

УДК 533.6.011.55

ВЯЗКИЙ УДАРНЫЙ СЛОЙ ОКОЛО КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВДУВЕ И ОХЛАЖДЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ

МАРКОВ А. А.

Результаты исследования вязких ударных слоев около проницаемой поверхности с учетом ее вращения находят применение при моделировании движения вращающихся тел на больших высотах. В [1–5] изучалось влияние неравномерности внешнего потока на стационарное течение в ударном слое, в [6] рассмотрено влияние на теплообмен вращения тела и внешней завихренности в окрестности критической точки. В [1–6]¹ исследовались стационарные течения, отмечалось существенное влияние закрутки потока на режим обтекания тела. Влиянию вдува на структуру стационарного ударного слоя без учета вращения тела и закрутки внешнего потока посвящены работы [7–9]. Нестационарные режимы обтекания изучены мало. Некоторые вопросы нестационарного теплообмена и трения рассматривались в [11–14].

В настоящей работе изучаются нестационарные режимы сверхзвукового течения в окрестности точки торможения. Исследование проведено на основе системы уравнений вязкого ударного слоя [10], которая содержит все члены уравнений Эйлера и уравнений пограничного слоя. В случае сильного вдува найдено аналитическое решение нестационарных уравнений, справедливое вблизи поверхности тела. Проведено численное решение нестационарных уравнений вязкого ударного слоя на основе дивергентной неявной схемы второго порядка аппроксимации поперек ударного слоя, использующей линеаризацию по Ньютону и векторные прогонки с учетом граничных соотношений на поверхности тела и на выделенной головной ударной волне. Представлены некоторые результаты расчетов, иллюстрирующие влияние вдува, охлаждения поверхности, закрутки внешнего потока и угловой скорости вращения тела на структуру стационарного и нестационарного вязкого ударного слоя.

1. Рассмотрим обтекание сверхзвуковым завихренным потоком осесимметричного охлаждаемого тела с гладкой поверхностью, которая вращается вокруг продольной оси x_1' с угловой скоростью Ω_1' .

Предположим, что в окрестности оси симметрии параметры набегающего потока удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} V_{\infty}' &= (\Omega', 0, 0), & V_{\infty}' &= (u_{\infty}', u_{1\infty}', u_{2\infty}') \\ \rho_{\infty}' &= \text{const}, & p_{\infty}' &= p_{0\infty}' + \frac{r'^2 \Omega'^2}{2} \end{aligned}$$

где штрих относится к размерным величинам, r' — расстояние до оси x_1 . Предполагаем, что с поверхности тела происходит нестационарный вдув газа. Температура поверхности T_w' и величина Ω_1' зависят от времени по заданному закону.

Воспользуемся нестационарными уравнениями вязкого ударного слоя [10], записанными в криволинейной системе координат x, y, z , которая связана с поверхностью осесимметрично обтекаемого тела. Предполагаем, что координата x меняется вдоль образующей, y — угловая координата,

¹ После сдачи данной работы в печать была опубликована статья: Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Гиперзвуковой вязкий ударный слой в закрученном потоке на проницаемой поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 27–38, в которой в приближении тонкого ударного слоя рассмотрена стационарная задача.

z меняется вдоль нормали к телу. Пусть u^i — контравариантные составляющие скорости, а соответствующие физические составляющие $u(i) = = u^i \sqrt{g_{ii}}$ (по i суммирования нет). Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} u^i(i) &= u(i) V_\infty', & \rho' &= \rho \rho_\infty' \\ p' &= p \rho_\infty' V_\infty'^2, & h' &= h V_\infty'^2 \\ \mu' &= \mu \mu_0', & T' &= T T_0' \\ \lambda' &= \lambda \mu_0' \text{Pr}^{-1} = \mu \mu_0' \text{Pr}^{-1} \\ T_0' &= \frac{V_\infty'^2}{c_p} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1) M_\infty^2} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ , p , h , T — плотность, давление, энтальпия и температура соответственно, λ , μ — коэффициенты теплопроводности и вязкости.

Предполагается, что газ совершенный, коэффициент вязкости — степенная функция температуры с показателем ω , число Прандтля Pr постоянно.

Обозначим через $v_\infty(3)$ и $v(3)$ нормальные, $v_\infty(i)$ и $v(i)$ ($i=1, 2$) касательные составляющие вектора скорости по отношению к поверхности S головной ударной волны перед и за волной соответственно. На поверхности S ставятся нестационарные модифицированные соотношения Рэнкина — Гюгионо [15]

$$w(3) \rho = w_\infty(3) \rho_\infty = m \quad (1.2)$$

$$v(k) - \mu_* \frac{\partial v(k)}{\partial \xi} = v_\infty(k), \quad k=1, 2$$

$$p + m w(3) - \mu_* \frac{\partial v(3)}{\partial \xi} = p_\infty + m w_\infty(3)$$

$$v_i p + \rho \left(h + \frac{1}{2} v^2(3) \right) w(3) - \mu_* v(3) \frac{\partial v(3)}{\partial \xi}$$

$$- \lambda_* \frac{\partial h}{\partial \xi} = v_i p_\infty + \rho_\infty \left(h_\infty + \frac{1}{2} v_\infty^2(3) \right) w_\infty(3)$$

$$p = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \rho h, \quad \lambda_* = \frac{\mu}{\text{Re}_0 \text{Pr}}, \quad \text{Re}_0 = \text{Re}_\infty T_\infty^{\omega_0}, \quad \rho_\infty = 1$$

$$h_\infty = \frac{1}{(\gamma-1) M_\infty^2}, \quad p_\infty = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \frac{r^2}{2} \Omega^2, \quad T_\infty^{-1} = \frac{1}{2} (\gamma-1) M_\infty^2 + 1 \quad (1.3)$$

$$h = k_T T, \quad k_T = \frac{c_p T_0'}{V_\infty'^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1) M_\infty^2}$$

$$w(3) = v(3) - v_f, \quad w_\infty(3) = v_\infty(3) - v_f, \quad v_f = \Phi_t (1 + \Phi_x^2)^{-1/2}$$

где v_f — скорость движения фронта волны, координата ξ меняется вдоль нормали к поверхности S фронта волны.

На вращающейся поверхности тела $z=0$ задается нестационарная температура и вдув газа

$$h = h_w(t), \quad u(1) = u_*(1), \quad u(2) = \Omega_1 x \sqrt{g_{22}}, \quad u(3) = u_*(3) \quad (1.4)$$

Предполагаем, что при $t=0$ заданы начальные распределения, соответствующие стационарному течению при некоторых начальных значениях Ω , Ω_1 , M_∞ , Re_0 , h_w , $u_*(1)$, $u_*(2)$

$$z = \Phi(0, x), \quad u(i) = u^o(i), \quad h = h^o(x, z), \quad \rho = \rho^o(x, z) \quad (1.5)$$

2. Приближенное решение уравнений вязкого ударного слоя [10] при граничных условиях (1.2), (1.4) и начальных условиях (1.5) в окрестно-

сти критической точки $x=0$ вращающегося тела ищем в форме разложений, аналогичной форме [6], где рассматривалась стационарная задача

$$\begin{aligned} u(1) &= x(u_0''(t, z) + \dots), & u(2) &= x(v_0''(t, z) + \dots), \\ u(3) &= w_0''(t, z) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi(t, x) &= \varphi(t) + \dots, & p &= p_0''(t, z) + x^2(\frac{1}{2}p_1''(t, z) + \dots) \\ \rho &= \rho_0''(t, z) + \dots, & h &= h_0''(t, z) + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Многоточием обозначены величины, стремящиеся к нулю при $x \rightarrow 0$. Введем обозначения (см. [10])

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0''/\sqrt{g_{11}}, & v_0 &= v_0''/\sqrt{g_{22}} \\ w_0 &= w_0'', & h_0 &= h_0'', & \rho_0 &= g_{11}\rho_0'' \\ \mu_0 &= g_{11}\mu_0'', & p_j &= g_{11}p_j'', & j &= 0, 1 \end{aligned}$$

Система уравнений для главных членов разложений (2.1), (2.2) может быть записана в форме (индекс ноль опускаем)

$$\frac{\partial E(g)}{\partial t} + \frac{\partial A(g)}{\partial z} + B(g) = \frac{\partial}{\partial z} C(g) \frac{\partial g}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$g = (u, v, w, \rho, h)^T, \quad p = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \rho h$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = 2K\rho(u^2 + v^2) \quad (2.4)$$

Компоненты векторов E , A , B и матрицы C зависят от искомого вектора g следующим образом:

$$E_1 = \rho u, \quad E_2 = \rho v, \quad E_3 = \rho w \varepsilon_{TS}, \quad E_4 = \rho, \quad E_5 = \left(\frac{h}{\gamma} + \frac{w^2}{2} \varepsilon_{TS} \right) \rho$$

$$A_1 = \rho u w, \quad A_2 = \rho v w, \quad A_3 = p + \rho w^2 \varepsilon_{TS}, \quad A_4 = \rho w$$

$$A_5 = \rho w H, \quad H = h + \frac{w^2}{2} \varepsilon_{TS}$$

$$B_1 = p_1 + \rho(3u^2 + 2uw\varepsilon_{TS} - v^2), \quad B_3 = 2\rho w u \varepsilon_{TS}, \quad B_2 = 2\rho v(2u + w\varepsilon_{TS})$$

$$B_4 = 2\rho u, \quad B_5 = 2\rho u H - \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_{TS} \mu}{\text{Re}_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$C_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad C_{11} = C_{22} = \frac{\mu}{\text{Re}_0}, \quad C_{33} = \varepsilon_{TS} C_{11}, \quad C_{44} = 0, \quad C_{55} = \frac{\mu}{\text{Re}_0 \text{Pr}} \quad (2.5)$$

Параметр ε_{TS} введен в коэффициенты, чтобы отличить модель тонкого вязкого ударного слоя ($\varepsilon_{TS}=0$) от общего случая ($\varepsilon_{TS}=1$).

Упростим соотношения (1.2) на ударной волне с учетом разложений (2.1), (2.2) в окрестности критической точки

$$u_0 - \mu_0^* \frac{\partial u_0}{\partial z} = K - \kappa w_0, \quad v_0 - \mu_0^* \frac{\partial v_0}{\partial z} = \Omega \quad (2.6)$$

$$\rho_0(w_0 - \varphi) = -(1 + \varphi) = M \quad (2.7)$$

$$p_0 + M(w_0 - \varphi) - \mu_0^* \frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + M^2 \quad (2.8)$$

$$h_0 + \frac{(w_0 - \varphi)^2}{2} - \frac{\mu_0^*}{M} (w_0 - \varphi) \frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{\lambda_0^*}{M} \frac{\partial h_0}{\partial z} = h_{0\infty} + \frac{(w_{0\infty} - \varphi)}{2} \quad (2.9)$$

$$p_1 = -\mu_{0*} \kappa^2 \frac{\partial w_0}{\partial z} - 2\mu_{0*} \kappa \frac{\partial u_0}{\partial z} + \Omega^2 + \left(1 - \frac{1}{\rho_0}\right) (K_s^2 + v_{2f}) \quad (2.10)$$

$$v_{2f} = \frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} \Big|_{x=0}, \quad w_{0\infty} = 1, \quad p_{0\infty} = \frac{1}{\gamma M_\infty^2}, \quad h_{0\infty} = h_\infty$$

$$\mu_{0*} = \frac{4}{3} \frac{\mu_0}{\text{Re}_0}, \quad \lambda_{0*} = \frac{\lambda_0}{\text{Re}_0}$$

Величина v_{2f} может быть точно определена лишь в результате расчета формы ударной волны при $x \neq 0$. Для замыкания задачи расчета ударного слоя в окрестности критической точки воспользуемся приближенным условием эквидистантности отхода волны от поверхности тела вблизи $x=0$, которое состоит в допущении $\Delta(x, t) = \Delta_0(t)$ при $|x| < x_0$ и, следовательно, $v_{2f} = 0$.

3. Известно [7], что при сильном вдуве между поверхностью тела и слоем смещения образуется зона локального невязкого течения, описываемая уравнениями «невязкого» пограничного слоя. Рассмотрим аналитическое приближенное решение нестационарных уравнений невязкого пограничного слоя при нестационарном вдуве и нестационарной температуре поверхности тела.

Исходную систему уравнений, граничных и начальных условий запишем в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho w}{\partial z} + 2\rho u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u^2 - v^2 + \frac{p_1}{\rho} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2uv = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + w \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0$$

$$z=0, \quad u=u_*(t), \quad v=v_*(t), \quad w=w_*(t), \quad h=h_w(t) \quad (3.2)$$

$$t=0, \quad u=u^\circ(z), \quad v=v^\circ(z), \quad w=w^\circ(z), \quad \rho=\rho^\circ(z), \quad h=h^\circ(z) \quad (3.3)$$

Давление $p(t)$ и градиент давления $p_1(t)$ предполагаем заданными. Начальные данные (3.3) являются решением стационарной задачи

$$(\rho w)' + 2\rho u = 0, \quad wu' + u^2 - v^2 + p_1/\rho = 0 \quad (3.4)$$

$$wv' + 2uv = 0, \quad wh' = 0, \quad p' = 0, \quad p_1' = 0$$

$$z=0, \quad u=u_1, \quad v=\Omega_1, \quad w=w_1, \quad h=h_w(0) \quad u_1=u_*(0), \quad w_1=w_*(0) \quad (3.5)$$

где штрих обозначает дифференцирование по z .

Из (3.4), (3.5) находим

$$\rho^\circ = \frac{p(0)\gamma}{(\gamma-1)h_w(0)}, \quad h^\circ = h_w(0)$$

Система уравнений (3.4) имеет интегралы

$$v = c_1 w, \quad u^2 = c_2 w - b - c_1 w^2, \quad b = p_1(0)/\rho^\circ \quad (3.6)$$

постоянные c_1, c_2 определяются в соответствии с граничными условиями (3.5) следующим образом:

$$c_1 = \Omega_1/w_1, \quad c_2 = (u_1^2 + b + \Omega_1^2)/w_1$$

Из (3.6) следует, что координата z связана с w формулой

$$z = - \int_{w_1}^w \frac{dw}{2u(w)}$$

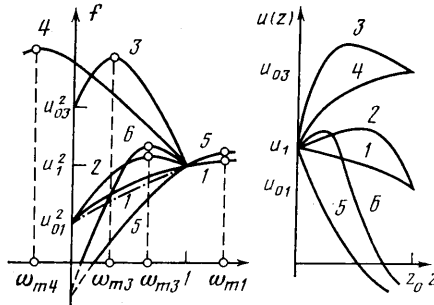
Качественно проанализируем структуру поля скоростей при различных значениях u_1, Ω_1, w_1 . Положим $\omega = w/w_1$, тогда из (3.6) находим

$$v = v_1 \omega, \quad u^2 = (u_1^2 + b + \Omega_1^2) \omega - b - \Omega_1^2 \omega^2 = f(\omega)$$

причем $\omega = 1$ при $z = 0$. Максимальное значение функции $f(\omega)$ достигается при $\omega = \omega_m$, где

$$\omega_m = \frac{1}{2} + \frac{u_1^2 + b}{2\Omega_1^2}$$

Фигура 1 на примере зависимостей $u^2 = f(\omega)$, $u = u(z)$ иллюстрирует качественно различные случаи течения (штрихпунктирная линия соответствует



Фиг. 1

решению при отсутствии вращения $\Omega_1 = 0$) в зависимости от знака градиента давления b : если $b < 0$, функции $u(z), v(z), w(z)$ положительны (линии 1–4), если $b > 0$, существует зона, где $u(z) < 0$ (линии 5, 6).

Можно выделить четыре случая течения при $b < 0$.

1. Если $1 \leq (b + u_1^2)/\Omega_1^2$, то $\omega_m \geq 1$ и поток в направлении x тормозится по мере удаления от стенки (линия 1 на фиг. 1).

2. Если $0 \leq (b + u_1^2)/\Omega_1^2 < 1$, то $0,5 \leq \omega_m < 1$ и имеются зона ускорения потока вдоль x и зона торможения (линия 2 на фиг. 1). В этих двух случаях значения $u = u_0$ функции $u(\omega)$ при $\omega = 0$ меньше значения на стенке

$$u_{01} = \sqrt{f(0)} = \sqrt{-b} < u_1$$

3. Если $-1 \leq (b + u_1^2)/\Omega_1^2 < 0$, то $0 \leq \omega_m < 0,5$ и, так же как в предыдущем случае, имеется зона ускорения потока вдоль x и зона торможения, но $u_{03} = \sqrt{-b} > u_1$ (линия 3 на фиг. 1).

4. Если $(b + u_1^2)/\Omega_1^2 < -1$, то $\omega_m < 0$ и поток вдоль x разгоняется от значения u_1 на стенке до величины u_0 , соответствующей $w = 0$ (линия 4 на фиг. 1).

При положительном градиенте давления b значение $f(0) = -b < 0$. Область существования решения ограничена промежутком $\omega_0 \leq \omega \leq 1$, $f(\omega_0) = 0$. Функция $u(z)$ меняет знак: $u = \sqrt{f(\omega)}$ при $0 \leq z \leq z_0$; $\omega_0 = \omega(z_0)$ и $u = -\sqrt{f(\omega)}$ при $z > z_0$. Можно выделить случаи 5, 6, для которых выполняются соответственно неравенства, приведенные выше для случаев 1, 2. Соответствующие решения на фиг. 1 иллюстрируют течения при наличии возвратной зоны ($u < 0$) в случае торможения (кривая 5) и ускорения с торможением (кривая 6).

Рассмотрим решение нестационарной задачи (3.1)–(3.3). Интегрируя вдоль характеристики от точки $(\tau, 0)$ до точки (t, z) , получим

$$\rho(t, z) = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{p(t)^{1/\gamma} p(\tau)^{1-1/\gamma}}{h_w(\tau)} \quad (3.7)$$

$$h(t, z) = h_w(\tau) \left(\frac{p(t)}{p(\tau)} \right)^{1-1/\gamma} \quad (3.8)$$

Для функций u, v получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль характеристик:

$$\frac{du}{ds} + u^2 - v^2 + A(s, \tau) = 0, \quad \frac{dv}{ds} + 2uv = 0$$

$$A(s, \tau) = B_1(\tau)B_2(s), \quad B_1(\tau) = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} h_w(\tau) p(\tau)^{1/\gamma-1}$$
(3.9)

$$B_2(s) = p_1(s) p(s)^{-1/\gamma}, \quad A(s, \tau) = p_1/\rho$$

Система (3.9) интегрируется при начальных условиях

$$s = \tau, \quad u = u_*(\tau), \quad v = \Omega_1(\tau)$$

Общее решение (3.9) имеет вид (см. [16])

$$u = \frac{1}{2U} \frac{dU}{ds}, \quad U = c_1 \omega_1^2 + c_2 \omega_1 \omega_2 + c_3 \omega_2^2$$

где ω_1, ω_2 — фундаментальное решение уравнения

$$\frac{d^2 \omega}{ds^2} + A(s, \tau) \omega = 0$$
(3.10)

Решение (3.10) при различных $A(s, \tau)$ выражается через элементарные либо специальные функции [16]. Величина $\tau(t, z)$ определяется моментом времени, в которой частица газа, находящаяся в точке z в момент t , покинула границу $z=0$. Функция $v(t, z)$ находится из соотношения

$$v^2 = \frac{du}{ds} + u^2 - \beta^2$$

$$z(t, \tau) = w_*(\tau) \int_{\tau}^t \exp \left[- \int_{\xi}^t (f(\eta) + 2u(\eta, \xi)) d\eta \right] d\xi$$
(3.11)

$$f(t) = d \ln p^{1/\gamma} / dt$$

Формулы (3.7), (3.8), (3.10), (3.11) позволяют найти решение в области около поверхности тела $0 \leq z \leq z_0(t)$, которая ограничена характеристикой (3.11), проходящей через точку $z=0, \tau=0$. Решение задачи в области влияния начальных данных (3.3) при $z > z_0(t)$ находится аналогично.

4. Численное решение задачи (2.3), (2.4), (2.6)–(2.10), (3.2) при начальных данных, соответствующих стационарному решению, проводилось неявным конечно-разностным методом на основе дивергентной записи уравнений. Сначала решались уравнения стационарного тонкого ударного слоя (см. (2.5) при $\epsilon_{TS}=0$) скалярными прогонами методом [6]. Полученное решение использовалось в качестве начального приближения для расчета уравнений ударного слоя при $\epsilon_{TS}=1$.

Система конечно-разностных аппроксимаций в случае $\epsilon_{TS}=1$ может быть записана следующим образом:

$$\frac{(E_g)_i^{n+1,s} G_i^{s+1}}{\Delta t_n} + \left(\frac{\partial}{\partial z} A_g^{n+1,s} G^{s+1} \right)_i + D_i^{n+1,s} = \left(\frac{\partial}{\partial z} C^{n+1,s} \frac{\partial G^{s+1}}{\partial z} \right)_i$$
(4.1)

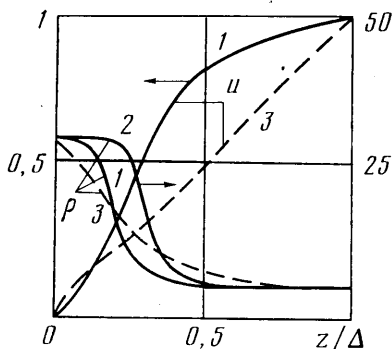
$$D_i^{n+1,s} = \frac{E_i^{n+1,s} - E_i^n}{\Delta t_n} + \left(\frac{\partial A^{n+1,s}}{\partial z} \right)_i - \left(\frac{\partial}{\partial z} C^{n+1,s} \frac{\partial g^{n+1,s}}{\partial z} \right)_i$$

$$g_i^n = g(t_n, z_i)$$

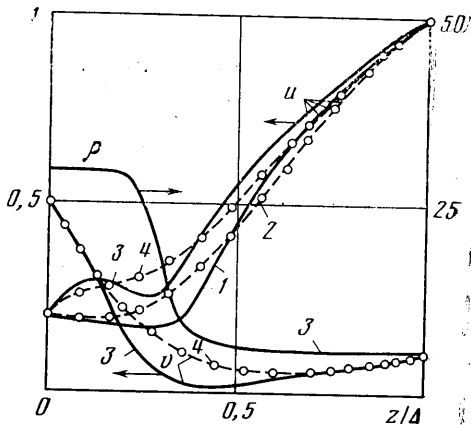
$$G_i^{s+1} = g_i^{h+1,s+1} - g_i^{n+1,s}$$

$$E_l^n = E(g_l^n), \quad E_l^{n+1,s} = E(g_l^{n+1,s})$$

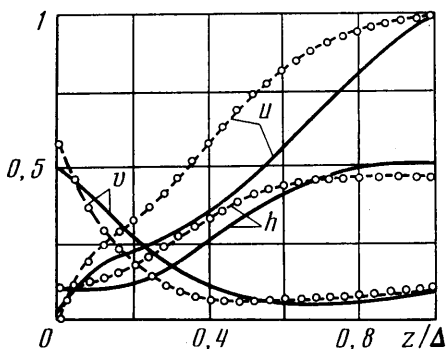
Здесь $g_l^{n+1,s}$ — значения вектора g на $(n+1)$ -м временном слое на итерации с номером s , причем $g_l^{n+1,0} = g_l^n$; G_l^{s+1} — вектор приращения на $(s+1)$ -й итерации. Аналогично определяются величины $D_l^{n+1,s}$, $A_l^{n+1,s}$, $C_l^{n+1,s}$. Матрицы E_g , A_g являются якобианами $\partial E(g)/\partial g$, $\partial A(g)/\partial g$ соответственно. Выражения $(\partial\Phi/\partial z)_l$, $(\partial/\partial z C \partial\Phi/\partial z)_l$



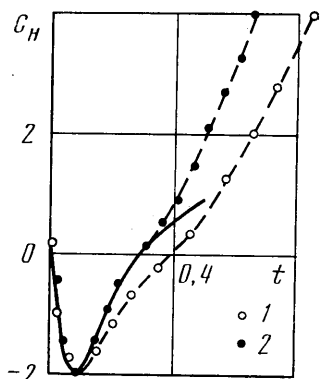
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

обозначают конечно-разностные аппроксимации второго порядка точности на неравномерной сетке z_1, \dots, z_L в узле $z = z_l$ соответствующих производных $\partial\Phi/\partial z$, $\partial/\partial z C \partial\Phi/\partial z$. Якобианы E_g , A_g вычислялись на каждой итерации, поэтому скорость сходимости $g_l^{n+1,s} \rightarrow g_l^{n+1}$, $s \rightarrow \infty$, — квадратичная.

Требовалось в среднем 4–5 итераций для выполнения неравенства $\max_l |G_l^{s+1}| < \epsilon$. Величина ϵ по порядку величины не превосходила погрешности аппроксимации. Вектор приращения G_l^{s+1} находился из решения системы (4.1) линейных алгебраических уравнений с блочной трехдиагональной матрицей, которая решалась методом векторной прогонки. Функция $p_l(t_n, z_l)$ находилась на каждой итерации после расчета вектора $g_l^{n+1,s+1}$ на основе аппроксимации уравнения (2.4) и интегрирования от волны к телу. Использовалось дополнительное условие $\partial p/\partial z = 0$ при $z=0$, оправданное асимптотическим анализом [10]. Расчет вектора $g_l^{n+1,s}$ проводился с учетом изменения величины отхода Δ волны от тела на каждой итерации в соответствии с соотношениями (2.6) — (2.10).

5. Расчеты проведены в диапазоне изменения параметров $Re_0 = 10-10^3$, $M_\infty = 2-10$, $Pr = 0,71$, $\gamma = 1,4$ для различных величин $\Omega(t)$, $\Omega_1(t)$, $u_*(t)$, $w_*(t)$, h_w . Некоторые результаты расчетов представлены на фиг. 2–5.

Данные расчета стационарного ударного слоя при $\Omega = \Omega_1 = 0$, $Re_\infty = 1100$, $M_\infty = 10$, $Pr = 0,75$, $\gamma = 1,4$, $h_w = 0,3h_0$ находятся в хорошем соответствии с результатами работы [8].

На фиг. 2 приведены профили $u(z)$, $10^{-2}\rho(z)$ для стационарного ударного слоя при $\Omega = \Omega_1 = 0$, $M_\infty = 10$, $Pr = 0,71$, $\gamma = 1,4$, $h_w = 0,1$. Линии 1, 3 относятся к течению со вдувом $u_* = 0$, $w_* = 0,01$ при $Re_0 = 500$ (1) и 50 (3). Линия 2 показывает профиль плотности при вдуве $u_* = 0$, $w_* = 0,03$. В случае $Re_* = 500$ видно разделение ударного слоя на вязкий слой смещения и зоны, где влияние вязкости мало. При $Re_* = 50$ вязкость существенна во всем ударном слое.

Фигура 3 иллюстрирует влияние вдува при $u_* = 0,2$, $w_* = 0,03$ на зависимости $u(z)$, $v(z)$, $10^{-2}\rho(z)$ в случае стационарного обтекания тела закрученным потоком с параметрами $\Omega = 0,1$, $M_\infty = 10$, $Pr = 0,71$, $\gamma = 1,4$, $h_w = 0,1$. Линии 1, 2 относятся к расчету вращающегося тела с угловой скоростью $\Omega_1 = 0,05$ при $Re_0 = 500$ и 50 соответственно, линии 3, 4 относятся к случаю $\Omega_1 = 0,5$ при $Re_0 = 500$ и 50. Градиент давления $b = p_1/\rho$ в точке $z = 0$ при указанных параметрах отрицателен. Прослеживается область постоянного значения $\rho(z)$ около поверхности тела в зоне невязкого пограничного слоя, область отдутого слоя смещения и область локально-слабовязкого течения между слоем смещения и головной ударной волной. В случае $\Omega_1 = 0,05$ величина $Q = (b + u_*^2)/\Omega_1^2 > 1$, функция $u(z)$ (кривая 1) убывает в зоне невязкого пограничного слоя в соответствии с качественным анализом аналитического решения (см. фиг. 1, линия 1). В случае $\Omega_1 = 0,5$ в распределении $u(z)$ (кривая 3) видна зона локального максимума около тела (ср. фиг. 1, линия 3). При $Re = 50$ вязкие эффекты оказывают существенное влияние на течение вплоть до поверхности тела (кривые 2, 4) и отмеченные выше качественные особенности $u(z)$ не проявляются.

Результаты расчетов, представленные на фиг. 4, 5, относятся к нестационарному течению в ударном слое в случае $Re_0 = 50$, величины γ , Pr , M_∞ , h_w — те же, что на фиг. 3.

На фиг. 4 приведены зависимости $u(t_j, z)$, $v(t_j, z)$, $h(t_j, z)$ в моменты времени $t_1 = 0$ (сплошные линии) и $t_2 = 0,86$ в случае $\Omega = 0,1$. Задавались нестационарные величины вдува и скорости вращения тела: $u_* = w_* = 0,03$ при $t = 0$, $u_* = 0$, $w_* = 0,01$ при $t > 0$; $\Omega_1(t) = 0,5 + 0,1t$. Понижение интенсивности вдува при $t > 0$ приводит к росту теплового потока и коэффициентов трения, что видно также по значениям производных $\partial u/\partial z$, $\partial v/\partial z$, $\partial h/\partial z$ в точке $z = 0$. Зона отдутого пограничного слоя приближается к поверхности тела. Рост $\Omega_1(t)$ обуславливает дополнительный разгон потока вдоль тела.

Зависимость от времени безразмерного теплового потока

$$C_H(t) = \mu \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=0} \frac{(\gamma-1)}{Pr} \frac{M_\infty^2}{\sqrt{Re_0}}$$

при нестационарном вдуве с указанными выше параметрами вдува показана на фиг. 5. Сплошные линии относятся к случаю $\Omega_1 = 0,5$, $\Omega = 0,2$, точками 1 отмечены данные расчета при $\Omega_1(t) = 0,5 + 0,1t$, $\Omega = 0,1$, точками 2 — данные расчетов при $\Omega_1 = 0,5$, $\Omega(t) = 0,3 + 0,2t$. Снижение скорости вдува приводит к кратковременному уменьшению плотности газа на поверхности тела, сопровождаемому уменьшением $C_H(t)$. Видно далее, что увеличение $\Omega(t)$ и $\Omega_1(t)$ в указанном диапазоне ускоряет рост $C_H(t)$, обусловленный уменьшением интенсивности вдува.

ЛИТЕРАТУРА

1. Желева И. М., Стулов В. П. Автомодельное решение уравнений закрученного движения запыленного газа // Аэродинамика входа тел в атмосферу планет. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 75–82.
2. Ким М. Д., Льюис К. Х. Расчет вязкого и гиперзвукового обтекания вращающегося тела при наличии вдува // Аэрокосмич. техника. 1983. Т. 1. № 12. С. 90–98.
3. Головачев Ю. П., Леонтьева Н. В. Вязкий ударный слой перед затупленным телом в неравномерном сверхзвуковом потоке: Препринт № 751. Л.: ЛФТИ им. А. Ф. Иоффе, 1982.
4. Еремейцев И. Г., Пилюгин Н. Н. Трение и теплообмен в ламинарном и турбулентном пограничных слоях при обтекании осесимметричных тел неоднородным сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 65–73.
5. Smith R. Hypersonic swirling flow past blunt bodies // Aeronaut. Quart. 1973. V. 24. P. 241–251.
6. Марков А. А. О влиянии вращения тела и внешней завихренности на теплообмен около критической точки затупленного тела в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 179–182.
7. Гершбейн Э. А. Теория гиперзвукового вязкого ударного слоя при больших числах Рейнольдса и при сильном вдуве инородных газов // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1015–1024.
8. Гершбейн Э. А., Колесников А. Ф. Численное решение уравнений Навье – Стокса в окрестности притупления тел, обтекаемых гиперзвуковым потоком разреженного газа при наличии вдува // Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 69–77.
9. Кокосинская Н. С., Павлов Б. М., Пасконов В. М. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом. М.: Изд-во МГУ, 1980. 247 с.

10. Марков А. А. Режимы течения вязкого газа в тонком трехмерном ударном слое около поверхности с малыми кривизнами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 3. С. 161–164.
11. Stuart J. T. Unsteady boundary layers // Recent Research on Unsteady Boundary Layers. V. 1. Quebec: Laval Univ. Press, 1972.
12. Kumari M., Nath G. Unsteady laminar compressible boundary layer flow at a three-dimensional stagnation point // J. Fluid Mech. 1978. V. 87. № 4. P. 705–717.
13. Pop I., Katagiri M. Unsteady heat transfer on boundary layer growth at the forward stagnation point // Acta Mechanica. 1978. V. 28. P. 185–198.
14. Марков А. А. Нестационарные эффекты в тонком вязком ударном слое около трехмерной критической точки при заданном ускорении и торможении тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 100–111.
15. Седов Л. И., Михайлова М. П., Черный Г. Г. О влиянии вязкости и теплопроводности на течение газа за сильно искривленной ударной волной // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1953. № 3. С. 95–100.
16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.XII.1985