

Критическая величина  $m_0$ , при которой происходит изменение направления потока, определяется из решения уравнения  $am_0^2 + bm_0 + c = 0$ . При  $Pr=1$  и  $n=1$  критическое значение  $m_0=1$ . При очень интенсивном охлаждении диска ( $n \rightarrow \infty$ )  $m_0 \approx 2,4$ . Аналогично можно исследовать поведение радиального потока при постоянной величине  $m$  в зависимости от параметра  $n$ . Нетрудно показать, что критическая величина  $n_0$  в этом случае определяется из решения уравнения

$$a_1 n_0^2 + b_1 n_0 + c_1 = 0$$

$$a_1 = 2m(m-1) \frac{Pr(Pr+2)}{(Pr+1)^2} - \frac{(1-m)^2 Pr(Pr+3)}{4(Pr+1)(Pr+2)} - \frac{m^2(2Pr+1)}{2Pr^2(Pr+1)}$$

$$b_1 = \frac{m^2}{Pr(Pr+1)} - \frac{2m(1-m)}{(Pr+1)} - \frac{(1-m)^2}{2(Pr+1)(Pr+2)}, \quad c_1 = \frac{m^2}{2Pr^2(Pr+1)}$$

В частности, при  $Pr=1$  и  $m=1,5$  изменение направления потока происходит при  $n_0 \approx 2,4$ , а при  $Pr=0,5$  критическая величина  $n_0=1,2$ .

На фиг. 3 показана зависимость радиального потока от параметра  $n$  при различных значениях числа Прандтля  $Pr$  и  $m=1,5$ . Как видно из результатов расчета, охлаждение диска оказывает наиболее сильное влияние на радиальное течение при малых значениях числа  $Pr$ . Это обстоятельство обусловлено ростом толщины теплового пограничного слоя с уменьшением числа  $Pr$  [4].

Авторы благодарны Э. З. Апштейну за ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению качества работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lai C.-Y., Rajagopal K. R., Szeri A. Z. Asymmetric flow above a rotating disk // J. Fluid Mech. 1985. V. 157. P. 471-492.
2. Solan A., Olek S., Toren M. Rotating compressible flow over an infinite disk // Trans. ASME, J. Appl. Mech. 1983. V. 50. № 3. P. 511-516.
3. Борисевич В. Д., Потанин Е. П. К расчету ламинарного пограничного слоя на вращающемся проницаемом диске // Инж.-физ. журн. 1985. Т. 49. № 6. С. 1022-1026.
4. Борисевич В. Д., Потанин Е. П. Пограничный слой на вращающемся в однородном осевом потоке диске при наличии отсоса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 177-181.
5. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.: Гостехиздат. 1951. 420 с.
6. Шидловский В. П. Ламинарный пограничный слой на неограниченном диске, вращающемся в газе // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 1. С. 161-164.
7. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 270 с.

Москва

Поступила в редакцию  
4.VII.1986

УДК 532.528

### ТОНКИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КАВЕРНЫ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

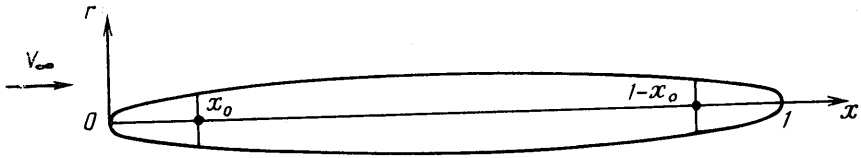
ВАСИН А. Д.

Обтекание дозвуковым потоком сжимаемой жидкости тонких осесимметричных каверн рассмотрено в [1-3]. В данной работе продолжено исследование этого вопроса методом разложений в асимптотические ряды. Получена зависимость удлинения каверны от числа кавитации и числа Маха.

1. Рассмотрим обтекание тонкого осесимметричного тела со свободной границей сжимаемым дозвуковым потоком по схеме Рябушинского, когда применимо линеаризованное уравнение течения в цилиндрической системе координат

$$(1-M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad \Phi = \frac{\Phi^*}{V_\infty L}, \quad M = \frac{V_\infty}{a_\infty} \quad (1.1)$$

где  $\Phi^*$  - потенциал скорости обтекания,  $V_\infty$  - скорость набегающего потока,  $L$  - полная длина системы тело - каверна,  $a_\infty$  - скорость звука в невозмущенной жидкости,  $x, r$  - безразмерные координаты, отнесенные к длине  $L$ . Сечение системы тело - каверна меридиональной плоскостью показано на фиг. 1, где  $x_0$  и  $l-x_0$  - координаты начала и конца каверны. Уравнения для безразмерного радиуса меридиана тела и каверны запишем в виде  $R_1 = \epsilon f_1(x)$  - тело,  $R = \epsilon f(x)$  - каверна, где  $\epsilon$  - малый параметр, равный отношению максимального радиуса каверны к полной длине, функции  $f(x)$  и  $f_1(x)$  имеют порядок единицы.



Фиг. 1

К уравнению (1.1) добавляются кинематические граничные условия на теле и каверне и динамическое условие постоянства давления на поверхности каверны

$$r=R_1: \frac{\partial \Phi}{\partial r} \bigg|_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon f_1'(x), \quad r=R: \frac{\partial \Phi}{\partial r} \bigg|_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varepsilon f'(x)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - 1 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right] + \int_{p_\infty}^{p_k} \frac{dp}{\rho} = 0, \quad p = \frac{p^*}{\rho_\infty V_\infty^2}, \quad p_\infty = \frac{p_\infty^*}{\rho_\infty V_\infty^2} \quad (1.2)$$

$$p_k = \frac{p_k^*}{\rho_\infty V_\infty^2}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty}$$

где  $p^*$ ,  $\rho^*$  — давление и плотность на линии тока,  $p_\infty^*$ ,  $\rho_\infty$  — давление и плотность в невозмущенном потоке,  $p_k^*$  — давление на границе каверны. Зависимость  $p(\rho)$  определяется уравнением Тэта [4]

$$p = p_\infty + \frac{1}{7,15M^2} (\rho^{7,15} - 1) \quad (1.3)$$

После подстановки (1.3) в (1.2) и разложения в ряд динамическое граничное условие будет иметь вид

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - 1 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{M^2}{4} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - 1 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right]^2 + \dots = \sigma, \quad \sigma = \frac{2(p_\infty^* - p_k^*)}{\rho_\infty V_\infty^2} \quad (1.4)$$

Потенциал  $\Phi$  представим в виде  $\Phi = \varphi + x$ , где  $\varphi$  — безразмерный потенциал возмущенных скоростей, который стремится к нулю при  $x$  и  $r \rightarrow \infty$ . После подстановки  $\Phi$  в (1.4) и в пренебрежении членами, имеющими порядок малости не ниже  $\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon$ , выражение (1.4) запишем следующим образом:

$$2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 = \sigma \quad (1.5)$$

Для тонких осесимметричных тел потенциал возмущенных скоростей находится методом источников и стоков, распределенных на оси симметрии. Для потока сжимаемой жидкости  $\varphi$  имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{q(x_1) dx_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (1-M^2)r^2}} \quad (1.6)$$

где  $q(x_1)$  — интенсивность источников и стоков на оси симметрии. Вблизи оси симметрии  $\varphi$  имеет следующее асимптотическое представление [5, 6]:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} S'(x) \ln r + g(x) \quad (1.7)$$

где  $S'(x)$  — производная по  $x$  от безразмерной площади поперечного сечения. Главной частью этого представления является логарифмический потенциал; к нему добавляется некоторая функция  $g(x)$ , определяемая из условия сращивания с потенциалом распределенных источников (1.6), так как логарифмический потенциал не удовлетворяет условию на бесконечности. Функция  $g(x)$  также учитывает влияние сжимаемости. В некоторых случаях (для очень тонких каверн) величиной  $g(x)$  пренебрегают по сравнению с логарифмическим членом. Подставляя логарифмический потенциал в (1.5), можно перейти к уравнению, впервые полученному в [7]. Учет функции  $g(x)$  дает следующее выражение для потенциала вблизи поверхности тела и каверны [6]:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} S'(x) \ln \frac{(1-M^2)r^2}{4x(1-x)} - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{S'(x_1) - S'(x)}{|x-x_1|} dx_1 \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.5), получим интегродифференциальное уравнение для профиля каверны

$$\frac{(u')^2}{2u} + u'' \ln \frac{(1-M^2)u}{4x(1-x)} - \int_0^{x_0} \frac{u_1''(x_1) - u''(x)}{|x-x_1|} dx_1 - \int_{x_0}^{1-x_0} \frac{u''(x_1) - u''(x)}{|x-x_1|} dx_1 - \int_{1-x_0}^1 \frac{u_1''(x_1) - u''(x)}{|x-x_1|} dx_1 - \frac{u_1'(0)}{x} + \frac{u_1'(1)}{1-x} = 2\sigma$$

$$u = R^2, u_1 = R_1^2 \quad (1.9)$$

Следует отметить, что для несжимаемой жидкости аналогичное уравнение получено в [8]. В том случае, если место отрыва каверны фиксировано, к (1.9) добавляются граничные условия

$$x = x_0: R = R_1, R' = R_1'; \quad x = 1 - x_0: R = R_1, R' = R_1' \quad (1.10)$$

2. При малых числах кавитации, когда размерами кавитатора можно пренебречь по сравнению с размерами каверны, (1.9) и (1.10) запишем следующим образом:

$$\frac{(u')^2}{2u} + u'' \ln \frac{(1-M^2)u}{4(1+x)(1-x)} - \int_{-1}^1 \frac{u''(x_1) - u''(x)}{|x-x_1|} dx_1 - \frac{u'(-1)}{1+x} + \frac{u'(1)}{1-x} = 2\sigma$$

$$R(\pm 1) = 0, \quad R(0) = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{R_k}{L_k} = \frac{1}{\lambda} = 2\varepsilon \quad (2.1)$$

Здесь начало системы координат совпадает с серединой каверны, геометрические размеры отнесены к полудлине каверны  $L_k$ , малый параметр  $\varepsilon_1$  — величина, обратная удлинению каверны  $\lambda$ ,  $R_k$  — максимальный радиус каверны. Решение (2.1) ищем в виде разложения в асимптотические ряды по функциям от  $\varepsilon_1$ . Для квадрата радиуса каверны и числа кавитации эти ряды имеют вид

$$R^2 = \varepsilon_1^2 \left[ R_0^2 + R_{-1}^2 \left( \ln \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right)^{-1} + R_{-2}^2 \left( \ln \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right)^{-2} + \dots \right] \quad (2.2)$$

$$\sigma = \varepsilon_1^2 \left[ \sigma_1 \left( \ln \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) + \sigma_0 + \sigma_{-1} \left( \ln \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right)^{-1} + \dots \right]$$

Подставляя (2.2) в (2.1) и сохраняя два члена, получим выражение для профиля каверны и зависимость  $\sigma$  от  $\lambda$  и  $M$

$$R^2 = \varepsilon_1^2 \left\{ (1-x^2) + \frac{x^2 \ln 4 - \ln[(1+x)^{(1+x)}(1-x)^{(1-x)}]}{2 \ln \lambda} \right\}$$

$$\sigma = \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\gamma e \sqrt{1-M^2}} \quad (2.3)$$

Фиг. 2

Первым приближением для формы каверны (как и в несжимаемой жидкости) является эллипсоид вращения. Удлинение каверны в общем случае зависит от числа кавитации и числа Маха. На Фиг. 2 показаны зависимости  $\lambda$  от  $\sigma$  при  $M=0$  (несжимаемая жидкость, кривая 1) и при  $M=0,6$  (кривая 2). Видно, что по мере уменьшения числа кавитации влияние сжимаемости на удлинение каверны становится незначительным, что согласуется с известным результатом [3].

Интегродифференциальное уравнение (2.1) запишем в виде

$$\frac{(u')^2}{4u} - u'' \ln \frac{\psi(x)}{R\sqrt{1-M^2}} = \sigma, \quad \mu(x) = \ln \frac{\psi(x)}{R}, \quad \mu^* = \ln \frac{\psi(x)}{R\sqrt{1-M^2}} \quad (2.4)$$

где  $\psi(x)$  — некоторая функция от  $x$ . В [8] показано, что  $\mu(x)$  в пределе при  $\sigma \rightarrow 0$  можно считать константой, зависящей от  $\lambda$ . В случае сжимаемой жидкости  $\mu^*$  также будет константой. Пренебрегая первым членом в (2.4), запишем

$$\mu^* u'' = -\sigma \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) можно рассматривать как выражение принципа «независимости расширения» сечения каверны, предложенного в [9]. Решением (2.5) является эллипсоид вращения. Можно сделать вывод, что в пределе принцип «независимости расширения» применим и для сжимаемой жидкости.

Метод источников и стоков можно использовать для определения формы тонкой осесимметричной каверны в сверхзвуковом потоке сжимаемой жидкости.

Автор признателен Ю. Л. Якимову за обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Полутело конечного сопротивления в дозвуковом потоке // Тр. ЦАГИ. 1947. Вып. 653. 12 с.
2. Якимов Ю. Л. Асимптотические законы вырождения формы тонких каверн // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 3–10.
3. Якимов Ю. Л. Тонкая кавитационная каверна в сжимаемой жидкости // Проблемы современной механики. М.: Изд-во МГУ, 1983. Ч. 1. С. 66–73.
4. Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л.: Судостроение, 1967. 387 с.
5. Франкль Ф. И., Карпович Е. А. Газодинамика тонких тел. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 175 с.
6. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 318 с.
7. Григорян С. С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела // ПММ, 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 951–953.
8. Логвинович Г. В., Серебряков В. В. О методах расчета формы тонких осесимметричных каверн // Гидродинамика. Киев: Наук. думка, 1975, вып. 32. С. 47–54.
9. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наук. думка. 1969. 215 с.

Москва

Поступила в редакцию  
21.X.1986

УДК 532.546

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ИЗ ПЛАСТОВ С ЗОНАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

ЖЕЛТОВ Ю. П., КОРОВОВ Е. И.

При извлечении нефти из неоднородных пластов значительная ее доля остается невыбранной из зон с меньшей проницаемостью. В связи с этим исследуется механизм вытеснения нефти из пластов с зональной неоднородностью в рамках двумерной модели совместной фильтрации нефти, воды и газа Маскета — Мереса [1]. Для расчета используется полностью консервативная неявная по насыщенностям и по давлению разностная схема. Рассматриваются различные режимы эксплуатации пласта с целью поиска возможности улучшения показателей процесса. Наиболее полное исследование одномерного случая трехфазной фильтрации проведено в [2], где решалась задача смешанного режима вытеснения нефти. Показано, что в условиях однородного коллектора предварительное разгазирование нефти приводит к снижению текущей нефтеотдачи и увеличению срока разработки, причем нефтеотдача слабо зависит от степени разгазирования.

Рассмотрим элемент пласта  $0 \leq x \leq L$ ,  $-M/2 \leq y \leq M/2$ , имеющий коэффициент проницаемости  $k_1$  всюду, за исключением зоны («линзы») в виде прямоугольника со сторонами  $L^*$  и  $M^*$ . Линза имеет коэффициент проницаемости  $k_2 < k_1$ .

Уравнения закона сохранения массы и закона Дарси для фильтрующихся в пласте фаз нефти, воды и газа с учетом растворимости газа в нефтяной и водной фазах, сжимаемости фаз и пористой среды имеют вид [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{W}_\lambda + \frac{\partial c_\lambda}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{W}_\lambda = \{W_{\lambda x}, W_{\lambda y}\}, \quad \mathbf{W}_o = f_o \mathbf{U}_o, \quad \mathbf{W}_w = f_w \mathbf{U}_w$$

$$\mathbf{W}_g = R_o \mathbf{W}_o + R_w \mathbf{W}_w + f_g \mathbf{U}_g, \quad \mathbf{U}_\lambda = \{U_{\lambda x}, U_{\lambda y}\}$$

$$U_{\lambda x} = -d_\lambda \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma_\lambda \cos \varphi_x \right), \quad U_{\lambda y} = -d_\lambda \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma_\lambda \cos \varphi_y \right)$$