МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1987

УДК 532.517.4

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

ТЕОДОРОВИЧ Э. В.

Термин «турбулентная», или «вихревая», вязкость не имеет однозначного смысла. Наиболее часто это понятие используется в полуэмпирических теориях турбулентности при замыкании цепочки уравнений для статистических моментов. Простейшим примером подобного замыкания является соотношение, связывающее тензор напряжений Рейнольдса и градиент скорости среднего течения (гипотеза Буссинеска) [1]. В аналитических моделях турбулентности это понятие применяется для параметризации влияния на пульсации данного масштаба пульсаций более мелких масштабов при описании переноса энергии вдоль спектра волновых чисел (теория Гайзенберга) [1]. В задачах численного моделирования турбулентных течений понятие турбулентной вязкости используется для описания осредненного влияния на рассматриваемые динамическим образом движения с масштабом $L>L_0$ со стороны мелкомасштабных движений с $L<L_0$, которые не могут быть разрешены вследствие конечных размеров ячейки L_0 в методе конечных разностей («подсеточная вязкость») [2]. Различные способы определения понятия «турбулентная вязкость» приводят к различным уравнениям и представлениям для этой величины [3]. Из сказанного вытекает необходимость предварительно определять в каждом случае, что подразумевается под этим термином.

В рамках широко распространенной статистической модели турбулентности, когда источником турбулентной энергии является внешняя случайная сила типа гауссова «белого шума», проводится вычисление эффективной вязкости, характеризующей отклик турбулизованной жидкости на внешнее возмущение. Для вычисления эффективной вязкости используется метод ренормализационной группы, дающей возможность исходя из низшего приближения теории возмущений найти сумму некоторой бесконечной подпоследовательности ряда теории возмущений. Полученное выражение для эффективной вязкости в инерционном интервале совпадает с колмогоровским степенным законом, а в области неполной автомодельности дает зависимость, отличную от степенной. Основной результат работы заключается в иллюстрации возможности описания характерных для развитой гидродинамической турбулентности многомодовых каскадных процессов в рамках теории возмущений, улучшенной с помощью метода ренормализационной группы.

1. Исходные уравнения. Рассмотрим в пространстве d-измерений несжимаемую жидкость, находящуюся в поле внешней случайной силы типа гауссова «белого шума». Характеристики гидродинамического поля — давление p и компоненты скорости v_i, будем задавать $(d+1)$-компонентным вектором ψ_α согласно определению

$$\psi_\alpha=\{\psi_0, \psi_i\}\equiv\{p, v_i\}$$

Здесь греческие индексы пробегают значения от 0 до d, а латинские — от 1 до d.

В дальнейшем совокупность пространственно-временных координат будем обозначать цифрами, например $1=\{t_1, \mathbf{r}_1\}$, по повторяющимся индексам будет подразумеваться суммирование, а по повторяющимся координатам — интегрирование.

Систему уравнений Навье — Стокса запишем в виде [4]

$$-L^{(0)}_{\alpha\beta}(12)\psi_\beta(2)-\frac{1}{2}V_{\alpha\beta\gamma}(123)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3)+X_\alpha(1)+f_\alpha(1)=0 \qquad (1.1)$$

$$L_{\alpha\beta}^{(0)}(12)=\begin{bmatrix} 0 & \partial_j^{(1)} \\ \partial_i^{(1)} & (\partial_t^{(1)}-\nu_0\Delta^{(1)})\delta_{ij}\end{bmatrix}\delta(1-2) \qquad (1.2)$$

$$V_{ijk}(123)=-[\delta_{ij}\partial_k^{(3)}+\delta_{ik}\partial_j^{(2)}]\delta(1-2)\delta(1-3) \qquad (1.3)$$

Здесь $L_{\alpha\beta}^{(0)}$ (12)-линейная часть оператора Навье — Стокса, $V_{ijk}(123)$ — отличные от нуля компоненты тензора $V_{\alpha\beta\gamma}(123)$, $X_\alpha(1)$ — задаваемые статистическим образом плотности случайных источников массы и силы, $f_\alpha(1)$ — плотности регулярных источников. В дальнейшем принимается $X_0=0$, а корреляционная функция внешних случайных сил представляется в виде

$$B_{ij}(12)=\langle X_i(1)X_j(2)\rangle=\delta_{ij}B(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(t_1-t_2) \qquad (1.4)$$

Основными объектами рассмотрения являются функция Грина $G_{\alpha\beta}(12)$, описывающая усредненный линейный отклик поля $\psi_\alpha(1)$ на внешнее воздействие $f_\beta(2)$, и двухточечная парная корреляционная функция $C_{\alpha\beta}(12)$.

$$G_{\alpha\beta}(12)=\delta\langle\psi_\alpha(1)\rangle/\delta f_\beta(2) \qquad (1.5)$$

$$C_{\alpha\beta}(12)=\langle\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\rangle. \qquad (1.6)$$

(в формулах (1.4)—(1.6) угловые скобки обозначают среднее по ансамблю реализаций).

Функции (1.5), (1.6) удовлетворяют системе уравнений Дайсона, которые могут быть получены с помощью суммирования диаграмм теории возмущений [1, 5] или исходя из характеристического функционала [4]

$$L_{\alpha\beta}^{(0)}(12)G_{\beta\gamma}(23)-\Sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(12)G_{\beta\gamma}(23)=\delta_{\alpha\gamma}\delta(1-3) \qquad (1.7)$$

$$L_{\alpha\beta}^{0)}(12)C_{\beta\gamma}(23)-\Sigma_{\alpha\beta}^{1)}(12)C_{\beta\gamma}(23)-\Sigma_{\alpha\beta}(12)G_{\gamma\beta}(32)-B_{\alpha\beta}(12)G_{\gamma\beta}(32)=0 \qquad (1.8)$$

Здесь $\Sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$, $\Sigma_{\alpha\beta}^{(2)}$ — интегральные операторы, отличные от нуля только при $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$.

Введем обратную функцию Грина $G_{\alpha\beta}^{-1}(12)$, определенную соотношением $G_{\alpha\beta}(12)G_{\beta\gamma}^{-1}(23)=\delta_{\alpha\gamma}\delta(1-3)$. Умножив уравнение (1.7) справа на G^{-1}, получим

$$G_{\alpha\beta}^{-1}(12)=L_{\alpha\beta}^{(0)}(12)-\Sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(12) \qquad (1.9)$$

Воспользовавшись (1.2) при $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$, найдем

$$G_{ij}^{-1}(12)=[\partial_t^{(1)}-\nu_0\Delta^{(1)}]\delta_{ij}\delta(1-2)-\Sigma_{ij}^{(1)}(12)=\delta_{ij}\partial_t^{(1)}\delta(1-2)-\Sigma_{ij}{}^*(12) \qquad (1.10)$$

Из (1.10) следует, что учет нелинейных межмодовых связей в функции отклика G сводится к замене молекулярной вязкости в уравнении Навье — Стокса $\Sigma_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}\nu_0\Delta^{(1)}\delta(1-2)$ на эффективную вязкость

$$\Sigma_{ij}{}^*(12)=\Sigma_{ij}^{(0)}(12)+\Sigma_{ij}^{(1)}(12) \qquad (1.11)$$

описывающую перенос импульса как молекулярным, так и турбулентным вихревым движением [5, 6]. В дальнейшем под термином «турбулентная вязкость» будет подразумеваться добавка к молекулярной вязкости в общем выражении для эффективной вязкости (1.11).

Аналогичным образом умножив (1.8) слева на G и воспользовавшись (1.9), найдем

$$C_{\alpha\beta}(12)=G_{\alpha i}(11')G_{\beta j}(22')[B_{ij}(1'2')+\Sigma_{ij}^{(2)}(1'2')]=$$
$$=G_{\alpha i}(11')G_{\beta j}(22')B_{ij}{}^*(1'2') \qquad (1.12)$$

Из (1.12) видно, что другим следствием учета нелинейности является замена корреляционной функции внешних случайных сил $B_{ij}(12)$ на корреляционную функцию эффективных случайных сил $B_{ij}^*(12)$, описывающих подкачку энергии к данной моде как внешними силами, так и за счет нелинейных взаимодействий с другими модами [5].

В приближении прямых взаимодействий операторы $\Sigma^{(1)}$ и $\Sigma^{(2)}$ выражаются через G и C согласно формулам

$$\Sigma_{ij}^{(1)}(12) = V_{ilk}(134)G_{ll'}(33')C_{kk'}(44')V_{l'k'j}(3'4'2) \tag{1.13}$$

$$\Sigma_{ij}^{(2)}(12) = \frac{1}{2}V_{ilk}(134)C_{ll'}(33')C_{kk'}(44')V_{jl'k'}(23'4')$$

В результате имеем замкнутую систему уравнений для определения функции Грина G и функции парной корреляции C [17] или для связанных с ними соотношениями (1.10) и (1.12) оператора эффективной вязкости Σ^* и корреляционной функции эффективных случайных сил B^*.

Обычно при вычислении эффективной вязкости принято задавать связанный с корреляционной функцией C спектр пульсаций скорости и выражать вязкость через характеристики спектра (см., например, [8]). Однако корреляционная функция пульсаций скорости сама зависит от эффективной вязкости, поэтому далее будем задавать корреляционную функцию эффективных случайных сил и через нее выражать эффективную вязкость.

2. Уравнения для эффективной вязкости. В случае отсутствия регулярных внешних сил задаваемая уравнениями (1.1)—(1.4) система будет стационарной и однородной в пространстве, что дает возможность выполнить преобразование Фурье и дальнейшие расчеты проводить в пространстве фурье-образов.

Введем коэффициент эффективной вязкости $\nu_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega)$ с помощью соотношения

$$\Sigma_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega) = -k^2\nu_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega) \tag{2.1}$$

Согласно (1.11) найдем

$$\nu_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega) = \nu_0\delta_{ij} - \Sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)/k^2 \tag{2.2}$$

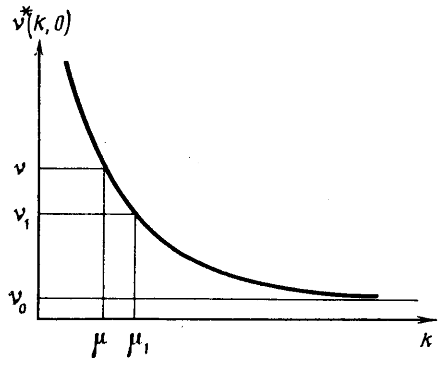
При заданной корреляционной функции эффективных случайных сил $B_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega)$ формула (2.2) представляет собой уравнение для определения $\nu_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega)$, поскольку оператор $\Sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ в соответствии с (1.13) является функционалом от функции Грина $G_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, для которой согласно (1.11) имеем

$$G_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = [-i\omega\delta_{ij} + k^2\nu_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega)]^{-1} \tag{2.3}$$

Нелинейное интегральное уравнение (2.2) можно решать методом итераций, используя в качестве нулевого приближения коэффициент молекулярной вязкости. Подобная процедура будет соответствовать представлению коэффициента эффективной вязкости в виде функционального ряда по числу Рейнольдса R_0, которое в случае развитой турбулентности является очень большим. Однако вследствие нелинейных межмодовых связей молекулярная вязкость заменяется на значительно превышающую ее эффективную вязкость. Поэтому можно перестроить ряд теории возмущений таким образом, чтобы фактическим параметром разложения оказалось число Рейнольдса, построенное по эффективной вязкости [5], которое будет значительно меньше числа Рейнольдса R_0. Для перестройки ряда теории возмущений в уравнении (2.2) заменим коэффициент молекулярной вязкости ν_0 на некоторое перенормированное значение $\nu = \nu_0 Z_\nu$, где Z_ν — константа перенормировки коэффициента вязкости. При этом необходимо также к оператору $\Sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ добавить соответствующий контрчлен, т. е. осуществить замену $\Sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ на ренормированный оператор Σ_{ij}^R согласно соотношению

$$\Sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{k},\omega) \to \Sigma_{ij}^{R}(\mathbf{k},\omega) = \Sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{k},\omega) - (1-Z_\nu)\nu_0 k^2 \delta_{ij}$$

При построении перенормированной теории возмущений параметром разложения будет ренормированное число Рейнольдса $R=R_0/Z_\nu$. Коэффициент перенормировки Z_ν определим из требования, чтобы в выбранной «точке нормировки» $\mathbf{k}=\boldsymbol{\mu}$, $\omega=\Omega$ коэффициент эффективной вязкости совпадал с перенормированным коэффициентом вязкости (см. фигуру)



$$\nu_{ij}^*(\mathbf{k},\omega)\,|_{\mathbf{k}=\boldsymbol{\mu},\ \omega=\Omega} = \nu\delta_{ij}$$

(в дальнейшем положим $\Omega=0$).

Отметим, что перенормировка коэффициента вязкости не означает феноменологического учета переноса импульса турбулентными пульсациями скорости, как это имеет место в полуэмпирических теориях замыкания, а представляет собой некоторый способ перестройки теории ряда возмущений.

3. Использование ренормгруппового подхода. Коэффициент эффективной вязкости является функцией исходных параметров задачи

$$\nu_{ij}^* = \nu_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega, \bar{\varepsilon}, k_0, \nu_0) \tag{3.1}$$

Здесь $\bar{\varepsilon}$ — некоторая константа, связанная с амплитудой внешних случайных сил, определяющая скорость диссипации энергии, k_0^{-1} — характерная длина корреляции этих сил, играющая роль внешнего масштаба турбулентности.

При вычислении эффективной вязкости на основе перенормированной теории возмущений будем иметь

$$\nu_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega, \bar{\varepsilon}, k_0, \nu_0) = \nu_{ij}^{*R}(\mathbf{k}, \omega, \bar{\varepsilon}, k_0, \nu, \boldsymbol{\mu}) \tag{3.2}$$

Из соображений размерности и при использовании условия изотропности рассматриваемой системы можно принять

$$\nu_{ij}^{*R}(\mathbf{k}, \omega, \bar{\varepsilon}, k_0, \nu, \boldsymbol{\mu}) = \nu_0\delta_{ij} f\left(\frac{k}{\mu}, \frac{\omega}{\nu_0\mu^2}, \frac{k_0}{\mu}, \frac{k_d}{\mu}, \frac{\nu}{\nu_0}\right) \tag{3.3}$$

где $k_d = \bar{\varepsilon}^{1/4}\nu^{-3/4}$ — обратный внутренний масштаб турбулентности.

Если интересоваться поведением вязкости в области волновых чисел, соответствующих интервалу равновесия ($k_0/k \to 0$), и статическим пределом $\omega=0$, то, вводя обозначения

$$g = \frac{\nu}{\nu_0} = Z_\nu, \quad f\left(\frac{k}{\mu}, 0, 0, \frac{k_d}{\mu}, \frac{\nu}{\nu_0}\right) = F\left(\frac{k^2}{\mu^2}, \frac{k_d^2}{\mu^2}, g\right)$$

найдем

$$\nu_{ij}^*(\mathbf{k}, 0, \bar{\varepsilon}, 0, \nu_0) = \nu_0\delta_{ij} F\left(\frac{k^2}{\mu^2}, \frac{k_d^2}{\mu^2}, g\right) \tag{3.4}$$

при этом в соответствии с условием нормировки (2.6)

$$F(1, y, g) = g \tag{3.5}$$

Наличие произвола в выборе масштаба μ при соответствующем выборе значения перенормированной вязкости ν, т. е. независимость эффективной вязкости от параметра μ, означает наличие группы симметрии, называемой ренормгруппой (РГ). Эта симметрия связана с инвариантностью уравнений Дайсона для гидродинамической системы относительно мультипликативных преобразований функции Грина G и функции парной корреляции скорости C [9]. Требование РГ-инвариантности формулируется в виде

$$F\left(\frac{k^2}{\mu^2},\frac{k_d^2}{\mu^2},g\right)=F\left(\frac{k^2}{\mu_1^2},\frac{k_d^2}{\mu_1^2},g_1\right) \tag{3.6}$$

Положив в формуле (3.6) $k=\mu_1$ и воспользовавшись условием (3.5), найдем

$$g_1=F\left(\frac{\mu_1^2}{\mu^2},\frac{k_d^2}{\mu^2},g\right) \tag{3.7}$$

Вводя обозначения $x=k^2/\mu^2$, $y=k_d^2/\mu^2$, $t=\mu_1^2/\mu^2$ и используя (3.6), (3.7), получим функциональное уравнение РГ [10]

$$F(x,y,g)=F\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},F(t,y,g)\right) \tag{3.8}$$

Дифференцируя (3.8) по t и затем полагая $t=1$, приходим к дифференциальному уравнению РГ

$$\left\{-x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}+\beta(y,g)\frac{\partial}{\partial g}\right\}F(x,y,g)=0 \tag{3.9}$$

$$\beta(y,g)=\left.\frac{\partial F(x,y,g)}{\partial x}\right|_{x=1} \tag{3.10}$$

Наличие РГ-инвариантности дает возможность улучшить формальную теорию возмущений, поскольку свойством РГ-инвариантности обладает только весь ряд, а не отдельные его члены. Улучшение формальной теории возмущений с помощью метода РГ заключается в вычислении функции $\beta(y, g)$ в низшем приближении перенормированной теории возмущений с последующим решением дифференциального уравнения РГ (3.9) [10, 11]. Подобная процедура соответствует суммированию некоторой бесконечной подпоследовательности ряда теории возмущений и дает возможность найти решения в области волновых чисел, где формальная теория возмущений неприменима (ведет к сингулярностям).

4. Вычисление эффективной вязкости. В низшем приближении перенормированной теории возмущений согласно (1.13) имеем

$$\Sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{k},\omega)=V_{ikl}(\mathbf{k})\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{d\omega'}{2\pi}G_{kk'}^{(0)}(\mathbf{q},\omega')C_{ll'}^{(0)}(\mathbf{k}-\mathbf{q},\omega-\omega')V_{k'l'j}(\mathbf{q}) \tag{4.1}$$

$$G_{ij}^{(0)}(\mathbf{k},\omega)=P_{ij}(\mathbf{k})[-i\omega+\nu k^2]^{-1}$$

$$C_{ij}^{(0)}(\mathbf{k},\omega)=P_{ij}(\mathbf{k})B^*(\mathbf{k})[\omega^2+\nu^2k^4]^{-1} \tag{4.2}$$

$$V_{ijk}(\mathbf{k})=-i[k_k\delta_{ij}+k_j\delta_{ik}]$$

Здесь $P_{ij}(\mathbf{k})=\delta_{ij}-k_ik_j/k^2$ — оператор поперечного проектирования.

Подставляя (4.2) в (4.1) и выполняя интегрирование по ω', найдем

$$\Sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{k},0)=-\frac{1}{2\nu^2}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{\lambda_{ij}(\mathbf{k},\mathbf{q})B^*(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2[(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2+q^2]} \tag{4.3}$$

$$\lambda_{ij}(\mathbf{k},\mathbf{q})=(k_l\delta_{ik}+k_k\delta_{il})P_{ll'}(\mathbf{q})P_{kk'}(\mathbf{k}-\mathbf{q})(q_{k'}\delta_{l'j}+q_j\delta_{l'k'}) \tag{4.4}$$

Исходя из (1.2), (1.7), можно показать, что пропорциональные k_i и k_j члены в $\Sigma_{ij}^{(1)}(k, 0)$ не дают вклада в функцию Грина и могут быть отброшены. В результате после проведения вычислений для оставшейся части

λ_{ij}' получим

$$\lambda_{ij}'(\mathbf{k},\mathbf{q})=\delta_{ij}\frac{k^2q^2-(\mathbf{kq})^2}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}-2\frac{q_iq_j(\mathbf{kq})}{q^2} \tag{4.5}$$

Проведение дальнейших расчетов требует конкретизации вида функции $B^*(\mathbf{k})$. Если потребовать, чтобы она удовлетворяла условию масштабной инвариантности, то следует положить

$$B^*(\mathbf{k})=B_0k^{-m}$$

Особо выделенным является случай $m=d$, когда константа B_0 имеет размерность скорости диссипации энергии $\bar{\varepsilon}$ и может быть отождествлена с ней с точностью до безразмерного множителя порядка единицы. Этот случай соответствует теории Колмогорова, согласно которой в интервале равновесия единственными существенными параметрами являются скорость диссипации и коэффициент молекулярной вязкости [1]. Действительно, при $m=d$ получаются колмогоровские показатели для спектра энергии [12, 13]. Однако при $m=d$ возникает расходимость интегралов в инфракрасной области. Для обрезания вклада области малых волновых чисел можно для перенормированной функции эффективных случайных сил принять

$$B^*(\mathbf{k})=B_0k^{-d}(k^2/\mu^2)^n \tag{4.6}$$

При таком выборе $B^*(\mathbf{k})$ размерность константы B_0 не меняется и вблизи точки нормировки $k=\mu$ функция (4.6) совпадает с функцией, приводящей к колмогоровскому спектру. При $n=2+\varepsilon$ $(\varepsilon\to+0)$ теория является перенормируемой, т. е. возникающая в ультрафиолетовой (мелкомасштабной) области логарифмическая расходимость интегралов для $\Sigma^{(1)}$ устраняется перенормировкой коэффициента вязкости (компенсируется вкладом контрчленов) [10].

Используя (4.3), (4.5), (4.6), найдем

$$\Sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{k},0)=-\frac{B_0}{2\nu^2(\mu^2)^{2+\varepsilon}}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^{d-2\varepsilon}}\times$$
$$\times\left[\frac{\delta_{ij}(k^2q^2-(\mathbf{kq})^2)+2q_iq_j(\mathbf{kq})}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2+q^2}-2\frac{q_iq_j(\mathbf{kq})}{q^2}\right]$$

Применяя стандартную технику вычисления фейнмановских интегралов в методе размерной регуляризации [14], получим

$$\Sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{k},0)=-\frac{B_0\delta_{ij}k^2\Gamma(-\varepsilon)}{2\nu^2\mu^4(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)}\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right)^{\varepsilon}\times$$
$$\times\int_0^1\eta^{\frac{1}{2}d-\varepsilon-1}\,d\eta\left\{\frac{d+\eta}{4}\left(\frac{1-\eta^2}{4}\right)^{\varepsilon}-\eta^{1-\varepsilon}(1-\eta)^{\varepsilon}\right\}$$

После выполнения предельного перехода $\varepsilon\to0$ с помощью соотношений $\Gamma(-\varepsilon)=$ $=-\varepsilon^{-1}+\ldots$, $(k^2/\mu^2)^{\varepsilon}=1+\varepsilon\ln(k^2/\mu^2)+\ldots$ и вычитания контрчлена, компенсирующего вклад полюсного члена $\sim\varepsilon^{-1}$, будем иметь

$$\Sigma_{ij}^R(\mathbf{k},0)=\delta_{ij}\frac{k^2A_dB_0}{\nu^2\mu^4}\ln\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right)$$
$$A_d=\frac{1}{8}\frac{d-1}{d+2}\frac{S_d}{(2\pi)^d},\qquad S_d=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \tag{4.7}$$

Здесь S_d — площадь поверхности сферы единичного радиуса в пространстве d-измерений.

В результате в низшем приближении теории возмущений для функции $F(x, y, g)$ найдем

$$F(x, y, g) \simeq g - \frac{A_d y^2}{g^2} \ln x \tag{4.8}$$

что, согласно (3.10), дает

$$\beta(y, g) = -A_d y^2/g^2 \tag{4.9}$$

Решение уравнения (3.5) при заданном $\beta(y, g)$ находится методом характеристик [10] и имеет вид

$$F(x, y, g) = \Phi\left(\frac{y}{x},\ g^3 - \frac{3}{2} A_d y^2\right) \tag{4.10}$$

Использование условия (3.5) дает возможность определить вид функции Φ в соотношении (4.10) и получить

$$F(x, y, g) = \left[g^3 + \frac{3}{2} A_d \left(\frac{y^2}{x^2} - y^2\right)\right]^{1/3} \tag{4.11}$$

Для исключения константы перенормировки g из выражения (4.11) дополнительно потребуем, чтобы в мелкомасштабной области $k \to \infty$ поправка к коэффициенту молекулярной вязкости была мала, что приводит к дополнительному асимптотическому условию

$$\lim_{x \to \infty} F(x, y, g) = 1 \tag{4.12}$$

Условие (4.12) дает возможность найти зависимость константы перенормировки g от выбора точки перенормировки μ

$$g = \left[1 + \frac{3}{2} A_d y^2\right]^{1/3} = \left[1 + \frac{3}{2} A_d B_0 \left(\frac{k_d}{\mu}\right)^4\right]^{1/3} \tag{4.13}$$

и получить

$$F(x, y, g) = \left[1 + \frac{3}{2} A_d \frac{y^2}{x^2}\right]^{1/3} \tag{4.14}$$

Возвращаясь снова к физическим переменным, для эффективной вязкости найдем

$$\nu_{ij}^*(\mathbf{k}) = \nu_0 \delta_{ij} \left[1 + \frac{3}{2} A_d k_d^4/k^4\right]^{1/3} = \delta_{ij} \left[\nu_0^3 + \frac{3}{2} A_d B_0 k^{-4}\right]^{1/3} \tag{4.15}$$

Близкое по структуре выражение для коэффициента подсеточной вязкости приводится в [15].

В инерционном интервале $k \ll k_d$ формула (4.15) переходит в формулу колмогоровской зависимости для турбулентной вязкости

$$\nu_{ij}^*(\mathbf{k}) = c \delta_{ij} B_0^{1/3} k^{-4/3}, \qquad c = \left(\frac{3}{2} A_d\right)^{1/3} \tag{4.16}$$

Константа c зависит только от размерности пространства и, в частности, $c=0{,}156$ при $d=3$. Результат (4.16) в рамках вилсоновского ренормгруппового подхода был получен недавно в [16], однако при этом использовалось ε-разложение и метод, справедливый только в инфракрасном пределе $k \to 0$.

Для двумерной турбулентности может оказаться, что в некотором интервале спектра определяющим окажется не спектральный поток энергии, а поток энстрофии от малых волновых чисел к большим [2]. В этом случае при тех же предположениях для эффективной вязкости получается

$$\nu_{ij}^*(\mathbf{k}) = \delta_{ij} [\nu_0^3 + B_{\text{ens}} A_d k^{-6}]^{1/3}$$

где B_{ens} — константа с размерностью потока энстрофии, а значение A_d определяется формулой (4.7) при $d=2$.

В заключение следует подчеркнуть, что вид корреляционной функции эффективных случайных сил $B^*(\mathbf{k})$ (формула 4.6)) не согласуется с представлением об экспоненциальном спадании спектра турбулентных пульсаций скорости в интервале диссипации. Однако $B^*(\mathbf{k})$ необходима только для определения функции $\beta(y, g)$ в дифференциальном уравнении РГ (3.9). Есть основания надеяться, что результат для $\beta(y, g)$ нечувствителен к выбору способа обрезания функции $B^*(\mathbf{k})$ в интервале диссипации. Это связано с тем, что в формировании каскадного процесса переноса энергии по спектру играют роль моды различных масштабов, при этом вклад мод разных масштабов в интегральные характеристики приблизительно одинаков, что проявляется в логарифмической расходимости интегралов [18] и соответствует функции (4.6) при $n=2$. При вычислении по теории возмущений функция $F(x, y, g)$ будет зависеть от параметра обрезания $k_{\max}$ посредством аддитивного члена вида $\ln(k^2_{\max}/\mu^2)$, не дающего вклада в функцию $\beta(y, g)$.

Результат (4.15) не связан с выбором частного значения $n=2$ в формуле (4.6), однако только в этом случае константа A_d конечна.

Основанная на методе РГ улучшенная теория возмущений соответствует учету некоторой бесконечной подпоследовательности ряда формальной теории возмущений и позволяет описывать многомодовые явления, отвечающие колмогоровскому механизму каскадной передачи энергии вдоль спектра волновых чисел, хотя имеются утверждения о невозможности описания каскадных процессов в рамках теории возмущений [17].

Автор выражает благодарность С. С. Моисееву, В. И. Татарскому и А. М. Яглому за обсуждения и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М. Наука, 1967. 720 с.
2. *Kraichnan R. H.* Eddy viscosity in two and three dimensions // J. Atmos. Sci. 1976. V. 33. № 8. P. 1521–1536.
3. *Carnevale G. F., Frederiksen J. S.* Viscosity renormalization based on direct-interaction closure // J. Fluid. Mech. 1983. V. 131. P. 289–304.
4. *Martin P. C., Siggia E. D., Rose H. A.* Statistical dynamics of classical systems // Phys. Rev. 1973. V. 8A. № 1. P. 423–437.
5. *Кузьмин Г. А., Паташинский А. З.* Гипотеза подобия и гидродинамическое описание турбулентности // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1972. Т. 62. № 3. С. 1175–1184.
6. *Edwards S. F.* The statistical dynamics of homogeneous turbulence // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. Pt 2. P. 239–273.
7. *Kraichnan R. H.* The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Pt 4. P. 497–543.
8. *McComb W. D.* Reformulation of the statistical equations for turbulent shear flow // Phys. Rev. 1982. V. 26A. № 2. P. 1078–1094.
9. *Гледзер Е. Б., Монин А. С.* Метод диаграмм в теории возмущений // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29. Вып. 3. С. 111–159.
10. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. 600 с.
11. *Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В.* Метод функций Грина в статистической механике. М.: Физматгиз, 1961. 312 с.
12. *DeDominicis C., Martin P. C.* Energy spectra of certain randomly-stirred fluids // Phys. Rev. 1979. V. 19A. № 1. P. 419–422.
13. *Аджемян Л. Ц., Васильев А. Н., Письмак Ю. М.* Ренормгрупповой подход в теории турбулентности: размерности составных операторов // Теорет. и мат. физика. 1983. Т. 57. № 2. С. 268–281.
14. *Рамон П.* Теория поля: Современный вводный курс. М.: Мир, 1984. 336 с.
15. *Yakhot V., Orszag S. A., Pelz R. B.* Remormalization group-based subgrid scale turbulence closures // Lecture Notes in Physics. N. Y.: Springer-Verlag. V. 218. P. 592–596.
16. *Yakhot V., Orszag S. A.* Renormalization-group analysis of turbulence // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. № 14. P. 1722–1724.
17. *Kraichnan R. H.* Hydrodynamic turbulence and the renormalization group // Phys. Rev. 1982. V. 25A. № 6. P. 3282–3289.
18. *Wilson K. G.* Renormalization group methods // Adv. in Math. 1975. V. 16. № 2. P. 170–186.

Москва

Поступила в редакцию 18.XI.1986