

УДК 532.526

О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА ВИБРИРУЮЩИМ УЧАСТКОМ ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

МАНУЙЛОВИЧ С. В.

В связи с проблемой описания перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный значительный интерес представляет изучение восприимчивости, т. е. реакции течения на различные внешние воздействия, такие, как звуковые возмущения, поверхностная шероховатость, вибрация стенки, турбулентность невозмущенного потока и др. В [1] была отмечена общая особенность, обнаруженная в экспериментальных и численных исследованиях влияния упомянутых выше факторов на течение в ламинарном пограничном слое: во всех случаях внешнее вынуждающее возмущение приводит к возбуждению распространяющихся вниз по потоку собственных колебаний пограничного слоя — волн Толлмина — Шлихтинга. В [2, 3] была аналитически рассчитана амплитуда волны, возбуждаемой гармоническими колебаниями узкой полоски на поверхности плоской пластины, причем число Рейнольдса считалось бесконечно большим, а частота вибратора соответствовала окрестности нижней ветви нейтральной кривой [4]. В [5] амплитуда генерируемой волны неустойчивости рассчитывалась методом разложения решения по биортогональной системе собственных функций. Ниже с помощью обобщения метода [2] произведен расчет амплитуд волн Толлмина — Шлихтинга для всего диапазона чисел Рейнольдса и частот вибратора, соответствующих области неустойчивости: при умеренных числах Рейнольдса задача решается численно, для больших чисел Рейнольдса построено асимптотическое решение.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о возбуждении малых колебаний в стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости около плоской полубесконечной пластины. Набегающий поток будем предполагать равномерным и параллельным плоскости пластины. В качестве основных единиц измерения используем плотность жидкости ρ , скорость набегающего потока U_∞ и характерную длину $l = \lambda U_\infty / \tau$ (λ — коэффициент вязкости, τ — касательное напряжение в точке O на поверхности пластины). Число Рейнольдса $R = \rho U_\infty l / \lambda \gg 1$.

Введем декартову систему координат с началом в точке O , осью x , направленной вдоль скорости набегающего потока, и осью y , перпендикулярной обтекаемой поверхности (фиг. 1). Профиль скорости невозмущенного течения в точке O обозначим $U(y)$.

Предположим, что возмущения основного течения вызваны вибрацией участка поверхности пластины, точки которого перемещаются в вертикальном направлении по закону

$$y_w = \sigma f(x) \exp(-i\omega t) \quad (1.1)$$

Здесь t — время, ω — частота, $\sigma \ll 1$ — амплитудный параметр; функция f тождественно равна 0 вне некоторого отрезка, расположенного в окрестности точки O , причем длина этого отрезка много меньше расстояния до передней кромки L . Задачу будем решать в предположении параллельности основного течения, поэтому в дальнейшем считаем $|x| \ll L$ (хотя при этом может быть $|x| \gg 1$).

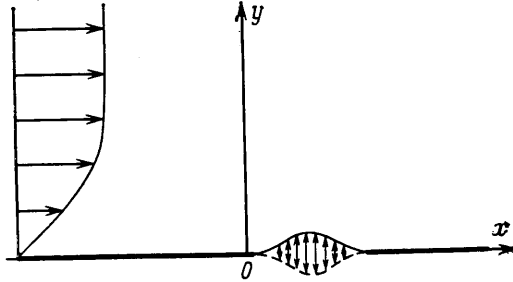
Возмущения параметров течения (компонент вектора скорости и давления) обозначим σq ($q = v_x, v_y, p$). Функции q удовлетворяют линеаризованной системе уравнений Навье — Стокса. В сделанных предположениях:

коэффициенты системы зависят лишь от переменной y , поэтому решение задачи будем искать с помощью преобразования Фурье по переменной x

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(k) q^*(k, y) \exp(ikx - i\omega t) dk \quad (1.2)$$

$$f^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-ikx) dx$$

Здесь фурье-образы искомым функций ради удобства нормированы на величину f^* . Преобразование (1.2) позволяет свести систему урав-



Фиг. 1

нений в частных производных для возмущений q к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для их фурье-компонент.

Введем постоянную $c = \omega/k$, а также новую неизвестную функцию φ , положив $v_y^* = -ik\varphi$. В результате задача расчета функций q^* сводится к решению уравнения Орра — Зоммерфельда с неоднородными граничными условиями

$$(U-c) \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - k^2\varphi \right) - \frac{d^2U}{dy^2} \varphi = \frac{1}{ikR} \left(\frac{d^4\varphi}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + k^4\varphi \right) \quad (1.3)$$

$$\varphi(0) = c, \quad \frac{d\varphi}{dy}(0) = -1, \quad \varphi(\infty) = 0$$

Первые два крайних условия (1.3) следуют из условий прилипания, записанных для стенки (1.1). Последнее условие (1.3) выражает требование затухания возмущений при $y \rightarrow \infty$; оно исключает два экспоненциально растущих линейно независимых решения уравнения (1.3).

Исследуем поведение решения (1.2), (1.3) при $x \rightarrow \infty$. Подобно [2], продолжим функции q^* в область комплексных k и заменим первый интеграл в (1.2) выражением, состоящим из двух слагаемых: интеграла по контуру Γ , лежащему в верхней полуплоскости, и умноженной на $2\pi i$ суммы вычетов в полюсах, попавших в область между действительной осью и контуром Γ (полюсами первого порядка функций q^* являются собственные значения однородной задачи для уравнения (1.3), возникающей при исследовании устойчивости течения в пограничном слое [6]). Если параметры ω , R соответствуют области устойчивости, то при больших x оба упомянутых выше слагаемых малы, причем второе слагаемое представляет собой совокупность затухающих волн.

При приближении точки ω , R к области неустойчивости полюс $k_0(\omega, R)$, соответствующий неустойчивой моде, приближается к действительной оси плоскости k , поэтому декремент затухания соответствующей волны стремится к нулю и решение (1.2) при фиксированном боль-

шом x определяется в основном вычетом в точке k_0 . Поскольку решения, полученные с помощью преобразования Фурье, удовлетворяют условию затухания при $|x| \rightarrow \infty$, то в результате пересечения точкой ω , R нейтральной кривой и вхождения ее в область неустойчивости ($\text{Im } k_0 \leq 0$) решение (1.2) изменяется скачком [7]: в направлении $x \rightarrow \infty$ оно становится быстро затухающим, а при $x \rightarrow -\infty$, напротив, затухает слабо и определяется вычетом в точке k_0 , взятым со знаком минус (при этом фазовая скорость соответствующей волны $c_0 = \omega / \text{Re } k_0 > 0$). Для обеспечения непрерывности изменения решения воспользуемся принципом, впервые сформулированным в [7] и впоследствии обоснованным в [3]: в области неустойчивости к решению (1.2), описываемому классическим преобразованием Фурье, следует добавлять слагаемое q_{Ts} , определяемое вычетом в точке k_0 . В этом случае возмущения течения при $x \rightarrow \infty$ имеют вид экспоненциально растущей волны Толлмина — Шлихтинга

$$q \sim q_{Ts} = 2\pi i f^*(k_0) q_0(y) \exp(ik_0 x - i\omega t) \quad (1.4)$$

$$q_0 = \text{res}_{k=k_0} q^*(k, y)$$

Функции q_{Ts} удовлетворяют линеаризованным уравнениям Навье — Стокса и условиям прилипания при $y=0$; функция $\varphi_0(y) = \text{res } \varphi$ является собственным решением однородной краевой задачи для уравнения (1.3). Решение (1.4) определяется геометрическим параметром f^* и универсальной функцией

$$A(\omega, R) = p_0(0) = \frac{1}{ik_0 R} \frac{d^3 \varphi_0}{dy^3}(0) \quad (1.5)$$

модуль $|A|$ которой характеризует амплитуду, а аргумент $-\pi < \arg A < \pi$ дает вклад в сдвиг фазы волны Толлмина — Шлихтинга.

Сравним теперь асимптотическую формулу (1.4) с результатами, полученными в [5]. В этой работе амплитуда возбуждаемой волны определялась с помощью разложения решения (1.2) по биортогональной системе собственных функций в области, лежащей вниз по потоку за вибратором, поэтому выражение [5] для искомой амплитуды наряду с собственным решением задачи Орра — Зоммерфельда содержало решение сопряженной задачи. Легко показать, что результат [5] может быть преобразован в (1.4). Для этого достаточно в качестве первой собственной функции биортогональной системы выбрать функцию φ_0 .

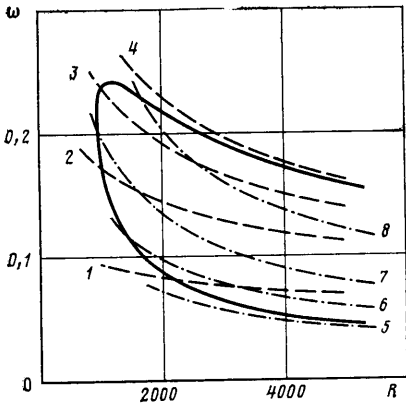
2. Результаты численного анализа. В данной работе для расчета амплитуды волны Толлмина — Шлихтинга при конечных R строилось численное решение задачи (1.3). Для каждой пары параметров ω , R выбиралось начальное значение k (близкое к моде k_0), после чего методом ортогонализации [8] рассчитывались два линейно независимых решения φ_1 и φ_2 уравнения Орра — Зоммерфельда, экспоненциально затухающих при $y \rightarrow \infty$. Решение задачи (1.3) записывалось в виде $\varphi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$, постоянные c_1 и c_2 определялись из граничных условий при $y=0$. После этого вычислялась функция

$$F(k) = ikR \left[\frac{d^3 \varphi}{dy^3}(0) \right]^{-1}$$

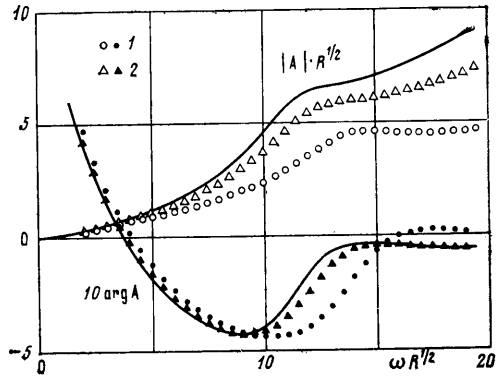
и ее производная dF/dk и методом Ньютона рассчитывалась мода k_0 , являющаяся корнем уравнения $F=0$. В процессе итераций одновременно с собственным значением k_0 определялась и искомая величина

$$A = \left[\frac{dF}{dk}(k_0) \right]^{-1}$$

На фиг. 2 показаны линии уровня функции $|A|$ (штриховые) и $\arg A$ (штрихпунктирные): линии 1–4 соответствуют значениям амплитуды 0,01; 0,02; 0,03; 0,04, а линии 5–8 — значениям фазы 0,2; 0; -0,2; -0,4. Нейтральная кривая, ограничивающая область неустойчивости, обозначена сплошной линией. При $R=3000$, $\omega=0,15$ функции $|A|$ и $\arg A$ принимают значения 0,024958 и -0,37297 соответственно.



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Асимптотический анализ при $R \rightarrow \infty$. Будем предполагать, что параметры ω , R принадлежат области неустойчивости. Как было показано выше, для вычисления амплитуды волны Толлмина — Шлихтинга необходимо построить решение задачи (1.3) с комплексным волновым числом k , близким моде k_0 . В связи с этим в дальнейшем будем считать выполненными соотношения $\omega \rightarrow 0$, $|k| \rightarrow 0$, $|c| \rightarrow 0$, $\text{Re } k > 0$.

При $R \rightarrow \infty$ решение уравнения Орра — Зоммерфельда обладает многослойной структурой: трех- или пятислойной в окрестности соответственно нижней или верхней ветви нейтральной кривой [9]. Решать задачу (1.3) начнем с области I, где $y \sim |k|^{-1}$. В этой области $U \equiv 1$, влиянием вязкости можно пренебречь, поэтому интеграл уравнения (1.3), затухающий при $y \rightarrow \infty$, дается выражением

$$\varphi = C \exp(-ky) \quad (3.1)$$

На нижней границе области I решение (3.1) приобретает вид

$$\varphi \sim C(1 - ky) \quad (3.2)$$

Область II $y \sim 1$ занимает основную часть пограничного слоя; здесь также можно пренебречь диссипативными членами уравнения (1.3). Решение, удовлетворяющее условию сращивания (3.2), имеет вид

$$\varphi = CV \left\{ 1 - ky + k \int_y^\infty [V(\xi)^{-2} - 1] d\xi \right\}, \quad V = \frac{U - c}{1 - c} \quad (3.3)$$

Вязкие члены уравнения Орра — Зоммерфельда становятся одного порядка с конвективными в области III, называемой критическим слоем $|y - c| \sim |kR|^{-1/2}$. При приближении к этой области из области II решение (3.3) ведет себя как

$$\varphi \sim C(y - c + k) \quad (3.4)$$

Предположим теперь, что точка ω , R расположена в окрестности нижней ветви нейтральной кривой. В этом случае критический слой прилегает к поверхности пластины $|c| \sim |kR|^{-1/2}$ и, следовательно, решение задачи (1.3) имеет трехслойную структуру. Решение в области критического слоя, удовлетворяющее асимптотическому условию (3.4) и первым двум краевым условиям (1.3), может быть выражено через функцию Эйри

$$\varphi = C(y - c + k) + C_1 \int_{\zeta'}^{\infty} \int_{\zeta''}^{\infty} \text{Ai}(\zeta'') d\zeta'' d\zeta' \quad (3.5)$$

$$\zeta = (ikR)^{1/2}y + \zeta_w, \quad \zeta_w = -(ikR)^{1/2}c$$

$$C = C_1(ikR)^{1/2}I(\zeta_w) - 1, \quad I(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} \text{Ai}(\zeta') d\zeta'$$

$$C_1 = \frac{k}{(ikR)^{1/2}kI(\zeta_w) - \text{Ai}'(\zeta_w)}, \quad \text{Ai}'(\zeta) = \frac{d \text{Ai}(\zeta)}{d\zeta}$$

Из формул (3.5) видно, что полюс k_0 является одним из корней дисперсионного соотношения

$$(ik_0R)^{1/2}k_0I(\zeta_0) - \text{Ai}'(\zeta_0) = 0, \quad \zeta_0 = -(ik_0R)^{1/2}\frac{\omega}{k_0}$$

Подставив построенное решение (3.5) в равенство (1.5), получим искомое выражение для комплексной амплитуды волны в окрестности нижней ветви нейтральной кривой

$$A = \frac{3\omega k_0^2 \text{Ai}'(\zeta_0)}{4\omega \text{Ai}'(\zeta_0) + 2\zeta_0^2(\omega - k_0^2) \text{Ai}(\zeta_0)} \quad (3.6)$$

На фиг. 3 показаны результаты вычисления модуля и фазы комплексной амплитуды A . Сплошная линия соответствует случаю $R \rightarrow \infty$ (формула (3.6)), точки 1 и 2 отмечены результаты расчета для чисел $R=10^4$ и 10^6 соответственно.

В случае, когда точка ω , R расположена в окрестности верхней ветви нейтральной кривой, решение задачи (1.3) имеет пятислойную структуру, поскольку толщина критического слоя становится много меньше расстояния до стенки и под этим слоем формируется невязкая область IV и вязкий подслои V. В рассматриваемом приближении решение в областях III и IV имеет вид, определяемый выражением (3.4). Это же выражение дает условие срачивания с областью вязкого подслоя $y \sim (\omega R)^{-1/2}$, которую необходимо ввести, чтобы удовлетворить условиям прилипания. В результате решение в области V, удовлетворяющее условию срачивания с областью IV и краевым условиям на пластине, имеет вид

$$\varphi = C(y - c + k) + C_2 \exp[i(i\omega R)^{1/2}y] \quad (3.7)$$

$$C = \frac{c}{k - c}, \quad C_2 = \frac{i(C + 1)}{(i\omega R)^{1/2}}$$

Подстановка выражения (3.7) в формулу (1.5) приводит к простой формуле для амплитуды волны в окрестности верхней ветви нейтральной кривой

$$A = \omega/2 \quad (3.8)$$

Заметим, что такой же вид приобретает формула (3.6) при $\omega \gg R^{-1/2}$. Это означает, что области, где справедливы трех- и пятислойная схемы, перекрываются [9], поэтому формулы (3.6), (3.8) дают асимптотическое $R \rightarrow \infty$ выражение для амплитуды генерируемой вибратором волны Толлмина — Шлихтинга во всей области неустойчивости.

В заключение определим более детально характерный размер области изменения продольной координаты, где справедливо полученное решение. Поскольку при построении решения предполагается, что профиль скорости основного течения слабо зависит от положения точки x , эта область ограничена указанным выше неравенством $|x| \ll L$. В выбранной системе единиц измерения величина L по порядку величины равна R . В то же время для формирования волны Толлмина — Шлихтинга необходимо, чтобы протяженность области была не меньше длины волны λ_{TS} . Отсюда получаем условие $\lambda_{TS} \ll R$, от выполнения которого зависит справедливость построенного решения. Как показывает расчет,

в области неустойчивости это условие выполняется с хорошей точностью: так, при $R=1500$, $\omega=0,15$ $\lambda_{TS} \approx 15$. Заметим также, что полученное неравенство выполняется тем лучше, чем больше число R .

Автор благодарит М. Н. Когана и В. В. Михайлова за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reshotko E. Boundary-layer stability and transition // Ann. Rev. Fluid Mech. 1976. V. 8. P. 311–349.
2. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1049–1055.
3. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264–272.
4. Жук В. И., Рыжов О. С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1326–1329.
5. Тумин А. М., Федоров А. В. Возбуждение волн неустойчивости локализованным вибратором в пограничном слое // ПМТФ. 1984. № 6. С. 65–72.
6. Линь Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
7. Богданова Е. В., Рыжов О. С. О возмущениях, генерируемых осцилляторами в потоке вязкой жидкости на закритических частотах // ПМТФ. 1982. № 4. С. 65–72.
8. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.
9. Жук В. И., Рыжов О. С. Об асимптотике решений уравнения Орра – Зоммерфельда, задающих неустойчивые колебания при больших значениях числа Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. № 6. С. 1328–1332.

Москва

Поступила в редакцию
8.VII.1986