

**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1987**

УДК 532.529.5

О ЗАТУХАНИИ СОЛИТОНОВ В ПУЗЫРЬКОВЫХ СРЕДАХ

ШАГАПОВ В. Ш.

Рассмотрена задача о затухании солитонов в пузырьковой среде из-за вязкости и межфазной тепломассообменной неравновесности в предположении, что их эволюция описывается последовательной сменой стационарных солитонных решений. Полученные из аналитических выражений изменения амплитуды солитонов сопоставлены с имеющимися экспериментальными данными.

1. Уравнения одномерного движения жидкости с газовыми пузырьками имеют вид [1]

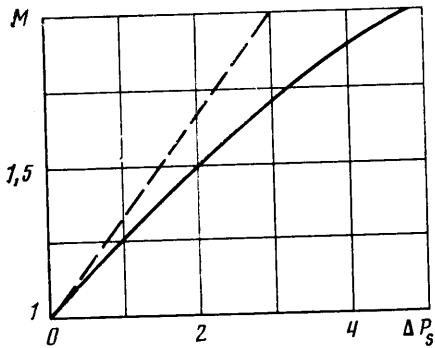
$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{dn}{dt} + n \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \rho_1 \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \\ a \frac{dw}{dt} + \frac{3}{2} w^2 + 4v_1 \frac{w}{a} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1^\circ}, \quad w = \frac{da}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} = - \frac{3\gamma p_2 w}{a} - \frac{3(\gamma-1)q_2}{a}, \quad q_2 = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2'}{\partial r} \right)_a \quad (1.1) \\ \rho_1 = \rho_1^\circ \alpha_1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{4}{3} \pi n a^3, \quad \rho_1^\circ = \text{const} \end{aligned}$$

Здесь ρ_1 , ρ_1° , p_1 , α_1 , v , w , a , n — соответственно средние и истинные плотности фаз, давление, объемные концентрации, скорость поступательного движения, радиальная скорость, радиус пузырьков, число пузырьков в единице объема смеси; T_2' — распределение температуры внутри пузырьков; γ и λ_2 — показатель адиабаты и коэффициент теплопроводности газовой фазы; v_1 — кинематическая вязкость жидкости. Нижние индексы 1 и 2 относятся соответственно к жидкости и газу.

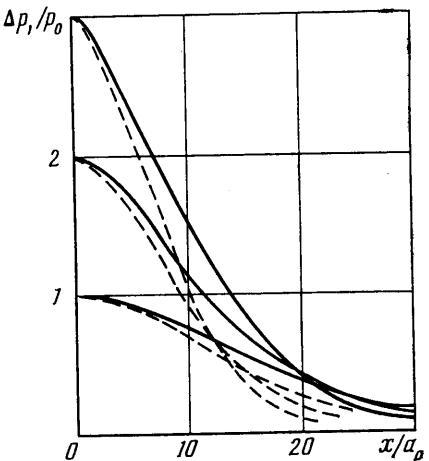
При адиабатическом движении газа в пузырьках ($q_2=0$) и в пренебрежении вязкостью жидкости система (1.1) имеет решение типа солитона

$$\begin{aligned} p_1 = p_0 + \rho_1^\circ \alpha_{10} \alpha_{20} v_0^2 (1 - A^3), \quad \frac{p_2}{p_0} = A^{-3\gamma} \\ w^2 = \frac{2}{3} \left\{ \frac{p_0}{\rho_1^\circ} [(\gamma-1)^{-1} (\gamma A^{-3} - A^{-3\gamma}) - 1] + \frac{1}{2} \alpha_{10} \alpha_{20} v_0^2 (A^{\frac{4}{3}} - A^{-\frac{4}{3}})^2 \right\} \quad (1.2) \\ u = v_0 - v = \alpha_{20} v_0 (1 - A^3), \quad \int_{a_s}^a \frac{v da}{w} = \pm x, \quad A = \frac{a}{a_0} \end{aligned}$$

Дополнительные нижние индексы 0 и s означают, что параметры соответствуют равновесному состоянию смеси и пику солитона. Приравнивая правую часть выражения для w нулю, а также используя первое соотношение из (1.2), получим зависимость амплитуды солитона $\Delta p_1 =$



Фиг. 1



Фиг. 2

$=p_{1s} - p_0$ от его скорости v_0 в параметрической форме (a_s — параметр)

$$\begin{aligned} \gamma M^2 &= 2[1 - (\gamma - 1)^{-1}(\gamma A_s^{-3} - A_s^{-3})] (A_s^{-\frac{1}{2}} - A_s^{\frac{1}{2}})^{-2} \\ \Delta P_s &= \gamma M^2 (1 - A_s^3), \quad M = \frac{v_0}{C}, \quad C = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_1^\circ \alpha_{10} \alpha_{20}}} \\ \Delta P_s &= \frac{\Delta p_{1s}}{p_0}, \quad A_s = \frac{a_s}{a_0} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решение (1.2) в переменных Лагранжа впервые получено в [2], в [3—5] оно обобщено с учетом сжимаемости жидкости. Но, как отмечено в [6], сжимаемость жидкости при не очень малых объемных сокращениях пузырьков $\alpha_{20} \gg \gamma p_0 / \rho_1^\circ C_1^2$ (C_1 — скорость звука в жидкой фазе) оказывается для достаточно сильных волн, где заведомо будет происходить дробление пузырьков. В случае слабых солитонов ($\Delta P_s \ll 1$) из (1.2) и (1.3) следует:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \Delta p_{1s} \operatorname{ch}^{-2} \frac{2x}{L}, \quad p_2 = p_1, \quad a = a_0 - (a_0 - a_s) \operatorname{ch}^{-2} \frac{2x}{L} \\ u &= \alpha_{20} C \left(1 - \frac{a}{a_0}\right), \quad w^2 = (\gamma + 1) \frac{\Delta p_{1s}}{\rho_1^\circ} \left(1 - \frac{a}{a_0}\right)^2 \operatorname{th}^2 \frac{2x}{L} \\ M - 1 &= \frac{(\gamma + 1) \Delta P_s}{6\gamma}, \quad L = 4a_0 C \sqrt{\frac{\rho_1^\circ}{(\gamma + 1) \Delta p_{1s}}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Зависимости (1.4) совпадают с решением, полученным на основе модели Кортевега — де Вриза для пузырьковых сред [7]. На фиг. 1 и 2 представлены зависимости скорости солитона от его амплитуды, а также профили давления в жидкости при $\gamma = 1,4$, $\alpha_{20} = 10^{-2}$. Сплошные линии соответствуют (1.2) и (1.3), штриховые — асимптотическому решению (1.4). Видно, что использование решений (1.3) для волн умеренной интенсивности ($1 \leq \Delta P_s \leq 3$) несколько завышает величину скорости солитона (фиг. 1) и делает профили волн более острыми. Хотя решение (1.3) получено при $\Delta P_s \ll 1$, оно вполне применимо для сопоставления с данными экспериментов в более широком диапазоне волн (в частности, при $\Delta P_s \lesssim 2$ —3, ошибка в определении полуширины солитона, например, составит не более 10—15%).

2. Как показывают экспериментальные результаты, приведенные в [7, 8], профили волн, описываемые решениями (1.4) на расстояниях порядка ширины солитонов, а также зависимость, связывающая скорость солитонов и их амплитуды, хорошо согласуются с опытными данными.

Пусть пузырьковая среда находится в трубке единичного сечения, расположенной вдоль направления распространения возмущений и ограниченной двумя плоскостями с продольными координатами x_1 и x_2 . Энергия E , переносимая солитоном, состоит из кинетической энергии поступательного движения смеси E_k , из кинетической энергии радиального движения пузырьков E_R , а также из внутренней энергии газа E_T

$$E = E_k + E_R + E_T, \quad E_k = \int_{x_1}^{x_2} \rho_{10} \frac{u^2}{2} dx, \quad E_R = \int_{x_1}^{x_2} n k_R dx$$

$$E_T = \int_{x_1}^{x_2} n e_T dx$$

$$k_R = 2\pi \rho_1^\circ w^2 a^3, \quad e_T = \frac{4}{3} \pi a_0^3 \rho_{20}^\circ c_2 (T_2 - T_0) \quad (2.1)$$

где k_R и e_T — кинетическая энергия радиального движения и внутренняя энергия пузырька, c_2 — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, T_2 — средняя температура пузырька. При вычислении энергии солитона и интенсивности диссипации его энергии будем считать, что профиль солитона в каждый момент времени описывается стационарным решением, т. е. процесс распространения и затухания солитонов является как бы последовательной сменой стационарных решений (1.2) (или (1.4)). Так можно полагать, если характерное расстояние затухания солитона намного больше его характерной ширины L . В тех случаях, когда диссипативные процессы могут быть учтены введением дополнительных линейных слагаемых в уравнении Кортевега — де Бриза, задача о затухании солитонов рассмотрена в [9].

Для внутренней энергии при адиабатическом сжатии

$$e_T = \frac{4}{3} \pi (\gamma - 1)^{-1} a_0^3 p_0 (A^{\beta(1-\gamma)} - 1) \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1) и используя (1.2), для E получим зависимость от амплитуды солитона и параметров, определяющих равновесное состояние смеси. В общем случае эта зависимость достаточно сложная и в дальнейшем будем рассматривать только слабые солитоны $\Delta P_s \ll 1$. Тогда, используя (1.4), для составляющих энергии получим

$$E_k = \frac{4}{3} \frac{a_0 p_0}{\sqrt{\gamma(\gamma+1)}} \left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta P_s^{\frac{\gamma}{2}}$$

$$E_R = \frac{4}{45} \frac{a_0 p_0}{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta P_s^{\frac{\gamma}{2}}$$

$$E_T = 4 \frac{a_0 p_0}{\sqrt{\gamma(\gamma+1)}} \left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta P_s^{\frac{\gamma}{2}} \quad (2.3)$$

Отсюда видно, что наиболее энергосодержащей составляющей является $E_T (E_T \gg E_R, E_k)$, поэтому далее будем считать $E = E_T$. При вычислении (2.3) вместо пределов интегрирования взяты $x_1 = -\infty$, $x_2 = \infty$. Если взять $-x_1 = x_2 = L$, то результат изменится несущественно, следовательно, энергия солитона заключена, в основном в промежутке $(-L, L)$. В про-

цессе распространения солитона указанная энергия постепенно уменьшается из-за ее диссипации в тепловую энергию несущей жидкости вследствие вязкости жидкости, а также из-за межфазной тепловой неравновесности. Учет тепловой диссипации можно провести двумя способами.

В первом случае вводится коэффициент эффективной вязкости, который в случае газовых пузырьков можно определить согласно [10]

$$\nu_T = \frac{3(\gamma-1)}{4} a_0^2 \sqrt{\frac{\omega_R \omega_2}{2}} \quad (2.4)$$

$$\omega_R = a_0^{-1} \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_1^\circ}}, \quad \omega_2 = \frac{\kappa_2}{a_0^2}, \quad \kappa_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_{20}^\circ c_2}$$

где κ_2 — коэффициент температуропроводности газа.

Значения коэффициентов эффективной вязкости, оцениваемые по этим формулам, при $a_0 \approx 10^{-3}$ м обычно значительно выше, чем коэффициент вязкости жидкости ($\nu_T \gg \nu_1$). Согласно [11], для интенсивности диссипации одним пузырьком имеем

$$\eta_R = 16\pi\rho_1^\circ v w^2 a, \quad v = v_1 + v_T \quad (2.5)$$

Тогда для скорости диссипации Q , используя (1.3) и полагая также $x_1 = -\infty$, $x_2 = \infty$, имеем

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} n \eta_R dx = \frac{32}{45} \frac{\sqrt{\gamma(\gamma+1)}}{\gamma^2} \frac{p_0}{a_0} \left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \right)^{1/2} v \Delta P_s^{5/2} \quad (2.6)$$

На основании уравнения баланса энергии

$$\frac{dE}{dt} = -Q$$

используя (2.3), (2.6) и учитывая также последнее выражение из (1.4), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для эволюции амплитуды солитона

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta P_s^{1/2})}{dx} &= -\frac{\Delta P_s^{5/2}}{4x_s^\circ} \\ x_s^\circ &= \frac{45}{32} \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{a_0^2 C}{v}, \quad \frac{d}{dt} = C \frac{d}{dx} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отсюда имеем следующее решение:

$$\frac{\Delta P_s}{\Delta P_s^\circ} = \left(1 + \frac{x}{x_s^{(v)}} \right)^{-1/2}, \quad x_s^{(v)} = \frac{x_s^\circ}{\Delta P_s^{(v)}/p_0}, \quad \Delta P_s^\circ = \frac{\Delta p_{1s}^\circ}{p_0} \quad (2.8)$$

где Δp_{1s}° — начальная (при $x=0$) амплитуда.

Приведем численные значения $x_s^{(v)}$ применительно к экспериментальным данным из [7] для воды с пузырьками углекислого газа при $p_0 = 0,1$ МПа, $\Delta p_{1s}^\circ = 2 \cdot 10^{-2}$ МПа, $a_0 = 10^{-3}$ м, $\alpha_{20} = 10^{-2}$. Из формулы (2.8) для характерного расстояния, на котором амплитуда солитона уменьшается в $\sqrt{2}$ раз, имеем $x_s^{(v)} = 22,5$ м (на основе экспериментальных данных [7] $x_s^{(v)} \approx 3$ м). Как видно, учет тепловой диссипации по этой схеме сильно занижен. Таким образом, выражение для эффективной вязкости, полученное при колебательном режиме пузырьков (когда в течение половины периода температура пузырьков выше, а для следующего полупериода ниже температуры окружающей жидкости), непригодно для солитонов, при рас-

пространении которых температура газа в основном всегда выше температуры жидкости. Следовательно, решением (2.8) можно воспользоваться только в тех случаях, когда вязкая диссипация доминирует.

3. Рассмотрим вторую схему учета тепловой диссипации, основанную на использовании решения уравнения теплопроводности на фоне солитона. Анализ показывает, что для пузырьковых газо- и парожидкостных смесей при радиусах $a \approx 10^{-3}$ м, представляющих наибольший интерес, температурные неравновесности при распространении солитонов реализуются в тонких пограничных слоях вблизи межфазных границ. Поэтому в дальнейшем будем использовать уравнение теплопроводности, записанное для плоскоодномерного случая. Уравнение теплопроводности газа вблизи поверхности пузырька с учетом отмеченных предположений можно записать в виде

$$\frac{\partial T_2'}{\partial x} = \kappa_2' \frac{\partial^2 T_2'}{\partial z^2} + (1 - \gamma^{-1}) \frac{T_0}{p_0} \frac{dp_2}{dx}, \quad \kappa_2' = \frac{\kappa_2}{C} \quad (3.1)$$

где z — микрокоордината, отсчитываемая от поверхности пузырька.

Считая, что dp_2/dx является известной функцией, при начальном и граничном условиях

$$T_2'(-\infty, z) = T_2'(x, 0) = T_0$$

решение (3.1) имеет вид [12]

$$\frac{T_2' - T_0}{T_0} = (1 - \gamma^{-1}) \left[\frac{\Delta p_2}{p_0} - \frac{\kappa_2'}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{z \Delta p_2(x')}{p_0 (\kappa_2'(x-x'))^{1/2}} \exp \left(-\frac{z^2}{4\kappa_2'(x-x')} \right) dx' \right] \quad (3.2)$$

$$\Delta p_2 = p_2 - p_0$$

Отсюда для потока тепла через поверхность раздела фаз имеем

$$q_2 = \lambda_2 \frac{\partial T_2'(x, 0)}{\partial z} = (1 - \gamma^{-1}) \frac{T_0 \lambda_2}{\pi p_0 \sqrt{\kappa_2'}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{\Delta p_2(x')}{\sqrt{x-x'}} dx' \quad (3.3)$$

По данной схеме для интенсивности тепловой диссипации, определяемой как скорость излучения тепла пузырьками в жидкость, имеем

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} 4\pi a^2 n q_2 dx$$

Используя (1.4) и (3.3) при $-x_1 = x_2 = L$, получим

$$Q = \frac{6\pi_*}{\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^{1/2} \left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \right)^{1/2} \left[\frac{\kappa_2}{a_0} \sqrt{\frac{(\gamma+1)p_0}{\rho_1^\circ}} \right]^{1/2} p_0 \Delta P_s^{1/4} \quad (3.4)$$

$$\pi_* = \int_{-\infty}^2 \frac{\operatorname{sech}^2 x}{\sqrt{2-x}} dx - \int_{-\infty}^{-2} \frac{\operatorname{sech}^2 x}{\sqrt{-2-x}} dx \quad (\pi_* \approx \sqrt{2})$$

Тогда из уравнения баланса энергии, используя для Q зависимость (3.4), имеем

$$\frac{d(\Delta P_s^{1/4})}{dx} = - \frac{2\Delta P_s^{1/4}}{x_s^\circ} \quad x_s^\circ = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}\pi}{\pi_*} \frac{a_0 C}{\gamma} \left[\frac{a_0}{\kappa_2} \sqrt{\frac{\rho_1^\circ}{(\gamma+1)p_0}} \right]^{1/4} \quad (3.5)$$

Для затухания амплитуды солитона окончательно получим

$$\frac{\Delta P_s}{\Delta P_s^{\circ}} \left(1 + \frac{x}{x_s}\right)^{-4}, \quad x_s = \frac{x_s^{\circ}}{\Delta P_s^{\circ/4}} \quad (3.6)$$

Проанализируем условие применимости рассмотренного подхода для оценки затухания солитонов, используя стационарное приближение уравнения для давления в газовых пузырьках

$$\frac{dp_2}{dx} = -\frac{3\gamma p_2}{a} \frac{da}{dx} - \frac{3(\gamma-1)q_2}{aC} \quad (3.7)$$

Рассматриваемая схема учета тепловой диссипации предполагает, что второе слагаемое в правой части, ответственное за межфазный теплообмен, значительно меньше первого, т. е.

$$\varepsilon = (1-\gamma^{-1}) \frac{|(q_2 C^{-1})|}{|(p_2 da/dx)|} \ll 1 \quad (3.8)$$

Для простоты выкладок проведем оценку этих слагаемых на линейном участке солитонного решения, где параметры среды мало отличаются от своих равновесных значений $((a_0-a)/(a_0-a_s) \ll 1)$. Из (1.4) на этом участке имеем

$$a-a_0=\Delta a_0 e^{k(x-x_0)}, \quad p_2-p_0=\Delta p_{20} e^{k(x-x_0)} \quad (3.9)$$

$$\Delta p_{20}=-3\gamma p_0 \frac{\Delta a_0}{a_0}, \quad k=\frac{4}{L}$$

Решение уравнения теплопроводности (3.1), удовлетворяющее начальному и граничному условиям

$$T_2'(-\infty, z)=T_2'(x, 0)=T_0$$

с учетом (3.9) вместо p_2 , имеет вид

$$\frac{T_2'-T_0}{T_0}=(1-\gamma^{-1}) \frac{\Delta p_{20}}{p_0} \left[1-\exp\left(-\sqrt{\frac{k}{\kappa_2}} z\right) \right] e^{k(x-x_0)} \quad (3.10)$$

Подставляя (3.9) и (3.10) в (3.8), получим

$$\varepsilon=3(\gamma-1) \left[\frac{\kappa_2}{a_0} \sqrt{\frac{\rho_1^{\circ}}{(\gamma+1)\Delta p_{1s}}} \right]^{\frac{1}{2}} \ll 1 \quad (3.11)$$

Помимо (3.8) использование выражения для внутренней энергии в виде (2.2) предполагает, что в уравнении для изменения внутренней энергии пузырька

$$\frac{de_T}{dx}=-p_2 \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) - 4\pi a^2 q_2 C^{-1}$$

второе слагаемое в правой части значительно меньше первого. Для отношения этих слагаемых имеем

$$\varepsilon^*=3\gamma \left[\frac{\kappa_2}{a_0} \sqrt{\frac{\rho_1^{\circ}}{(\gamma+1)\Delta p_{1s}}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon^*=\frac{\varepsilon}{1-\gamma^{-1}}$$

Поскольку обычно $\gamma-1 \leq 0.5$; условие $\varepsilon^* \ll 1$ сильнее, чем (3.8). Оказывается, вместо (3.6) можно получить решение, справедливое только при $\varepsilon \ll 1$, а выполнение второго условия ($\varepsilon^* \ll 1$) не обязательно. Действительно, полагая также, что энергия солитона состоит из внутренней

энергии пузырьков, запишем балансовое уравнение

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} n e_T dx = - \int_{x_1}^{x_2} 4\pi a^2 n q_2 dx \quad (3.12)$$

Учитывая, что внутреннюю энергию пузырьков можно представить в виде

$$e_T = \frac{4\pi}{3} \frac{a^3 p_2 - a_0^3 p_0}{\gamma - 1}$$

а также используя уравнение для давления p_2 , записанное для одномерного нестационарного движения, для солитонов малой амплитуды из (3.12) получим

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} (p_2 - p_0) dx = -3(\gamma - 1) \int_{x_1}^{x_2} \frac{q_2}{a_0} dx$$

Отсюда, используя для p_2 , q_2 соответственно выражения (1.4) и (3.3) при $-x_1 = x_2 = L$, получим уравнение, решение которого аналогично (3.6) описывает закон затухания амплитуды солитона. Для характерной длины затухания при этом имеем

$$x_s^* = \frac{x_s}{1 - \gamma^{-1}} \quad (3.13)$$

где x_s — определяется по (3.6).

Для приведенного выше примера смеси воды с пузырьками углекислого газа, по формуле (3.13) получим $x_s^* = 6$ м ($\epsilon = 0,035$). Из обработки экспериментальных данных по затуханию солитонов на основании (3.6) $x_s^* \approx 4$ м.

4. В случае парожидкостной среды в системе основных уравнений движения, вообще говоря, необходимо учитывать фазовые переходы. Анализ полной системы уравнений парожидкостных пузырьковых сред, а также результаты исследований, приведенные в [7], показывают, что в задачах рассматриваемого типа основное отличие парожидкостных сред от газожидкостных содержится в уравнении для давления в пузырьках

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{3\gamma p_2}{a} \frac{da}{dt} - \frac{3(\gamma-1)\chi q_1}{a}, \quad q_1 = -\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1'}{\partial r} \right)_a, \quad \chi = \frac{c_2 T_0}{l} \quad (4.1)$$

где l — удельная теплота парообразования, T_1' и λ_1 — температура и коэффициент теплопроводности жидкости. При этом вкладом фазовых переходов в уравнениях неразрывности жидкой фазы и пульсационного движения можно пренебречь. Тогда сравнение уравнения для давления из (4.1) с уравнением (4.1) показывает, что паровые пузырьки эквивалентны газовым, если вместо потока тепла в газовые пузырьки q_2 взять величину χq_1 . Для определения q_1 необходимо знать распределение температуры в жидкости вблизи поверхности раздела фаз. Аналогично предыдущему $T_1'(x, z)$ определим из уравнения теплопроводности при заданных граничном и начальном условиях

$$\frac{\partial T_1'}{\partial x} = \kappa_1' \frac{\partial^2 T_1'}{\partial z^2}, \quad z = r - a, \quad \kappa_1' = \frac{\kappa_1}{C}, \quad \kappa_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1 C} \quad (4.2)$$

$$T_1'(x, 0) = T_a(x), \quad T_1'(-\infty, z) = T_0$$

где c_1 — удельная теплоемкость жидкости. Здесь и далее индекс a соответствует межфазной поверхности. Будем полагать, что температура жидкости на поверхности пузырьков равна температуре насыщения при давлении, равном p_2 . Тогда T_a и p_2 удовлетворяют уравнению Клапейро-

на — Клаузиуса, и из которого следует

$$\frac{T_a - T_0}{T_0} = (1 - \gamma^{-1}) \chi \frac{\Delta p_2}{p_0}, \quad \Delta p_2 = p_2 - p_0$$

При этих предположениях аналогично предыдущему, получим распределение температуры. Для приведенного потока тепла имеем

$$\chi q_1 = (1 - \gamma^{-1}) \chi^2 \frac{T_0 \lambda_1}{\pi p_0 \sqrt{\kappa_1}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{\Delta p_2(x')}{\sqrt{x-x'}} dx' \quad (4.3)$$

Для приведенной интенсивности тепловой диссипации Q , используя (4.3), получим

$$Q = \int_{-L}^L 4\pi a^2 n \chi q_1 dx = \\ = \frac{6\pi*}{\sqrt{2}\pi} \eta \chi^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^{1/2} \left(\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \right)^{1/2} \left[\frac{\kappa_1}{a_0} \sqrt{\frac{(\gamma+1)p_0}{\rho_1^\circ}} \right]^{1/2} p_0 \Delta P_s^{\circ - \eta}, \quad \eta = \frac{\rho_1^\circ c_1}{\rho_{20}^\circ c_2} \quad (4.4)$$

Подставив (4.4) в уравнение баланса энергии, получим затем решение, совпадающее с (3.6). При этом для характерных расстояний затухания возмущений имеем

$$x_s = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3\pi*} \frac{a_0 C}{\gamma \eta \chi^2} \left[\frac{a_0}{\kappa_1} \sqrt{\frac{\rho_1^\circ}{(\gamma+1)p_0}} \right]^{1/2} \Delta P_s^{\circ - \eta}, \quad x_s^* = \frac{x_s}{1 - \gamma^{-1}} \quad (4.5)$$

Здесь x_s^* — уточненное, как в предыдущем пункте, характерное расстояние. Параметр ϵ , определяемый аналогично (3.8), в данном случае имеет вид

$$\epsilon = 3(\gamma-1) \eta \chi^2 \left[\frac{\kappa_1}{a_0} \sqrt{\frac{\rho_1^\circ}{(\gamma+1)\Delta p_{1s}}} \right]^{1/2} \quad (4.6)$$

Приведем численные оценки для x_s^* применительно к экспериментальным данным из [8] для воды и фреона-12 при $\alpha_{20}=10^{-2}$. Для воды при $p_0=0,15$ МПа, $\Delta p_{1s}^\circ=0,027$ МПа, $a_0=1,5 \cdot 10^{-3}$ м имеем $x_s^*=0,4$ м (на основе экспериментальных данных $x_s \approx 0,4$ м), при $p_0=0,5$ МПа, $\Delta p_{1s}^\circ=0,1$ МПа, $a_0=1,4 \cdot 10^{-3}$ м имеем $x_s^*=0,9$ м (1 м). Для фреона-12 при $p_0=1,3$ МПа, $\Delta p_{1s}^\circ=0,125$ МПа, $a_0=10^{-3}$ м имеем $x_s^*=7,5$ м (8 м).

Следовательно, результаты расчетов по формулам (4.5) неплохо согласуются с экспериментальными данными.

Полученные выше формулы для характерных расстояний затухания солитонов можно обобщить для смесей с парогазовыми пузырьками, когда фазовые переходы сопровождаются диффузионными процессами [1]. В этом случае имеем

$$x_s^* = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3\pi*} \frac{a_0 C}{(\gamma-1)\xi} \left[\frac{a_0}{\kappa_2} \sqrt{\frac{\rho_1^\circ}{(\gamma+1)p_0}} \right]^{1/2} \Delta P_s^{\circ - \eta} \\ \xi = \left(1 + \frac{g_0 F}{(1-\gamma^{-1})(1-g_0)\sqrt{Le_2}} \right) \left(1 + \frac{\gamma g_0}{\beta(1-g_0)H_g \sqrt{Le_1}} \right)^{-1} \\ F = \frac{B_v}{\beta_g}, \quad H_v = \frac{B_v}{B_0}, \quad H_g = \frac{B_g}{B_0}, \quad B_0 = B_v g_0 + B_g (1-g_0),$$

$$\beta = (\gamma-1) \eta H_v \chi^2, \quad Le_i = \frac{\kappa_i}{\chi}$$

где B_g и B_v – газовые постоянные для газового и парового компонентов, g_0 – массовая концентрация пара в пузырьках, κ – коэффициент диффузии. Из данного выражения при $g_0=0$ и 1 получим соответственно (3.6) и (4.5).

5. Выше пренебрегалось двухскоростными эффектами. Однако на основе приведенных решений можно получить оценку влияния скольжения фаз на эволюцию солитонов. Для величины относительной скорости пузырьков v_{12} , используя выражение

$$v_{12} = \alpha_{10}\alpha_{20}v_0(A^{-3}-A^3) \quad (5.1)$$

полученное в [13], в случае слабых солитонов имеем

$$v_{12} = 6\alpha_{10}\alpha_{20}C\left(1 - \frac{a}{a_0}\right) \quad (5.2)$$

Для кинетической энергии возмущений жидкости, инициируемых скольжением пузырьков, а также для диссипативной функции, согласно [11], можно записать

$$k_v = \frac{2\pi}{3}\rho_1^\circ a^3 v_{12}^2, \quad \eta_v = 12\pi\rho_1^\circ v_1 a v_{12}^2$$

Отсюда с учетом (5.2) для составляющей энергии солитона из-за скольжения фаз E_v и интенсивности диссипации за счет вязкости при относительном движении Q_v получим

$$E_v = \frac{16}{3} \frac{a_0 p_0}{\gamma\sqrt{\gamma(\gamma+1)}} \alpha_{20} \sqrt{\alpha_{10}\alpha_{20}} \Delta P_s^{3/2}, \quad Q_v = \frac{96}{\gamma\sqrt{\gamma(\gamma+1)}} \frac{p_0}{a_0} \sqrt{\alpha_{10}\alpha_{20}} v_1 \Delta P_s^{3/2}$$

Из сравнения этих выражений с (2.3) и (3.4) видно, что хотя кинетическая энергия и интенсивность диссипации, обусловленные относительным движением, могут привалировать над значениями аналогичных параметров из-за радиального движения жидкости, на фоне учета тепловых эффектов ими можно пренебречь.

Как было отмечено, в достаточно сильных волнах необходимо учитывать возможность дробления пузырьков. Дробление может быть вызвано, во-первых, динамическими перепадами в газовой фазе, возникающими при относительном движении фаз (из-за неустойчивости Кельвина – Гельмгольца), во-вторых, торможением радиального движения границ пузырьков, связанных с повышением давления пара внутри пузырей при сжатии (из-за неустойчивости Рэлея – Тейлора). Согласно [14], условия нарушения устойчивости поверхности пузырьков, вызываемых отмеченными выше эффектами, приближенно можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2^\circ v_{12}^2 a}{\sigma} &= We > We^* \approx \pi \\ \frac{\rho_1^\circ b a}{\sigma} &= Bo > Bo^* \approx \pi^2, \quad b = v \frac{dw}{dx} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения, b – ускорение жидкости на границе раздела фаз при радиальном движении пузырька. Условия (5.3) с учетом (5.1) и (1.1) могут быть записаны в виде соотношений, определяющих безразмерный радиус пузырьков в момент максимального их сжатия

$$\begin{aligned} A_s(A_s^{-3}-A_s^3) &\geq B_1, \quad B_1 = \frac{4\pi\sigma}{(\alpha_{20}v_0)^2\rho_2^\circ a_0} \\ A_s[(A_s^{-3}-1) + \gamma M^2(A_s^{-3}-1)] &\geq B_2, \quad B_2 = \frac{\pi^2\sigma}{a_0 p_0} \end{aligned}$$

В случае слабых солитонов отсюда с учетом (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \Delta P_s &\geq B_1^*, \quad B_1^* = \left(\frac{6\pi\gamma\sigma}{a_0 p_0 \alpha_{20}} \frac{\rho_1^\circ}{\rho_{20}^\circ} \right)^{1/2} \\ \Delta P_s &\geq B_2^*, \quad B_2^* = \frac{\pi^2\sigma}{(\gamma+1)a_0 p_0} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из (5.4) видно, если для слабых волн наиболее вероятным механизмом может быть неустойчивость Рэлея – Тейлора, то с повышением амплитуды возмущений

дробление может происходить за счет как первого, так и второго механизмов. Отметим также, что рассмотрение соотношений (5.4) как условий дробления весьма приближенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Когарко Б. С. Движение смеси жидкости с газовыми пузырьками // Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. М.: Наука, 1973. С. 243–246.
3. Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбак С. А. Стационарные возмущения в жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1976. № 6. С. 90–96.
4. Богуславский Ю. Я., Григорьев С. Б. О распространении волн произвольной амплитуды в газожидкостной смеси // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 4. С. 636–639.
5. Плаксин С. И. О стационарных решениях уравнений движения жидкости с пузырьками газа // ПМТФ. 1983. № 1. С. 75–82.
6. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 6. С. 30–41.
7. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. М.: Наука, 1984. 301 с.
8. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Прибатурина Н. А. Динамика волн давления в жидкости с пузырьками пара // Гидродинамические течения и волновые процессы. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1983. С. 8–20.
9. Пелиновский Е. Н. О поглощении нелинейных волн в диспергирующих средах // ПМТФ. 1971. № 2. С. 68–71.
10. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Декременты затухания колебаний и эффективные коэффициенты теплообмена пузырьков, радиально пульсирующих в жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 80–87.
11. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 450–463.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
13. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш., Вахитова Н. К., Шихмурзаева З. А. Об ударных волнах в жидкости с паровыми пузырьками // Инж.-физ. журн. 1982. Т. 42. № 2. С. 192–206.
14. Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Нигматулин Р. И., Тимофеев Е. И. Влияние плотности газа на дробление пузырьков ударными волнами // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 292–294.

Уфа

Поступила в редакцию
21.V.1986