МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1987

УДК 533.6.011.72

УСИЛЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ ВХОЖДЕНИИ ЕЕ В КЛИНОВИДНУЮ ПОЛОСТЬ

ТУГАЗАКОВ Р. Я.

Рассмотрена нестационарная задача распространения ударной волны произвольной интенсивности в клиновидную полость. Для определенных углов раскрытия полости найдено точное решение нелинейной задачи отражения плоской волны от неплоской стенки. В случае произвольных углов раскрытия полости проведены численные расчеты фокусирования волн. При этом обнаружен единый закон подобия для течений газа с волнами умеренной и сильной интенсивности.

В данной нестационарной задаче распространения ударной волны в клиновидную полость проявляются все характерные особенности, присущие внешним задачам дифракции ударных волн на неподвижных и движущихся телах [1–4]: регулярное и маховское отражения волн, их фокусирование.

В литературе имеются экспериментальные данные и численные результаты [5–9], указывающие на увеличение давления внутри конуса или угловой полости. Для суживающихся каналов этот вопрос подробно проанализирован в монографии [2]. Однако в указанных работах имеются допущения, которые ограничивают общность анализа нестационарного усиления ударной волны при затекании ее в угловую полость, не определена максимальная величина давления в момент схлопывания волн в угловой точке в зависимости от угла раствора и интенсивности падающей волны. Так, в [6] в рамках приближенной теории Уизема исследовано усиление ударной волны в конической воронке из-за повторных маховских взаимодействий волн со стенкой и осью. В [8] рассмотрено только начальное автомодельное течение газа в конической воронке большого угла раствора.

Более полное решение задачи, но для акустических волн, дано в [9], где вычисленная величина избыточного давления в носике полости обратно пропорциональна углу раствора полости.

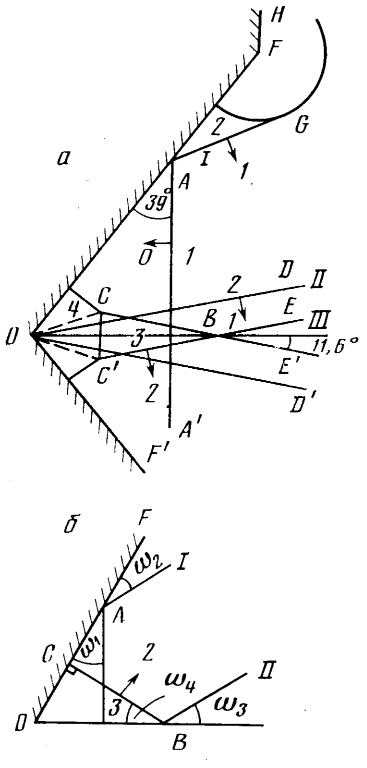
Таким образом, из анализа экспериментальных данных и аналитического решения для акустических волн видно, что с уменьшением угла раскрытия полости увеличивается число взаимодействий ударных волн между собой и стенкой. В результате этого максимальная величина давления во внутренней части полости и, в частности, в ее носике растет. Определим максимальную величину давления, возникающего внутри полости, в зависимости от угла ее раскрытия и интенсивности падающей волны.

Для волн произвольной интенсивности решение задачи возможно лишь численно, но для достаточно больших углов раствора полости удается получить количественную оценку максимальной величины давления внутри полости и даже точное решение задачи.

1. Усиление волн произвольной интенсивности в угловой полости. Рассмотрим картину затекания ударной волны произвольной интенсивности AA' в полость $HFOF'$ с углом раствора $\alpha \geqslant 180°-2\omega_c$, где ω_c – критический угол для правильного отражения, после которого реализуется маховское. Значение этого угла зависит от интенсивности падающей волны и от показателя адиабаты γ. Из теории наклонного отражения ударных волн от стенки [1] известно, что существует такой угол падения $\omega_0 = \operatorname{arctg}\sqrt{(3-\gamma)/(1+\gamma)}$, при котором угол отражения равен углу падения и интенсивность отраженной волны в данном случае находится по формулам лобового отражения. Причем значение угла ω_0 не зависит от интенсивности падающей ударной волны, а только от показателя адиабаты γ, например, для $\gamma=1{,}4$ величина $\omega_0=39{,}2°$.

Пусть угол раствора полости на фиг. 1, *а* $\alpha=180°-2\omega_0=101{,}6°$. Из построения видно, что в этом случае угол падения волны на поверхность полости равен ω_0, и из сказанного следует, что $\angle FAG=\omega_0$. Течение, возникающее в окрестности точки F, до какого-то момента времени не оказывает влияния на формирование максимальных давлений в точке O. Конфигурация волн в начальный момент времени занимает положение I.

Со временем падающая волна AA', достигая точки O, переходит в отраженные волны (OD, OD', положение II), и в последующий момент (положение III) начинается пересечение отраженных волн под углом $\angle EBE'=90°-2\omega_0=23{,}2°$. В точке B реализуется правильное отражение волны BE от оси и параметры течения в области *3* легко найти по формулам, описывающим отражение ударной волны от стенки [1]. Преломленная волна BC падает на стенку OF уже под углом, большим критического, и в результате в области OCC' реализуется маховское отражение с контактными разрывами и маховскими «ножками», исходящими из точек C и C'. Цифры на ударных волнах на фиг. 1, *а* обозначают номер области, который совпадает с числом переходов газа через ударную волну.



Фиг. 1

Из теории отражения известно, что при маховском отражении величина результирующего давления меньше получаемого при правильном отражении. Тогда максимальное давление в области *4* ограничено величиной $p_4/p_1 \leqslant (p_1/p_0)k_1k_2k_3$, где k_1, k_2, k_3 — коэффициенты усиления, определяемые по формулам нормального отражения ударной волны от твердой стенки

$$k_1=\frac{p_2}{p_1}=\frac{(3\gamma-1)\eta-(\gamma-1)}{(\gamma-1)\eta+(\gamma+1)},$$

$$k_2=\frac{p_3}{p_2}=\frac{(2\gamma-1)\eta+(1-\gamma)}{(\gamma-1)\eta+1} \qquad (1.1)$$

$$k_3=\frac{p_4}{p_3}=\frac{(5\gamma-3)\eta-3(\gamma-1)}{3(\gamma-1)\eta+3-\gamma}, \qquad \eta=\frac{p_1}{p_0}.$$

Для волн большой интенсивности ($\eta \gg 1$) видно, что результирующий коэффициент усиления может достигнуть 120 ($\gamma=1{,}4$). Конечно, это максимальное крайнее значение, поскольку в точке C, как было указано, реализуется маховское отражение и в результате этого коэффициент k_3 меньше 10/3, что соответствует нормальному отражению. Если интенсивность падающей волны на фиг. 1, *а* мала ($p \leqslant 1{,}05$), то в точках A, B, C реализуются регулярные отражения и избыточное давление в области OCC' увеличивается до 4, что находится в согласии с результатами, даваемыми для акустических волн [9].

Отметим сильную зависимость коэффициентов (1.1) от параметра γ. Так, для сильных волн произведение их равно 35, 120, 2300 соответственно для значений γ, равных 2; 1,4; 1,1.

2. Точные решения для сильных волн. Угол раскрытия полости на фиг. 1, *а* зависит от критического угла ω_0, который в свою очередь зависит только от показателя адиабаты γ. Тогда, варьируя γ, можно найти такие значения углов раствора полости, при которых автомодельная часть задачи имеет точное решение. Так, для $\gamma=2$, соответствующего водоподобным средам, $\omega_0=30°$, $\alpha=120°$. В точках A и B происходит регулярное отражение ударных волн, причем, так как угол падения равен критическому значению 30°, пересечение ударных волн в точке B происходит без их преломления. Отраженная волна BC в данном случае подходит перпендикулярно к поверхности OA и скользит вдоль нее, не порождая возмущений. Тогда точное решение для давления в области OBC имеет вид

$$p_3=p_1\frac{(5\eta-1)(3\eta-1)}{(\eta+3)(\eta+1)} \tag{2.1}$$

Из (2.1) видно, что при больших начальных интенсивностях ударных волн в угловой полости происходит усиление давления в 15 раз по сравнению с интенсивностью падающей ударной волны. Для слабых волн в области *3* максимальное избыточное давление подрастает в 3 раза, что совпадает с данными [9]. Картина течения геометрически подобна для всех значений интенсивности падающей волны, так как критическое значение угла ω_0 не зависит от интенсивности волны.

Рассмотрим другой класс точных решений, который можно получить, не накладывая ограничений на параметр γ (фиг. 1, *б*). Единственными условиями для нахождения этого решения являются условие перпендикулярности волны BC поверхности OF и реализация в точках A, B регулярного отражения. Тогда из геометрических построений следуют условия:

$$\frac{\alpha}{2}-\omega_2=\omega_3,\qquad \frac{\alpha}{2}+\omega_4=90^\circ,\qquad \frac{\alpha}{2}=90^\circ-\omega_1 \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует связь

$$\omega_1=30^\circ+\frac{\delta_1-\delta_2}{3},\qquad \delta_1=\omega_1-\omega_2,\qquad \delta_2=\omega_3-\omega_4 \tag{2.3}$$

где δ_1, δ_2 — углы преломления волн при отражении в точках A и B. Так как зависимости $\delta_1=\delta_1(\eta, \omega, \gamma)$ и $\delta_2=\delta_2(\eta, \omega_3, \gamma)$ известны [1], то, решая численно алгебраическое уравнение (1.3), находим для данной интенсивности падающей волны η значение ω_1, которое является точным решением задачи. Из (2.3) для малых интенсивностей волн ($\delta_1\to 0$, $\delta_2\to 0$) видно, что картина течения совпадает с ранее найденными для акустических волн ($\alpha=120^\circ$) и для волн произвольной интенсивности в среде с $\gamma=2$.

Таким образом, из (2.3) для каждого η находим свое значение ω_1, которое является решением задачи, а затем, используя формулы, описывающие отражение ударной волны от стенки, определяем интенсивности всех ударных волн. Ниже приведены результаты численных расчетов для $\gamma=1{,}2$; 1,4; 1,67; 3, где величины $k'=p_3/p_1$, $k^*=p_3/p_r$ показывают, во сколько раз увеличивается максимальное давление в угловой полости по сравнению с давлением в падающей и отраженной от стенки ударных волнах (каждому из указанных γ соответствуют три строки таблицы, считая сверху вниз):

η	1,05	1,35	1,75	7,35	26,55	103,3	10^6
ω_1	30,00	30,17	30,53	33,53	35,34	35,46	35,44
k'	1,1	1,74	2,63	13,59	30,0	44,13	52,02
k^*	1,05	1,3	1.54	2,64	3,27	3,76	4,00
ω_1	30,00	30,11	30,37	32,38	33,46	33,86	34,02
k'	1,1	1,73	2,59	10,88	18,8	22,89	24,66
k^*	1,05	1,3	1,54	2,51	2,9	3,03	3,08
ω_1	30,00	30,06	30,19	31,15	31,63	31,81	31,87
k'	1,1	1,72	2.55	9,46	14,59	16,84	17,74
k^*	1,05	1,3	1,54	2,49	2,81	2,92	2,96
ω_1	29,99	29,88	29,60	28,11	27,12	26,84	26,74
k'	1,1	1,71	2,47	7,9	11,37	12,65	13,16
k^*	1,05	1,3	1,55	2,65	3,09	3,24	3,29

Видно, что при увеличении интенсивности падающей ударной волны решение задачи выходит на «полку». Причем максимальное увеличение давления по сравнению с интенсивностью падающего скачка больше для меньших γ. Так, при уменьшении значения γ от 1,67 до 1,2 величина максимального давления в угловой точке возрастает в 3 раза, но при этом угол раскрытия полости уменьшается от 126,53 до 109,12°.

Как и следовало ожидать, решение для слабых волн не зависит от параметра γ, а максимальное избыточное давление в вершине полости увеличивается в 3 раза, что находится в соответствии с [9].

3. Численное решение задачи и обобщение результатов. В общем случае, когда угол раствора полости произвольной и интенсивность падающей волны конечна, в данной нестационарной задаче решение зависит от геометрических размеров и формы полости. В точках A и B на фиг. 1, *а* реализуется маховское отражение, причем возмущения из области HFG доходят до точки O вместе с падающей волной AA'. Поэтому здесь небезразлично, как развернута плоскость FH по отношению к оси полости.

В работе численно решается задача о вхождении ударной волны AA' из плоского канала в полость с углами раствора 90, 45 и 22,5° (фиг. 2, 3). Прямолинейный участок HF на фиг. 2, *а* считается достаточно длинным и значение параметров на границе HH' находится путем сноса их из близлежащих точек поля. На остальной части границы выполняется условие непротекания.

Численное решение осуществляется конечно-разностным двухшаговым методом Бурштейна [4], являющимся модификацией известного метода Лакса — Вендроффа, расписанным для уравнений Эйлера в прямоугольных координатах. Метод имеет второй порядок аппроксимации по времени и координате на гладких решениях.

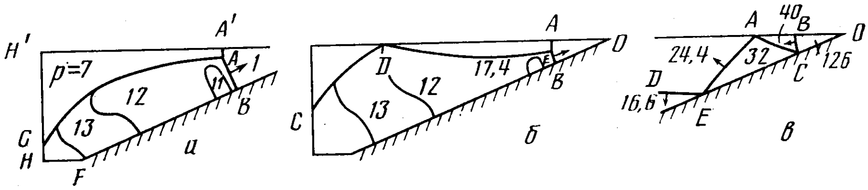
В численных расчетах точность метода проверялась получением в задаче ранее известных решений для акустических волн, а также точного решения, приведенного на фиг. 1, *б*. Эти решения позволили проверить и уточнить алгоритмы расчета течения газа в окрестности угловой точки и в ней самой. Для акустических волн численное нелинейное решение совпадает с [9], а в случае сильных волн точное решение, найденное в предыдущем разделе, воспроизводится в численном эксперименте с точностью 1% для величины давления в области покоя (окрестности носика).

На фиг. 2, *а—в* представлено поле изобар в моменты входа, фокусирования и отражения ударной волны интенсивности $p=7$ в полости с углом раствора 45°. В первый момент (фиг. 2, *а*) происходит дифракция ударной волны AA' на клине с углом 22,5°. Решения такой задачи для воздуха ($\gamma=1{,}4$), как численное, так и экспериментальное [2], хорошо изучены. В этом случае образуется искривленная головная волна AC и маховская «ножка» AB. Течение в области $HABF$ дозвуковое, с переменными параметрами. Поэтому для воспроизведения картины фокусирования волн в полости на фигурах приведены только характерные значения величины давления.

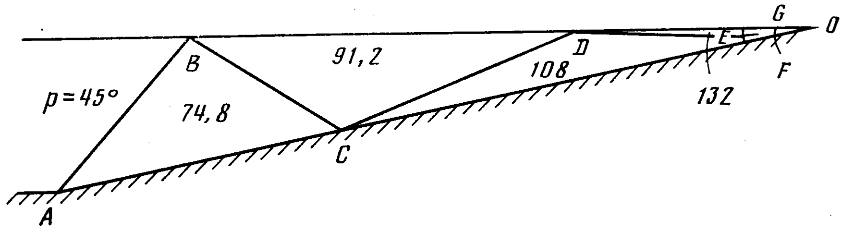
В следующие моменты времени (фиг. 2, *б*) происходит несколько отражений головного скачка от оси и поверхности тела, причем интенсивность маховских волн AE и BE увеличивается, а протяженность их стремится к нулю. В тот момент, когда точка E достигает вершины полости, реализуется максимальная величина давления и плотности в угловой точке торможения.

На фиг. 2, *в* представлена система волн, реализуемых при отражении волн от вершины полости. Видно, что волна DE, достаточно далеко отошедшая от вершины O, отражается регулярным образом от поверхности тела и оси в точках E и A. Вся система волн $DEACB$ замыкается криволинейной волной BC. Давление в области OBC максимально за ударной волной и незначительно падает по направлению к вершине полости O. К моменту времени, представленному на фиг. 2, *в*, величина давления в области OBC сильно упала. Максимальная его величина в вершине при схлопывании волн равна 438,4.

На фиг. 3 для определенного момента времени представлено поле изобар при вхождении ударной волны интенсивности $p=45$ в полость с углом



Фиг. 2



Фиг. 3

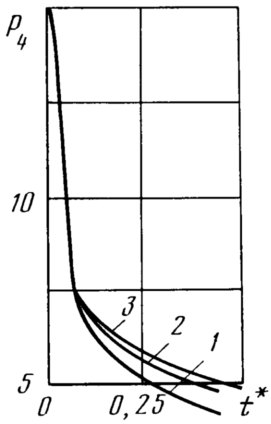
раствора 22,5°. Так как в этом случае поток за ударной волной сверхзвуковой, то на кромке полости в точке A образуется головной скачок AB. По мере продвижения падающей волны GEF внутрь полости происходит серия отражений волны AB от оси и поверхности полости. Интенсивность волн AB, BC, CD, DE мала по сравнению с интенсивностью первоначально падающей волны. К данному моменту времени интенсивность падающей волны GE возросла втрое. Течение в области $DCFG$ еще нестационарное. В последующие моменты времени, когда волна дойдет и отразится от угловой точки, давление в ней возрастет более чем в 20 раз.

Результаты расчетов затекания ударных волн произвольной интенсивности в полости с углами 90 и 45° приведены ниже, где p_r — величина давления, получаемая при нормальном отражении от стенки, p^* — максимальная величина давления, реализуемая в угловой точке, p_2 и p_4 — безразмерные величины максимального давления, отнесенные к p_1 и p_r соответственно:

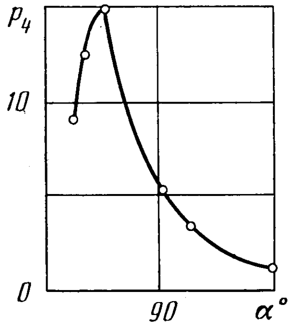
η	1,01	1,1	1,5	3	5	10	15	45	400
p^*	1,04	1,458	4,91	30,23	80,2	248,3	443	1710	16 870
p_2	1,03	1,33	3,27	10,08	16,04	24,8	29,5	38	41,1
p_4	1,02	1,2	2,23	3,94	4,53	5,03	5,1	5,4	5,38
p^*	1,089	2,7	20,9	113,8	268	751	1280	4708	46 400
p_2	1,08	2,45	13,9	13,9	37,9	53,6	75,1	104,6	116
p_4	1,07	2,23	9,5	14,84	15,1	15,2	15,06	14,9	14,7

Видно, что при $\alpha=90°$ (2—4-я строки таблицы) для слабых волн в полости реализуется волна, интенсивность которой с большой точностью описывается линейной теорией. При $\alpha=45°$ для очень слабых волн происходит усиление избыточного давления в 8 раз, что согласуется с [9], но уже при интенсивности падающей волны $p_1/p_0=1{,}01$ величина избыточного давления возрастает в 8,9 раза, что говорит о неприменимости линейной теории для данной интенсивности волны. Еще существеннее нелинейные эффекты проявляются для более сильных волн. Так, для $p_1/p_0=1{,}1$ максимальное давление в угловой точке достигает 2,7. Если оценивать последний результат по линейной теории, то величина избыточного давления здесь возрастает в 16 раз.

Анализ течений с сильными волнами (см. выше) показывает, что в угловой точке величина максимального давления и плотности, отнесенные к их значениям за падающей волной, асимптотически стремятся к предельной величине, которая зависит только от параметра γ и угла раствора полости, т. е. для нестационарных течений с сильными ударными волнами выполняется принцип независимости решения в окрестности угло-



Фиг. 4



Фиг. 5

вой точки от интенсивности падающей волны p_1. Это явление аналогично стационарному принципу независимости от числа Маха при обтекании тупого тела гиперзвуковым потоком газа. В данной нестационарной задаче результат распространяется на промежуток времени с момента схлопывания волн в углу до характерного момента, когда существенным оказывается влияние геометрии входной части полости.

Выберем за единицу времени $t_0=l/a$, где l — протяженность полости вдоль оси, a — скорость звука в невозмущенном газе. Введем в задачу безразмерное время $t^*=t/(t_0 M_0)$, где M_0 — число Маха падающей волны относительно невозмущенного газа. Тогда безразмерное давление в угловой полости $p_2=p/p_1=f(\gamma, \alpha, t^*)$. При $t^*=0$ в полости реализуется максимальное давление, величина которого постоянна для данных α и γ.

Если для двух падающих волн t^* одинаково, то величины давлений p/p_1 совпадают. Обработка данных расчета и точных решений показала, что принцип независимости можно расширить и на волны умеренной интенсивности, вычисляя в задаче величины $p_4=p/p_r$ и $\rho_4=\rho/\rho_r$. Действительно, величина p_r, вычисляемая по формуле нормального отражения от стенки, представляется в виде

$$p_r=p_1+u_1(p_1-p_0)\,[p_0+(\gamma-1)\,(p_1-p_0)/2\gamma]^{-1} \tag{3.1}$$

При сильных волнах величина $p_r=p_1(3\gamma-1)/(\gamma-1)$ пропорциональна интенсивности падающей волны, в то же время для умеренных волн формула (3.1) учитывает нелинейную зависимость p_r от p_1. По приведенным выше данным видно, как существенно расширяется диапазон действия принципа независимости, особенно для более узких полостей, где усиление волн сильнее. Так, для полости с $\alpha=45°$ уже при $p_1/p_0=3$ принцип независимости выполняется с точностью до 1%. Таким образом, в задаче выполняется единый принцип независимости для умеренных и сильных волн. На фиг. 4 приведено поведение давления $p_4=f(\alpha, \gamma, t^*)$, вычисленного в угловой точке полости для падающих волн с интенсивностями 5, 15, 85. Видно, что до момента $t^*=0{,}1$ кривые совпадают, при $t>0{,}1$ на течении газа сказывается влияние концов полости. Физически принцип независимости объясняется образованием сверхзвукового потока за ударной волной в точке E (фиг. 4, б), когда волна AEB становится достаточно сильной в результате нескольких отражений в полости, и в момент совпадения точки E с угловой точкой O при формировании максимальной величины давления на течении газа не сказывается влияние потока за ударной волной. Так как в узкой полости происходит большее усиление волн, то и действие принципа в этом случае проявляется раньше. Здесь следует заметить, что давление p_2 для полости с углом 45° больше, чем с углом 90°, на величину k_4, которая вычисляется аналогично формулам (1.1), и при $\gamma=1{,}4$, $k_4=2{,}75$. Этот интересный факт можно объяснить тем, что для угла, равного 45°, происходит на одно правильное отражение больше, чем для прямого.

На фиг. 5 представлена зависимость p_4 от угла раствора полости для сильных волн и $\gamma=1{,}4$. Результаты (точки) взяты из численных расчетов и точного решения. При уменьшении угла раствора полости течение за ударной волной в точке E (фиг. 2, *б*) дозвуковое. В этом случае на формирование максимального давления в угловой точке влияет предыстория процесса. Для малых углов раствора полости в первоначальный момент реализуется дифракция ударной волны на тонком клине [3] и, так как отраженные от полости и оси возмущения малы относительно падающей волны, коэффициент усиления давления в угловой полости падает.

Таким образом, на фиг. 5 представлена универсальная кривая для определения максимальной величины давления в носике полости при затекании в нее волн умеренной или сильной интенсивности. Зная угол раствора полости и интенсивность падающей волны, максимальную величину давления определяем из соотношения $p=p_4 p_r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Г. М., Карчевский Л. В.* Отраженные ударные волны. М.: Машиностроение, 1973. 376 с.
2. *Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г.* Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977. 274 с.
3. *Ting L., Ludloff H. F.* Aerodynamics of blast // J. Aeronaut. Sci. 1951. V. 18. № 2. P. 143–144.
4. *Тугазаков Р. Я.* Дифракция ударной волны на движущемся клине // Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. С. 80–84.
5. *Белоконь В. А., Петрухин А. Н., Проскуряков В. А.* Вхождение сильной ударной волны в клиновидную полость // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1965. Т. 48. Вып. 1. С. 50–60.
6. *Setchell R. E., Storm E., Sturtevant B.* An investigation of shock strengthening in a cemical convergent channel // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. № 3. P. 505–522.
7. *Skews B. W.* Shock-shock reflection // CASI Trans. 1971. V. 4. № 1. P. 16–19.
8. *Сагомонян А. Я.* Отражение ударной волны от внутренней поверхности полного конуса // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1976. № 1. С. 77–82.
9. *Гувернюк С. В.* Дифракция акустической волны внутри полого клина // Науч. тр. Ин-та механ. МГУ. 1975. № 41. С. 115–129.

Москва

Поступила в редакцию
3.VII.1986