

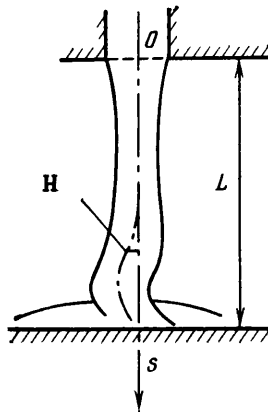
УДК 532.522

О ВЫПУЧИВАНИИ ТОНКИХ ЖИДКИХ СТРУЙ И НИТЕЙ

РАДЕВ С., ЧАВДАРОВ Б., ЯРИН А. Л.

На основе квазиодномерных уравнений динамики тонких струй теоретически исследована изгибная потеря устойчивости (выпучивание) тонких струй и нитей высоковязких жидкостей, медленно натекающих по нормали на пластину. В рамках линейного анализа получено характеристическое уравнение. Его решение показало, что неустойчивость возникает лишь при наличии продольной сжимающей силы в струе, причем в случае, когда расстояние от среза насадка, создающего струю, до пластины превосходит некоторое критическое для данной струи значение. Это критическое значение вычислено. Показано, что без учета силы тяжести (горизонтальные струи) неустойчивость имеет аperiodический характер.

1. Экспериментальные факты. В экспериментах [1, 2] была обнаружена неустойчивость тонких свободных струй и нитей высоковязких капельных жидкостей, движущихся с достаточно малыми скоростями и на некотором протяжении подвергающихся продольному сжатию. Продольная сжимающая сила в [1, 2] создавалась либо вследствие трения струи о воздух, либо при продольном сдавливании двумя палочками очень вязкой жидкой нити, лежащей на поверхности ртути. Наблюдалось также выпучивание тонких струй, распространяющихся в жидкой среде, при внезапном увеличении плотности окружающей жидкости (и, следовательно, выталкивающей силы) и при натекании струй по нормали на пластину (фиг. 1). Струи, натекающие на пластину, исследовались в эксперимен-



Фиг. 1

тах [3]; было показано, что выпучивание возникает при числах Рейнольдса (по условиям истечения струй) $Re < 1,2$. Струи с $Re > 1,2$ устойчивы и при натекании на пластину остаются прямолинейными. Имеется также ограничение на расстояние L от среза насадка, из которого вытекает струя, до плоскости. Если L меньше некоторого критического значения L_1 , то выпучивание не наблюдается. При $Re \leq 1,2$, $L \geq L_1$ возникают двумерные изгибные возмущения, при которых ось струи остается плоской кривой,

а струя укладывается на пластину в виде складок. С удалением от точки бифуркации в область неустойчивости изгибные возмущения приобретают вид спирали, ось струи становится пространственной кривой, а струя начинает укладываться на пластину в виде колец. В [3] наблюдалось также выпучивание горизонтальных высоковязких струй, распространяющихся по свободной поверхности маловязкой жидкости, когда влияние силы тяжести отсутствует, а струя начинает утолщаться непосредственно от среза насадка. Обзор работ, посвященных выпучиванию тонких струй и нитей, можно найти в [4].

Целью данной работы является объяснение и теоретическое описание потери устойчивости, наблюдавшейся в экспериментах [3]. Полученные результаты подтвердили предположение Дж. Тейлора о том, что выпучивание обусловлено наличием продольной сжимающей силы в струе или нити и в этом смысле является аналогом эйлеровой неустойчивости тонких упругих стержней [5].

2. Постановка задачи. Основные уравнения. Для описания движения жидкости в струе или нити воспользуемся квазиодномерными уравнениями динамики тонких струй капельных жидкостей [6, 7]. Как показывают результаты экспериментов [3], инерцией и поверхностным натяжением жидкости можно в первом приближении пренебречь. Будем также для простоты исследовать пока случай горизонтальной струи, исключая из рассмотрения силу тяжести. Учитывая результаты [3], при отыскании точки потери устойчивости можно считать изгиб струи плоским. При сделанных допущениях уравнения неразрывности, количества движения и момента количества движения [6, 7] приобретают вид (возмущения малы)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f V_\tau}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial s} &= 0, \quad Pk + \frac{\partial Q_n}{\partial s} = 0 \\ Q_n &= -\frac{\partial}{\partial s} \left\{ 3\mu I \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial V_n}{\partial s} + k V_\tau \right) - \frac{3}{2} k \frac{\partial V_\tau}{\partial s} \right] \right\} \\ P &= 3\mu f \frac{\partial V_\tau}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь t — время; s — продольная координата, отсчитываемая вдоль оси невозмущенной струи; f — площадь сечения струи (сечение струи — круг радиуса a ; $f = \pi a^2$); V_τ и V_n — проекции скорости жидкости в струе на касательную и нормаль к ее оси; P — продольная сила в струе; k — кривизна оси струи, которая является плоской кривой; Q_n — проекция перерезывающей силы в сечении на нормаль к оси струи; μ — вязкость жидкости; $I = \pi a^4/4$ — момент инерции сечения струи.

Первое уравнение (2.1) — уравнение неразрывности, второе и третье — проекции уравнения количества движения на касательную и нормаль к оси струи, четвертое — проекция уравнения момента количества движения на бинормаль к оси струи, пятое равенство выражает реологический закон ньютоновской жидкости и связывает продольную силу в тонкой свободной струе со скоростью деформации (3μ — трутоновская элонгационная вязкость).

С учетом того, что для малых возмущений справедливы соотношения (H — амплитуда плоского изгиба струи; см. фиг. 1)

$$V_n = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad k = \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}$$

из трех последних уравнений (2.1) получаем линейное по возмущениям

И уравнение

$$(a^\circ)^2 \frac{dV_{\tau^\circ}}{ds} \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} - \frac{1}{4L_*^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[(a^\circ)^4 \left(\frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial t} + \right. \right. \\ \left. \left. + V_{\tau^\circ} \frac{\partial^3 H}{\partial s^3} - \frac{1}{2} \frac{dV_{\tau^\circ}}{ds} \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} \right) \right] = 0 \quad (2.2)$$

В (2.2) $a^\circ(s)$ и $V_{\tau^\circ}(s)$ — невозмущенные распределения радиуса и скорости, отвечающие прямолинейной струе. Уравнение (2.2) записано в безразмерном виде; в качестве масштабов скорости и длины выбраны $V_{\tau_0^\circ}$ и L , а в качестве масштаба для радиуса сечения струи — a_0 (нижний индекс ноль соответствует $s=0$); $L_* = L/a_0$.

Для определения $a^\circ(s)$ и $V_{\tau^\circ}(s)$ получаем с помощью первого, второго и пятого соотношений (2.1) следующую задачу:

$$\frac{d(a^\circ)^2 V_{\tau^\circ}}{ds} = 0, \quad \frac{d}{ds} \left[(a^\circ)^2 \frac{dV_{\tau^\circ}}{ds} \right] = 0 \\ s=0, a^\circ=1, V_{\tau^\circ}=1; s=1, V_{\tau^\circ}=E \quad (2.3)$$

Граничное условие при $s=1$ в (2.3) фактически означает, что жидкость протекает сквозь пластину с некоторой скоростью $V_{\tau_1^\circ}$ ($E = V_{\tau_1^\circ}/V_{\tau_0^\circ}$). В случае перфорированной пластины это условие соответствует действительности. В случае непроницаемой пластины, по которой жидкость растекается до бесконечности, это условие в случае $E < 1$ позволяет в первом приближении моделировать замедление струи пластиной. Поскольку у самой поверхности пластины, где струя растекается, применение квазидномерных уравнений, вообще говоря, необоснованно, построение более детального невозмущенного решения в рамках данной постановки не имеет смысла.

Решения задачи (2.3) получены в [8] в связи с формированием волокон (случай заданного $E > 1$) и имеют вид

$$V_{\tau^\circ} = E^s, \quad (a^\circ)^2 = E^{-s} \quad (2.4)$$

В рассматриваемой здесь задаче о выпучивании струй, очевидно, имеем $E < 1$. Определить E в конкретной ситуации можно, скажем, сопоставив зависимость (2.4) для $a^\circ(s)$ с экспериментально наблюдаемым профилем струи вблизи потери устойчивости. Такие данные получены, например, в [9]. Подчеркнем, что для качественного анализа причин потери устойчивости вполне достаточно грубых зависимостей (2.4), так как при их использовании, согласно (2.1), продольная сила P , отнесенная к $3\pi a_0^2 V_{\tau_0^\circ}/L$, равна $\ln E$: случаю $E > 1$ отвечает растягивающая сила $P > 0$ (волокна), случаю $E < 1$ — сжимающая сила, $P < 0$.

Полагая $H(s, t) = \exp(\lambda t) F(s)$ (λ — собственное значение, $F(s)$ — собственная функция), получаем с помощью (2.2) и (2.4) характеристическое уравнение

$$\frac{d^2}{ds^2} \left\{ F \ln E - \frac{1}{4L_*^2} \left[E^{-2s} \left(\lambda \frac{d^2 F}{ds^2} + E^s \frac{d^3 F}{ds^3} - \frac{E^s \ln E}{2} \frac{d^2 F}{ds^2} \right) \right] \right\} = 0 \quad (2.5)$$

Используемые квазидномерные асимптотические уравнения могут быть получены путем осреднения трехмерных уравнений Навье — Стокса по сечению струи [10]. Поэтому решение квазидномерных уравнений, описывающее течение в струе, должно срачиваться с решением уравнений Навье — Стокса вблизи среза насадка и поверхности пластины, где уравнения (2.1), вообще говоря, неприменимы. Граничные условия для уравнений Навье — Стокса на срезе насадка и поверхности пластины (а также на боковой поверхности струи) общеизвестны и в принципе полностью определяют совместно с упомянутыми выше условиями срачивания решение задачи в целом. Заметим, однако, что усложнения, связанно-

го с использованием уравнений Навье — Стокса у концов струи, можно избежать, оставаясь в рамках квазиодномерного анализа. Три из пяти необходимых для (2.5) условий очевидны: 1) отсутствие смещения оси струи и 2) плавное сопряжение касательной к оси струи с насадком при $s=0$; 3) отсутствие смещения оси струи при $s=1$.

По аналогии с задачей Эйлера об устойчивости тонких упругих стержней [5] можно предположить, что конкретным видом двух недостающих граничных условий определяется лишь значение числового множителя в выражении для критического расстояния от насадка до пластины L_1 , в то время как на саму по себе возможность неустойчивости, а также на качественный характер зависимости L_1 от параметра задачи E вид дополнительных граничных условий не влияет. Это подтверждается далее расчетом.

Недостающих два граничных условия поставим для угловой скорости Ω жидкого сечения струи и (или) момента внутренних напряжений M в сечении струи [6, 7]; при плоском изгибе необходимо рассматривать только их проекции на бинормаль к оси струи

$$\Omega_b = \frac{\partial V_n}{\partial s} + kV_{\tau}^{\circ}$$

$$M_b = 3\mu \frac{\pi(a^{\circ})^4}{4} \left[\frac{\partial^2 V_n}{\partial s^2} + V_{\tau}^{\circ} \frac{\partial k}{\partial s} - \frac{k}{2} \frac{dV_{\tau}^{\circ}}{ds} \right] \quad (2.6)$$

Соотношения (2.6) записаны в размерном виде для малых изгибных возмущений.

Вдобавок к поставленным трем граничным условиям введем два типа дополнительных условий: 1) момент внутренних напряжений $M_b=0$ при $s=0$ и 1 или 2) при $s=0$ отсутствует вращение жидкого сечения на срезе насадка $\Omega_b=0$ (при изгибе струи появляется, вообще говоря, угловая скорость жидкого сечения, направленная по бинормали к оси, $\Omega_b \neq 0$), а при $s=1$ $M_b=0$. Таким образом, с учетом (2.6) будем искать решение уравнения (2.5) при следующих граничных условиях:

$$s=0, \quad F=0, \quad \frac{dF}{ds} = 0, \quad \lambda \frac{d^2 F}{ds^2} + E^s \frac{d^3 F}{ds^3} - \frac{E^s \ln E}{2} \frac{d^2 F}{ds^2} = 0$$

$$s=1, \quad F=0, \quad \lambda \frac{d^2 F}{ds^2} + E^s \frac{d^3 F}{ds^3} - \frac{E^s \ln E}{2} \frac{d^2 F}{ds^2} = 0 \quad (2.7)$$

или

$$s=0, \quad F=0, \quad \frac{dF}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 F}{ds^2} = 0$$

$$s=1, \quad F=0, \quad \lambda \frac{d^2 F}{ds^2} + E^s \frac{d^3 F}{ds^3} - \frac{E^s \ln E}{2} \frac{d^2 F}{ds^2} = 0 \quad (2.8)$$

3. Асимптотическое аналитическое решение. Рассмотрим задачу (2.5) и (2.7), полагая в ней $\lambda=0$, т. е. исследуя возможность аperiodической потери устойчивости. Дважды интегрируя, получаем из (2.5) с использованием (2.7)

$$\frac{d^3 F}{ds^3} - \frac{\ln E}{2} \frac{d^2 F}{ds^2} - (4L_*^2 E^s \ln E) F = 0 \quad (3.1)$$

Рассмотрим случай, когда

$$E=1+\alpha, \quad |\alpha| \ll 1 \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и пренебрегая малыми высших порядков по α , получаем линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэф-

эффициентами

$$\frac{d^3 F}{ds^3} - \frac{\alpha}{2} \frac{d^2 F}{ds^2} - 4L_*^2 \alpha F = 0 \quad (3.3)$$

Отыскивая его частные решения в виде $F = \text{const} \cdot \exp(ms)$, приходим к кубическому уравнению

$$m^3 - \alpha m^2 / 2 - 4L_*^2 \alpha = 0$$

Используя формулы Кардано и пренебрегая при этом малыми высших порядков по α , получаем его решения в виде

$$m_1 = U, \quad m_2 = U \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad m_3 = U \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ U = \sqrt[3]{4L_*^2 \alpha} \quad (3.4)$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.3) с учетом (3.4) приобретает вид

$$F(s) = C_1 \exp(Us) + \exp\left(-\frac{Us}{2}\right) \left[C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} Us\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} Us\right) \right] \quad (3.5)$$

Для определения постоянных C_i используем три оставшихся граничных условия из (2.7) (первое, второе и четвертое). Следовательно, с использованием (3.5) находим условие нетривиальности решения получающейся линейной системы трех уравнений относительно C_1 , C_2 и C_3

$$\exp\left(\frac{3}{2} U\right) = \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} U\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} U\right) \quad (3.6)$$

Левая и правая части уравнения (3.6) как функции U показаны на фиг. 2 (кривые 1 и 2 соответственно). Видно, что при $U > 0$ удовлетворить (3.6) невозможно. Это в силу выражения для U в (3.4) означает, что нетривиальных положений «равновесия» (с изогнутой осью) в случае растяжения струи ($E > 1$, $\alpha > 0$; волокно) не может быть вообще. Решение уравнения (3.6) $U = 0$ с учетом (3.5) и (2.7) дает тривиальную собственную функцию $F = 0$. В противоположность этому в случае сдавливания струи при натекании на пластину, когда $E < 1$, $\alpha < 0$ и $U < 0$, решения уравнения (3.6), ведущие к нетривиальным собственным функциям, имеются. Следовательно, в этом случае имеются нетривиальные формы «равновесия» оси струи (с изгибом), и происходит аperiodическая потеря устойчивости (при $\lambda = 0$). Искомое решение уравнения (3.6) $U = U_* < 0$ отвечает наименьшему по модулю корню, так как неустойчивость возникает при наименьшем из возможных расстояний от насадка до пластины. Соответственно из (3.6) получаем $U = U_* = -4,233$; собственная функция, отвечающая этому значению U , имеет вид

$$\frac{F(s)}{C_1} = \exp(U_* s) - \exp\left(-\frac{U_* s}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} U_* s\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} U_* s\right) \right] \quad (3.7)$$

и показана на фиг. 3 кривой 1 ($F_N = F/F_{\max}$).

С помощью (3.2) и (3.4) находим величину L_* , отвечающую аperiodической потере устойчивости

$$L_{*1} = \frac{L_1}{a_0} = \sqrt[3]{\frac{U_*^3}{4(E-1)}} = \frac{4,355}{\sqrt{1-E}} \quad (3.8)$$

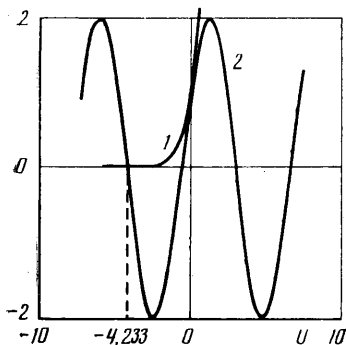
Если при заданном значении E , определяемом условиями эксперимента, расстояние от насадка до пластины превзойдет величину, предсказы-

ваемую (3.8), то произойдет по крайней мере аperiodическая потеря устойчивости — выпучивание жидкой струи или нити. Вопрос о наличии других форм потери устойчивости, когда λ — комплексное число с положительной действительной частью, решается далее с помощью численного анализа.

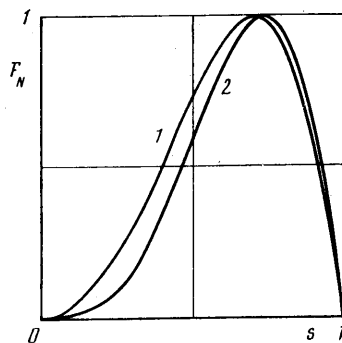
4. Численное решение. Рассмотрим прежде всего задачу (2.5), (2.8), считая $0 < E < 1$ (в отличие от разд. 3 E не обязательно близко к единице). Проинтегрировав уравнение (2.5) дважды с учетом граничных условий (2.8), приходим к уравнению

$$\frac{d^3 F}{ds^3} + \left(\lambda E^{-s} - \frac{1}{2} \ln E \right) \frac{d^2 F}{ds^2} - (4L_*^2 E^s \ln E) F = \frac{d^3 F(0)}{ds^3} (1-s) E^s \quad (4.1)$$

Пользуясь тем, что собственная функция F определена с точностью до произвольного множителя C_1 ($F(s) = C_1 \psi(s)$), можно без ограничения



Фиг. 2



Фиг. 3

общности положить $d^3 F(0)/ds^3 = 1$ (случай $d^3 F(0)/ds^3 = 0$ исключен, так как он приводит к тривиальному решению $F=0$). В результате с учетом (2.8) получаем из (4.1) следующую задачу:

$$\frac{d^3 F}{ds^3} + \left(\lambda E^{-s} - \frac{1}{2} \ln E \right) \frac{d^2 F}{ds^2} - (4L_*^2 E^s \ln E) F = (1-s) E^s \quad (4.2)$$

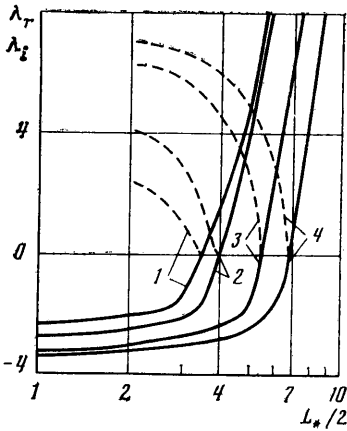
$$s=0, \quad F = \frac{dF}{ds} = \frac{d^2 F}{ds^2} = 0 \quad (4.3)$$

$$s=1, \quad F=0 \quad (4.4)$$

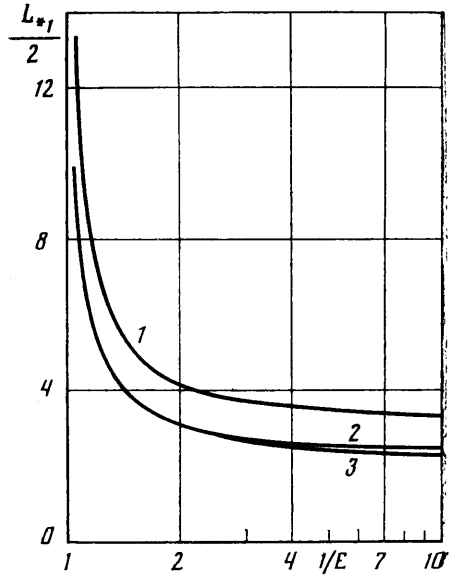
Отметим, что уравнение (4.2) при $s=1$ с учетом условия $F(1)=0$ ведет к автоматическому выполнению второго условия (2.8) при $s=1$.

При фиксированном значении E зададим определенное значение L_* . Задав, кроме того, какое-либо значение λ , решаем задачу Коши (4.2) и (4.3) и определяем функцию $F(s)$. Если заданное значение λ совпадает с собственным числом задачи, то решение задачи Коши (4.2), (4.3) удовлетворяет также условию (4.4). Задача Коши (4.2), (4.3) решалась методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования [11]. Собственное значение λ , обеспечивающее выполнение условия $F(1, \lambda) = 0$, находилось в комплексной плоскости итерациями с использованием как метода Ньютона, так и метода парабол. Последний оказался предпочтительней, так как давал возможность использовать более грубое начальное приближение для λ . Практически сходимость достигалась после 3–5 итераций.

На фиг. 4 показаны соответственно действительная λ_r (сплошные кривые) и мнимая λ_i (штриховые кривые) части собственного числа λ в зависимости от L_* при нескольких значениях E : 1 — 0,2; 2 — 0,4; 3 — 0,7;



Фиг. 4



Фиг. 5

$4 - 0,8$. Видно, что при значениях L_* , меньших некоторой критической величины L_{*1} , действительная часть $\lambda_r < 0$ и струя устойчива. С другой стороны, при $L_* > L_{*1}$ действительная часть $\lambda_r > 0$, $\lambda_i = 0$ и струя неустойчива — происходит выпучивание. Критическое значение L_{*1} для любого фиксированного значения E определяется тем собственным числом, действительная часть которого первой достигает нуля с увеличением L_* . Это соответствует точке потери устойчивости, определяемой в эксперименте при постепенном увеличении расстояния от насадка до пластины.

Таким образом, численное решение в соответствии с экспериментальными данными [3] и результатами разд. 3 показывает, что устойчивость теряется при увеличении расстояния от насадка до пластины до значения $L_1 = L_{*1} a_0$. Зависимость L_{*1} от $1/E$ ($\sim V_{\tau_0}^{\circ}$), иллюстрирующая изменение критической длины, при которой теряется устойчивость, с увеличением скорости истечения струи из насадка, представлена на фиг. 5 кривой 1. Отметим, что кривая 1 на фиг. 5 качественно подобна экспериментально наблюдаемой зависимости L_{*1} от скорости истечения струи (см. фиг. 10, а в [3]).

Собственная функция, полученная в расчете при $E = 0,8$, $L_* = L_{*1} = 13,8$, представлена на фиг. 3 кривой 2 (она отнесена к максимальному значению).

Было проведено также численное решение задачи (2.5), (2.7), исследованной аналитически в разд. 3 для значений E , близких к единице. После двукратного интегрирования (2.5) с учетом (2.7) приходим к задаче

$$\frac{d^3 F}{ds^3} + \left(\lambda E^{-s} - \frac{1}{2} \ln E \right) \frac{d^2 F}{ds^2} - (4L_*^2 E^s \ln E) F = 0 \quad (4.5)$$

$$s=0, \quad F = \frac{dF}{ds} = 0 \quad (4.6)$$

$$s=1, \quad F=0 \quad (4.7)$$

Поскольку собственная функция F определена с точностью до произвольного множителя, без ограничения общности при отыскании нетривиального решения можно полагать $d^2 F(0)/ds^2 = 1$. С учетом этого, а также

условий (4.6) решение находилось следующим образом. Сначала при фиксированных значениях E и L_* , задавая λ , уравнение (4.5) интегрировалось методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага. Затем итерациями по λ достигалось выполнение условия (4.7).

Полученная в данном случае при численном решении зависимость L_{*1} от $1/E$ представлена на фиг. 5 кривой 2. Здесь же кривой 3, практически сливающейся с кривой 2 при приближении E к единице, показан асимптотический результат (3.8). Сравнение с численным решением показывает, что точность формулы (3.8) достаточно высока даже при $E=0,1$, т. е. далеко за пределами применимости асимптотики. Собственная функция, определенная при численном решении задачи (2.5) и (2.7) при $E=0,8$, $L_*=L_{*1}=9,74$ и отнесенная к значению в максимуме, практически совпадает с кривой 1 на фиг. 3. Это еще раз показывает, что асимптотическое решение (3.7) дает удовлетворительную точность не только при $E \rightarrow 1$, но и при значениях E , заметно меньших единицы.

Как и при численном решении задачи (2.5), (2.8), потере устойчивости при $L_*=L_{*1}$ для любых значений $0 < E < 1$ отвечает собственное число $\lambda=0$.

Обсудим причины существования критической величины расстояния от среза насадка до плоскости L_1 , ниже которой струя или нить устойчивы. В соответствии с (2.1), (2.2) движению жидкости в струе отвечает баланс моментов сил

$$M_1 = 3\mu \int_0^\infty \frac{dV_r^\circ}{ds} H, \quad M_2 = -3\mu I \left(V_r^\circ \frac{\partial k}{\partial s} - \frac{1}{2} k \frac{dV_r^\circ}{ds} \right)$$

$$M_3 = -3\mu I \frac{\partial^3 H}{\partial s^2 \partial t}$$

Здесь все соотношения записаны в размерном виде для малых изгибных возмущений; M_1 — изгибающий момент, обусловленный продольным сжатием; M_2 и M_3 — моменты вязких напряжений, обусловленные движением жидкой частицы вдоль искривленной траектории и изменением кривизны траектории со временем. С уменьшением расстояния от среза насадка до плоскости момент M_2 резко увеличивается, так как его величина определяется старшей производной $\partial k / \partial s = \partial^2 H / \partial s^2$. Поэтому при достаточно малых расстояниях L характеристическое уравнение вырождается, и возможность существования нетривиальных решений $F \neq 0$ исчезает.

Из аналитического и численного решений задач, поставленных в разд. 2, следует отсутствие в случае $0 < E < 1$ мнимых собственных значений λ при $L_*=L_{*1}$ (оказалось, что при этом $\lambda=0$), т. е. имеет место аperiодическая неустойчивость. В экспериментах [3], однако, струя укладывается на пластину в виде складок с определенной частотой. Это, вообще говоря, указывает на наличие комплексных собственных значений λ . Возможно, что автоколебания струи после потери устойчивости обусловлены нелинейными эффектами.

Кроме того, для вертикальных струй и нитей представляет интерес влияние на решения линейной задачи силы тяжести, которая также может привести к появлению комплексных собственных значений λ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. I. Instability of jets, threads, and sheets of viscous fluid // Proc. 12th. Intern. Congr. Appl. Mech., Stanford, 1968. Stanford: Springer, 1969. P. 382–388.
2. Taylor G. I. Electrically driven jets // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 313. № 1515. P. 453–475.

3. *Cruickshank J. O., Munson B. R.* Viscous fluid buckling of plane and axisymmetric jets // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 113. P. 221–239.
4. *Енгов В. М., Ярин А. Л.* Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей // *Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа.* М.: ВИНТИ. 1984. Т. 18. С. 112–197.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
6. *Енгов В. М., Ярин А. Л.* Уравнения динамики струи капельной жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1980, № 5. С. 11–18.
7. *Entov V. M., Yarin A. L.* The dynamics of thin liquid jets in air // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 140. P. 91–111.
8. *Matovich M. A., Pearson J. R. A.* Spinning a molten threadline. Steady-state isothermal viscous flows // *Industr. and Engng Chem. Fundam.* 1969. V. 8. № 3. P. 512–520.
9. *Cruickshank J. O., Munson B. R.* The viscous-gravity jet in stagnation flow // *Trans. ASME. J. Fluids Eng.* 1982. V. 104. № 3. P. 360–362.
10. *Ярин А. Л.* Об уравнениях динамики струй капельной жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1983. № 1. С. 161–163.
11. *Форсайт Д., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений М.: Мир, 1980. 279 с.

София
Москва

Поступила в редакцию
2.I.1986