют вид

$$p = -\frac{\eta^2 a_2^2}{3\rho^2 K^2 m^2} - \frac{gk}{m} \left( a_3 - \frac{a_4}{\epsilon} \right) \quad (11)$$

$$q = \frac{2\eta^3 a_2^3}{27\rho^3 K^3 m^3} + \frac{\eta\rho k a_2}{3\rho K m^2} \left( a_3 - \frac{a_4}{\epsilon} \right) - \frac{\eta g k a_4}{\rho m K}, \quad m = a_1 - \frac{a_2}{\epsilon}$$

При выполнении условия  $D > 0$  существует колебательное движение, поскольку в этом случае имеются два комплексно-сопряженных корня у уравнения (10). При условии  $D < 0$  колебательных движений нет.

Результаты расчетов, проведенных на ЭВМ, показывают, что условие  $D > 0$  выполняется во всей области существования длинных волн, т. е. для волновых чисел, удовлетворяющих условию  $k(h_1+h_2) \ll 1$ .

В области волновых чисел, не удовлетворяющих условию  $D > 0$ , имеет место аperiодическое движение.

На фигуре приведены графики рассчитанных зависимостей декремента затухания  $\beta$  и частоты  $\omega$  от волнового числа  $10^3 k$ . Пористая среда (слой 1) моделировалась совокупностью шариков одинакового размера, уложенных определенным образом. Пористость  $\epsilon = 0,26$  выбрана в предположении наиболее плотной ромбоэдрической упаковки шариков [6]. Приняты следующие значения параметров:  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $\eta = 0,01 \text{ г/см} \cdot \text{с}$ ,  $h_1 = 10 \text{ см}$ . Коэффициент проницаемости  $K$  вычислен с использованием полумпирической формулы Козени [7] для шариков диаметром  $d = 1 \text{ см}$

$$K = \frac{\epsilon^3 d^2}{150(1-\epsilon)^2}$$

Номерами 1-4 на фигуре обозначены кривые, рассчитанные для толщин слоев чистой жидкости  $h_2=5, 10, 25, 50$  см соответственно при фиксированной толщине пористого слоя 10 см.

Из фигуры видно, что при увеличении волнового числа  $k$  при заданном  $h_2$  модуль декремента затухания уменьшается, т. е. более длинные волны затухают быстрее коротких (а). При увеличении  $h_2$  и фиксированном  $k$  величина  $|\beta|$  уменьшается. При увеличении волнового числа  $k$  при заданном  $h_2$ , частота увеличивается (б). При увеличении  $h_2$  и фиксированном  $k$  частота уменьшается (расчеты проводились в интервале волновых чисел от 0 до  $2,5 \cdot 10^3 k$ ).

При  $k=2\pi/\lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) для всех  $h_2$   $\beta \rightarrow -4,05$  с,  $\omega \rightarrow 6,37$  с<sup>-1</sup>.

В заключение отметим, что представляет интерес решение аналогичных задач для электропроводных, а также намагничивающихся жидкостей.

Авторы выражают благодарность Ю. З. Алешкову за обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 350 с.
2. Тактаров Н. Г. Конвекция намагничивающихся жидкостей в пористых средах // Магнитн. гидродинамика. 1981. № 4. С. 33-35.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
4. Срегенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 431 с.
6. Slichter Ch. Theoretical investigation of the motion of ground waters // XIX Annual Rept. U. S. Geol. Survey 1897-1898. 1899. Pt 2. P. 295-384.
7. Полубарнинова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977: 664 с.

Саранск

Поступила в редакцию  
20.II.1986

УДК 532.59

### ОБ ЭВОЛЮЦИИ ДЛИННОЙ ВОЛНЫ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ

ЛОКШИН А. А., ПОР В. Е.

Получены асимптотические формулы для амплитуды нелинейной длинной волны, распространяющейся по мелкой воде переменной (плавно меняющейся) глубины. В двумерном случае уравнения мелкой воды в гидростатическом приближении имеют вид [1, 2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (u(\eta+h)) = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (1)$$

Здесь  $u(t, x)$  — горизонтальная компонента скорости,  $\eta(t, x)$  — возвышение свободной поверхности,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $h=h(\epsilon x)$  — глубина дна относительно невозмущенного уровня жидкости,  $0 < \epsilon \ll 1$ .

Пусть  $\nu_0$  — плотность воды. Следуя известной газодинамической аналогии [1], введем «плотность»  $\rho \equiv (\eta+h)\nu_0$  и «давление»  $P \equiv g\rho^2/2\nu_0$ . Тогда система (1) переписывается в виде

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \rho = -\frac{\partial P}{\partial x} + \epsilon g \rho h'(\epsilon x) \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Перейдем теперь от эйлеровой координаты  $x$  к лагранжевой координате  $r$  по формулам

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\rho(0, r)}{\rho(t, r)}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = u(t, r), \quad x(0, r) = r \quad (3)$$

$$x(t, r) = r + \int_0^t u(t, r) dt$$

Будем считать, что при  $t \leq 0$ ,  $x > 0$  жидкость находилась в покое. Тогда ясно, что в (3) следует положить

$$\rho(0, r) = \nu_0 h(\epsilon r), \quad r > 0 \quad (4)$$