

УДК 532.546

**ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ РЕЖИМЫ С ЭКСТРЕМУМАМИ
ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

ГОРДЕЕВ Ю. Н., КУДРЯШОВ Н. А., МУРЗЕНКО В. В.

Получены автомодельные решения задачи о движении нагретого газа в пористой среде с учетом теплообмена газа с твердой фазой по закону Ньютона. Показано, что существуют режимы фильтрации, при которых температура газа увеличивается с расстоянием в направлении движения.

Задачи такого типа [1–6] возникают в связи с паротепловой обработкой нефтеносных пластов, при исследовании движения газообразных продуктов из полости подземного взрыва и в ряде технологических процессов. В [1] получено автомодельное решение задачи о фильтрации газа с учетом мгновенного теплообмена между газом и средой. Ее приближенное решение с учетом теплопроводности газа представлено в [2]. Влияние теплообмена на динамические характеристики продуктов детонации при их фильтрации из подземной полости изучено в [3, 4]. Асимптотическое решение задачи о теплообмене при движении жидкости в неподвижном зернистом материале получено в [5]. Фильтрация теплопроводного газа в пористом слое при заданном потоке газа на границе исследовалась в [6].

Система уравнений, описывающая движение газа с учетом внутренних сил сопротивления, имеет вид [7]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p &= -\mathbf{F} \\ \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) &= -\operatorname{div}(p\mathbf{u}) + Q \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p , ρ , \mathbf{u} , e — давление, плотность, скорость и удельная внутренняя энергия газа, \mathbf{F} — внутренняя сила сопротивления, Q — мощность источников тепла.

Для замыкания системы уравнений (1) используем уравнение состояния идеального газа

$$p = R\rho T, \quad e = c_0 T \quad (2)$$

где T — температура, c_0 — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, R — газовая постоянная.

Представим $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ в виде [8]

$$\mathbf{F} = \frac{\mu m \mathbf{u}}{k} + \frac{\lambda m^2 \rho |\mathbf{u}|}{k} \mathbf{u} \quad (3)$$

где μ — вязкость газа, m — пористость, k — проницаемость среды, λ — постоянная Форхгеймера.

При малых числах Рейнольдса ($Re = \rho u m \delta / \mu < 0,1$, δ — характерный размер порового пространства) сила \mathbf{F} зависит линейно от скорости. В слу-

чае больших чисел Рейнольдса ($Re > 0,1$) зависимость силы сопротивления от скорости выражается формулой (3).

Уравнение энергии в (1) для одномерного плоского движения газа с учетом сил сопротивления может быть представлено в виде

$$\rho \frac{de}{dt} = Fu - p \frac{\partial u}{\partial x} + Q \quad (4)$$

Как видно из уравнения (4), изменение внутренней энергии происходит вследствие работы внутренних сил сопротивления Fu , расширения газа $-p \partial u / \partial x$ и притока тепла Q . В случае $Fu > p \partial u / \partial x - Q$ при движении газа с внутренними силами сопротивления может иметь место возрастание температуры.

Как правило, для описания фильтрации газа в пористой среде инерционные слагаемые в уравнении движения (1) не учитываются. В большом числе практических задач такое приближение оправданно. Характерные времена и масштабы пористой среды, при которых инерционные слагаемые затухают, приведены в [9].

Система уравнений, описывающая одномерное плоское течение идеального газа в пористой среде, при линейном законе сопротивления имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu m u}{k} \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma \frac{\partial (p u)}{\partial x} + Q = 0, \quad Q = (\gamma - 1) \frac{\alpha \sigma}{m} (T - T_s), \quad \gamma = 1 + \frac{R}{c_v} \quad (6)$$

Здесь использован тот факт, что теплообмен между газом и пористой средой происходит по закону Ньютона, α — коэффициент теплопередачи, σ — удельная поверхность пористой среды, T_s — температура среды.

Для системы уравнений (2), (5), (6) используем следующие начальные и граничные условия:

$$p=0, \quad \rho=0 \quad (t=0, \quad x>0) \quad (7)$$

$$p=Bt, \quad T=T_1 \quad (x=0, \quad t>0)$$

В задаче (2), (5)–(8) предполагается, что теплоемкость пористой среды намного больше теплоемкости фильтрующегося газа, и потому температура среды T_s при фильтрации считается постоянной.

Характерное время фильтрации газа через фиксированный слой длины L определяется выражением $t_i = L(m\mu/kB)^{1/2}$; характерное время теплообмена между газом и твердой матрицей находится из уравнения (6): $t_m = mrc_v/\alpha\sigma$ (коэффициент теплопередачи α определяется из критериального уравнения [4], связывающего числа Re , Pr , Nu).

При $t_m \ll t_i$ имеет место изотермический режим фильтрации газа: $T = T_s$. В случае адиабатической фильтрации ($t_m \gg t_i$) уравнение для давления газа совпадает с уравнением изотермической фильтрации газа [3], если ввести замену переменной $t = \gamma \tau$.

Из приведенных неравенств следует, что движение газа в пористой среде на ранней стадии ($t \ll t_m$) является адиабатическим, на поздней ($t \gg t_m$) — изотермическим.

Рассмотрим движение газа при $t \sim t_m$, когда необходимо учитывать теплообмен газа с твердой матрицей.

Задача (2), (5)–(7) является автомодельной. Давление, плотность и скорость движения газа при этом представляются через безразмерные функции автомодельной переменной

$$p = Bt f(\theta), \quad \rho = \left(\frac{B}{RT_1} \right) t g(\theta), \quad u = \left(\frac{kB}{\mu m} \right) \varphi(\theta) \quad (8)$$

$$\theta = x(\mu m/kBt^2)^{1/2}$$

удовлетворяющие уравнениям и условиям

$$\begin{aligned} g + (\varphi - \theta)g' + g\varphi' &= 0, & f' + \varphi &= 0 \\ f + (\gamma\varphi - \theta)f' + \gamma f\varphi' + (\gamma - 1)\alpha_0(fg^{-1} - \beta) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} f(\theta \rightarrow \infty) &= 0, & g(\theta \rightarrow \infty) &= 0 \\ f(\theta = 0) &= 1, & g(\theta = 0) &= 1 \\ \alpha_0 &= \alpha\sigma T_1/mB, & \beta &= T_s/T_1 \end{aligned} \quad (10)$$

В случае «мгновенного» теплообмена ($\alpha_0 \gg 1$) решением задачи (9), (10) является простая волна [8]

$$\varphi = 1, \quad f = 1 - \theta, \quad g = \beta^{-1}(1 - \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (11)$$

В этом случае на границе пористой среды ($\theta = 0$) температура газа претерпевает скачок от 1 до β ; далее движение газа происходит изотермически с температурой, равной температуре среды.

При $\alpha_0 = 0$ (адиабатический режим фильтрации) скорость фильтрации газа φ , давление f и плотность g выражаются зависимостями

$$\varphi = \gamma^{-1/2}, \quad f = 1 - \gamma^{-1/2}\theta, \quad g = 1 - \gamma^{1/2}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \gamma^{-1/2}$$

Если $\alpha_0(1 - \beta) = 1$, у системы уравнений (9) с условиями (10) имеется аналитическое решение

$$\varphi = 1, \quad f = 1 - \theta, \quad g = 1 - \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

В случае малых $\theta_0 - \theta$ ($0 \leq \theta_0 - \theta \leq 1$) находим

$$\begin{aligned} f(\theta) &\simeq \theta_0(\theta_0 - \theta), & \varphi(\theta) &\simeq \theta_0 \\ g(\theta) &\simeq \alpha_0\theta_0(\alpha_0\beta + \theta_0^2)^{-1}(\theta_0 - \theta) \end{aligned} \quad (12)$$

откуда с учетом (8) при $\theta = \theta_0$ получаем температуру газа на фронте

$$T_k = T_s + T_1\alpha_0^{-1}\theta_0^2 \quad (13)$$

Из (13) следует, что при $T_s/T_1 \gg \alpha_0^{-1}\theta_0^2$ температура газа стремится к температуре среды T_s , а при $T_s/T_1 \ll \alpha_0^{-1}\theta_0^2$ — к $T_1\alpha_0^{-1}\theta_0^2$. Если $T_s + T_1\alpha_0^{-1}\theta_0^2 > T_1$, то температура газа увеличивается с расстоянием от T_1 до $T(\theta = \theta_0)$. В этом случае на фронте движения температура газа имеет максимум. Такого рода режимы при течении газа в пористой среде возможны вследствие влияния сил сопротивления. Учет теплопроводности в газе приводит к размытию максимума температуры и температура на фронте становится меньше величины T_k .

Известно [10], что при фильтрации, описываемой законом Дарси (5), распространение газа происходит с конечной скоростью. Пусть $X(t)$ — координата фронта при фильтрации газа. Определим значение температуры газа на фронте при произвольном граничном условии.

Из (2), (5) и (6) следует уравнение для T

$$\frac{\rho}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) + (\gamma - 1) \left(\frac{\alpha\sigma}{m} (T - T_s) + \frac{\partial(pu)}{\partial x} \right) = 0 \quad (14)$$

В переменных $\xi = X(t) - x$, $t' = t$ система уравнений (5), (14) представляется в виде

$$\begin{aligned} u &= -\frac{k}{m\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi}, & L &= \frac{dX}{dt}, & \frac{\rho}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial t'} + D \frac{\partial T}{\partial \xi} - \right. \\ & & & & \left. - u \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + (\gamma - 1) \left[\frac{\alpha\sigma}{m} (T - T_s) - p \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

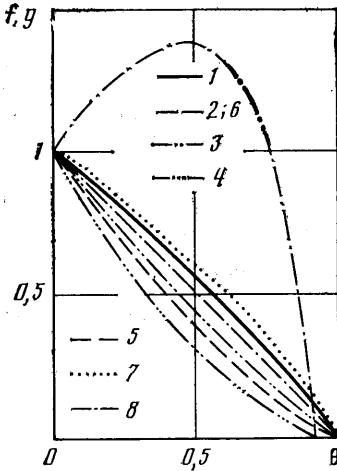
На фронте фильтрующегося потока ($\xi=0$) $p=0$, $\rho=0$. Из уравнений (15) получим величину температуры газа на фронте ($\xi=0$) для произвольных граничных условий

$$T = T_s + m^2 D^2 \mu (\alpha \sigma k)^{-1} \quad (16)$$

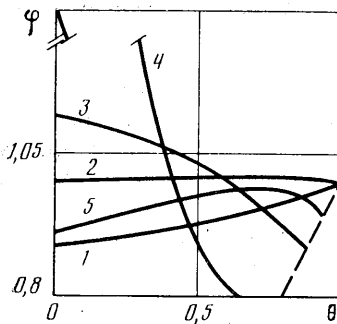
Формула (13) является частным случаем (16) при граничных условиях (7) ($D = \theta_0 (kB/\mu m)^{1/2}$).

Задача (9), (10) в случае произвольных $\alpha_0 \neq 0$ решалась методом Рунге — Кутты четвертого порядка аппроксимации [11]. Решение задачи находилось способом «пристрелки». При $\theta=0$ задавалось произвольное значение скорости $\varphi = \varphi_0 > 0$. Далее уравнения (9) интегрировались с учетом условий (10) до тех пор, пока не выполнялось $\varphi = \theta_0$ в соответствии с (12). Если при этом $f(\theta_0) \neq 0$ и $g(\theta_0) \neq 0$, то значение φ_0 увеличивалось и расчет повторялся. При резком возрастании $\varphi(\theta)$ (по существу $\varphi \rightarrow \infty$) расчет прекращался, начальное значение φ_0 уменьшалось. Таким образом, каждая итерация уменьшала интервал для определения φ при $\theta=0$ в 2 раза, что позволило получить численные решения для f , g , φ с необходимой точностью.

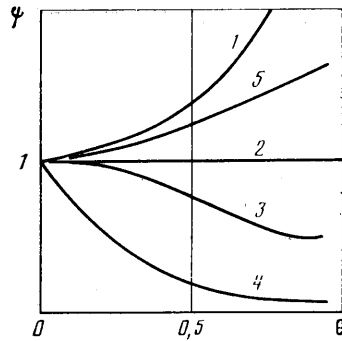
Некоторые численные решения задачи (9), (10) при $\gamma=1,4$; $\beta=0,25$; $\alpha_0=0,25$; 1,3; 2,5; 25 представлены на фиг. 1 — давление $f(\theta)$ (кривые 1–4), плотность $g(\theta)$ (кривые 5–8); фиг. 2 — скорость фильтрации



Фиг. 1



Фиг. 2

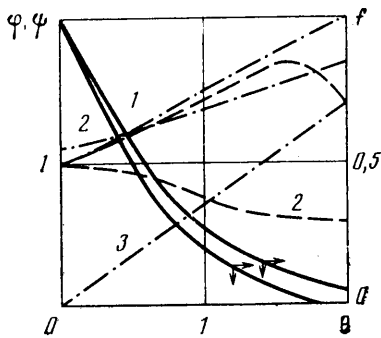


Фиг. 3

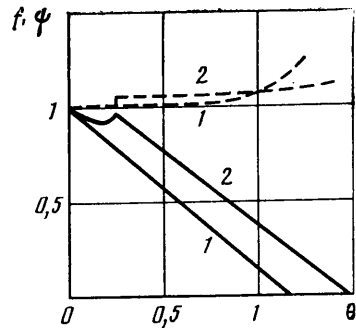
$\varphi(\theta)$ и фиг. 3 — температура газа $\psi(\theta) = fg^{-1}$. Кривые 5 на фиг. 1 и 2 соответствуют $\beta=2,5$; $\alpha_0=2,5$.

Из результатов решения задачи (9), (10) следует, что при $\alpha_0 \ll 1$ ($T_s=300$ К, $T_1=1000$ К, $m=0,1$; $\alpha=2$ Па·м/с·К, $B \ll 10$ атм/с) температура газа растет с расстоянием (фиг. 3, кривая 1). При $\alpha_0 \gg 1$ ($T_s=300$ К, $T_1=1000$ К, $m=0,1$; $\alpha=2$ Па·м/с·К, $B \gg 10$ атм/с) поведение температуры зависит от β . Если $\beta < 1$, то температура газа уменьшается с расстоянием (фиг. 3, кривые 3–4), при $\beta > 1$ — увеличивается (кривая 5).

Увеличение температуры газа с расстоянием объясняется тем, что при фильтрации газа в пористой среде действие сил сопротивления F приводит к переводу кинетической энергии газа во внутреннюю энергию. При этом теплообмен между газом и твердой матрицей не оказывает существенного влияния на распределение давления газа в пористой среде.



Фиг. 4



Фиг. 5

Покажем, что данное явление имеет место не только в случае течения, подчиняющегося закону Дарси (5), но и при более высоких скоростях, когда сила сопротивления F зависит от u по квадратичному закону. При этом автомодельной переменной будет $\theta = x/l(t)$, $l(t) = (kRT_0 t^2 / \lambda m^2)^{1/2}$, давление и плотность газа имеют вид (9), а скорость $u = l(t)\varphi(\theta)/t$. В автомодельных переменных уравнения (5), (6) и уравнение движения $\partial p / \partial x + \lambda m^2 \rho u^2 k^{-1} = 0$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} g'(\varphi^{-2}/_3\theta) + g(\varphi' + 1) &= 0, & f' + g\varphi^2 &= 0 \\ f'(\gamma\varphi^{-2}/_3\theta) + f(\gamma\varphi' + 1) + (\gamma - 1)\alpha_0(fg^{-1} - \beta) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Известно [12, 13], что при течении газа с учетом квадратичного закона сопротивления скорость распространения переднего фронта бесконечна, а давление газа убывает с расстоянием по экспоненциальному закону. Из системы уравнений (17) получаем, что при $\theta \gg 1$

$$\varphi \approx \frac{2}{3}\theta, \quad \psi = fg^{-1} \approx \beta, \quad f \approx f_0 \exp\left(-\frac{4\theta^2}{9\beta}\right), \quad f_0 = \text{const}$$

откуда следует, что в случае $\theta \gg 1$ при $\beta < 1$ температура газа с расстоянием уменьшается.

На фиг. 4 представлены давление $f(\theta)$ (сплошные линии), скорость фильтрации $\varphi(\theta)$ (штрихпунктирные линии) и температура газа $\psi(\theta)$ (штриховые линии) при движении газа с квадратичным законом сопротивления для $\gamma = 1,4$; $\beta = 0,5$; $\alpha_0 = 0,1$; 1,0 (кривые 1, 2) и асимптотика $\varphi = 2\theta/3$ (штрихпунктирная кривая 3). При $\alpha_0 = 0,1$ (кривые 1) температура газа в интервале $0 \leq \theta \leq \theta_0$ ($\theta_0 \approx 1,7$) возрастает. В точке $\theta = \theta_0$ температура достигает максимума, а затем убывает.

При движении газа с линейным законом сопротивления (5) температура газа достигает максимума на фронте. В случае квадратичного закона сопротивления сила $F = \lambda m^2 \rho u^2 k^{-1}$ уменьшается при $\rho \rightarrow 0$. Интенсивность источников тепла при этом также убывает, и в результате теплообмена происходит выравнивание температуры газа и твердой матрицы. Поскольку при $\rho \rightarrow 0$ первое слагаемое в (3) становится большим по сравнению со вторым, то формула (16) справедлива для температуры газа на переднем фронте и в случае двучленной зависимости силы сопротивления от скорости.

Рассмотрим фильтрацию газа через пористую среду, когда учитываются инерционные слагаемые в уравнении движения. Такие течения ранее изучались в [8, 14], где показано, что инерционными слагаемыми в газе нельзя пренебречь при сверхзвуковом втекании газа в пористую среду. Кроме того, при некоторых значениях параметров в потоке движущегося газа образуется ударная волна торможения, на фронте которой давление и плотность скачком возрастают, а скорость уменьшается.

Для линейного закона сопротивления $F = \mu t u k^{-1}$ задача (1), (2), (7) является автомодельной с переменными (8). Если течение газа сверхзвуковое ($u > c = (\partial p / \partial \rho)_s^{1/2}$), то начальные условия (7) должны быть дополнены еще одним граничным условием [14]

$$u = u_0(t) \quad (x=0, t>0) \quad (18)$$

При $u_0 = \text{const}$ задача (1), (2), (7), (18) также является автомодельной. Система уравнений одномерного плоского течения газа в пористой среде с учетом инерционных сил и теплообмена по закону Ньютона в автомодельных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} g'(\varphi - \theta) + g(\varphi' + 1) &= 0, \quad \sigma_0 g \varphi'(\varphi - \theta) = f' + \varphi \\ f + f'(\varphi - \theta) + \gamma f \varphi' + (\gamma - 1) [\alpha_0 (f g^{-1} - \beta) - \varphi^2] &= 0 \\ \sigma_0 &= k B / \mu m R T_1 \end{aligned} \quad (19)$$

Условие (18) записывается в виде

$$\varphi(\theta=0) = \varphi_0 = u_0 (\mu m / k B)^{1/2} \quad (20)$$

Результаты решения системы уравнений (19) с условиями (10), (20) представлены на фиг. 5; сплошные линии соответствуют давлению $f(\theta)$, а штриховые — температуре газа. Расчеты проводились при следующих параметрах: $\gamma = 1,4$; $\beta = 0,5$; $\sigma_0 = 1$; $\alpha_0 = 1,6$ для дозвукового режима (кривые 1) и $\varphi_0 = 2$; $\sigma_0 = 0,5$; $\alpha_0 = 1,9$ для сверхзвукового режима втекания газа (кривые 2). Для рассмотренных значений параметров температура газа в потоке возрастает с расстоянием.

Как следует из уравнений (1), на переднем фронте газа имеет место формула (16), поскольку влияние инерционных сил вблизи фронта пренебрежимо мало. Температура газа возрастает с расстоянием при малых α_0 так же, как и в случае безынерционного течения.

При сверхзвуковом втекании газа (кривые 2) в потоке образуется ударная волна торможения, распространяющаяся в направлении, противоположном направлению движения газа. Интенсивность волны возрастает с увеличением скорости втекания φ_0 . Расчеты показывают, что рост теплоотдачи из газа в твердую матрицу при увеличении α_0 приводит к ослаблению волны при $\beta < 1$ и к усилению при $\beta > 1$.

Таким образом, режимы фильтрации, при которых имеются экстремумы у температуры газа, существуют при различных значениях коэффициентов теплоотдачи и зависят прежде всего от скорости движения газа; учет инерционных слагаемых качественно не изменяет характера монотонности профиля температуры фильтрующегося газа.

Полученные аналитические зависимости давления, скорости и температуры газа можно использовать для оценки различных динамических характеристик при фильтрации нагретого газа в пористой среде, а также для тестирования численных алгоритмов при математическом моделировании процессов фильтрации с учетом теплообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М., Шыганаков Н. О некоторых связанных задачах фильтрации и теплопроводности в пористых телах // Инж.-физ. журн. 1983. Т. 45. № 3. С. 434–439.
2. Кудряшов Н. А. Автомодельное решение задачи о движении газа в пористой среде с учетом теплообмена // Инж.-физ. журн. 1983. Т. 44. № 4. С. 637–640.
3. Габбасов М. Н., Колобашкин В. М., Кудряшов Н. А. Теплообмен при фильтрации газа из полости камуфлетного взрыва // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 80–86.
4. Захарова И. Г. Расчет утечки продуктов детонации из камуфлетной полости при взрыве // Физика горения и взрыва. 1981. Т. 17. № 3. С. 149–151.
5. Буевич Ю. А., Перминов Е. Б. Нестационарный нагрев неподвижного зернистого массива // Инж.-физ. журн. 1980. Т. 38. № 1. С. 29–37.
6. Алфянов О. М., Артюгин Е. А., Трянин А. П. Определение плотности теплового потока на границе пористого тела из решения обратной задачи // Теплофизика высоких температур. 1983. Т. 21. № 6. С. 1160–1168.

7. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
8. *Гордеев Ю. Н., Колобашкин В. М., Кудряшов Н. А.* Численное исследование влияния инерционных членов в уравнении движения на фильтрацию газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 183–186.
9. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
10. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 67–78.
11. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.
12. *Баренблатт Г. И.* Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 6. С. 679–698.
13. *Колобашкин В. М., Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В.* Численные решения одномерных автомодельных задач движения газа в пористой среде при квадратичном законе сопротивления // Инж.-физ. журн. 1983. Т. 45. Вып. 4. С. 616–621.
14. *Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В.* Ударные волны в изотермическом газе при наличии сил сопротивления // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 171–175.

Москва

Поступила в редакцию
13.V.1986