

УДК 532.516.011

МЕХАНИЧЕСКОЕ И ТЕПЛОВОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

БОРИСЕВИЧ В. Д., НАУМОЧКИН В. В., СМАКОВ Б. М.

Расчет рабочих характеристик таких ротационных машин, как дисковые турбины, большие электрические генераторы и т. п., сводится к решению классической задачи гидромеханики о ламинарном течении вязкой жидкости между двумя близко расположенными дисками, вращающимися в цилиндрическом кожухе [1]. Для несжимаемой жидкости получено большое количество аналитических и численных решений в различных постановках данной задачи (см., например, [2, 3]). При больших скоростях вращения возникает необходимость учета эффектов, связанных со сжимаемостью газа, и влияния температурных неоднородностей [4]. Возбуждение течения газа между дисками, заключенными во вращающийся цилиндр, может осуществляться как механическим способом за счет разности скоростей вращения торцов и стенки цилиндра, так и тепловым способом за счет различия их температур. Течение газа в этом случае характеризуется наличием горизонтальных пограничных слоев на верхнем и нижнем дисках и вертикального пограничного слоя на стенке цилиндра и ядра потока [5]. В [5, 6] в рамках линейной теории проведено исследование механического и теплового возбуждения сжимаемого течения в коротком цилиндре. Аналитическое и численное исследование течения вязкого сжимаемого газа около неподвижного диска во вращающемся цилиндре при изотермических границах рассмотрено в [7]. Во всех упомянутых выше работах влияние тепловой конвекции на течение газа для случаев, когда возмущения, создаваемые вращающимся диском и температурными граничными условиями, не малы, не рассматривались. Настоящая работа посвящена численному исследованию течения вязкого газа с учетом влияния нелинейных эффектов в коротком вращающемся цилиндре, вызванного тормозящим действием одного из дисков и температурными неоднородностями на дисках или боковой поверхности цилиндра.

1. Постановка задачи и метод расчета. Система уравнений, описывающая установившееся течение вязкого сжимаемого газа во вращающейся вместе с ротором цилиндрической системе координат, в общепринятых обозначениях имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \nabla(\rho V) &= 0 \\ (VV)V + 2k \times V + k \times (k \times r) &= -\frac{1}{M^2 \rho} \nabla p + \frac{E}{\rho} \left(\frac{4}{3} \Delta V + \frac{1}{3} \nabla \times (\nabla \times V) \right) \\ \rho V \nabla T &= \gamma \frac{E}{Pr} \Delta T - (\gamma - 1) \rho T \operatorname{div} V, \quad p = \rho T \\ E &= \frac{\mu}{\rho_0 \omega_0 a^2}, \quad Pr = c_p \frac{\mu}{\kappa}, \quad M = \frac{\omega_0 a}{\sqrt{RT_x}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь в уравнении энергии опущен член, отвечающий за работу сил внутреннего трения, поскольку при рассматриваемых скоростях вращения цилиндра влияние процесса вязкой диссипации энергии на изменение температуры незначительно по сравнению с переносом тепла за счет конвекции, теплопроводности и расширения — сжатия газа. Для обезразмеривания переменных использованы следующие характерные величины: a — радиус цилиндра; $\omega_0 a$ — азимутальная скорость; ρ_0 — плотность газа на стенке цилиндра; T_x — средняя температура газа; μ и κ — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности; R — универсальная газовая постоянная; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; γ — показатель

адиабаты; k — единичный вектор в направлении оси цилиндра; E , Pr , M — числа Экмана, Прандтля и изотермическое число Маха соответственно.

Граничные условия для системы уравнений (1.1) в соответствии со схемой, приведенные на фиг. 1, формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} r=0: v_r=v_\varphi=0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}=0 \\ r=1: v_r=v_\varphi=v_z=0, \quad T=T_0(z) \\ z=0: v_r=v_\varphi=v_z=0, \quad T=T_2 \\ z=\frac{H}{a}, \quad v_r=v_z=0, \quad v_\varphi=-mr, \quad T=T_1, \quad m=\frac{\omega_0-\omega_1}{\omega_0} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где H — высота цилиндра, ω_1 — угловая скорость вращения верхнего диска.

Для решения краевой задачи (1.1)–(1.2) использован метод конечных разностей. Консервативная по массе конечно-разностная схема второго порядка точности получена интегрированием уравнения неразрывности по ячейке гибридной конечно-разностной сетки. Для аппроксимации частных производных использовались центральные разности. Значения компонент скоростей и потоков рассчитывались на границах ячейки, а значения термодинамических параметров ρ и T — в ее центре. Для расчета пограничных слоев, имеющих переменную толщину порядка $(E/\rho)^{1/2}$ в окрестности торцов и порядка $E^{1/2}$ вблизи боковой поверхности, бралась неравномерная разностная сетка со сгущением узлов в районе торцов и боковой стенки цилиндра. Необходимость использования неравномерной сетки по радиусу объясняется также экспоненциальным изменением плотности газа в радиальном направлении. При расчете пограничных слоев при малых числах Экмана сильная неравномерность разностной сетки может приводить к уменьшению порядка точности аппроксимации частных производных [8]. В связи с этим было применено преобразование координаты z , подобное описанному в [7], а шаг сетки по радиусу уменьшался по направлению к стенке по закону геометрической прогрессии со знаменателем 1.2.

Конечно-разностный аналог (1.1)–(1.2) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений размерности $(5 \times i_m \times j_m)$, где i_m , j_m — число узлов разностной сетки по радиусу и высоте соответственно. Для решения этой системы уравнений применен алгоритм, основанный на одной из модификаций итерационного метода Ньютона [9]. В качестве начального приближения для итерационного процесса использованы значения параметров газа, соответствующих квазитвердому вращению. Так как граничные условия задачи при отсутствии втекающих и вытекающих из объема потоков непосредственно не определяют массу газа в системе, то в итерационный процесс введено дополнительное условие сохранения полной массы газа. Критерием окончания итерационного процесса является совпадение значений функций тока Ψ_1 и Ψ_2 , рассчитанных из соотношения $\partial \Psi_1 / \partial z = -\rho r v_r$, $\partial \Psi_2 / \partial r = \rho r v_z$.

2. Результаты расчетов. Расчеты проводились для сетки $j_m=30$, $i_m=16$ при следующих значениях безразмерных параметров:

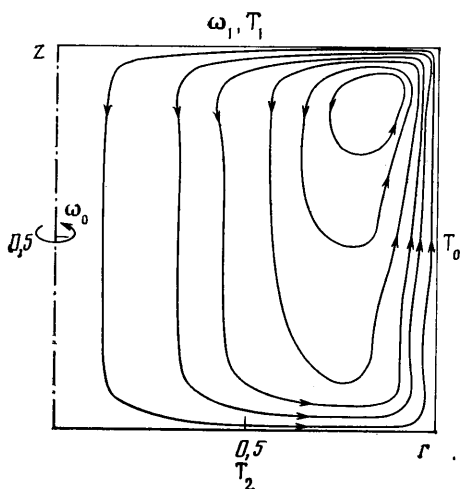
$$M=2, \quad \frac{H}{a}=1, \quad E=10^{-3}, \quad Pr=0.7, \quad \gamma=1.4$$

Механическое возбуждение течения газа происходило за счет тормозящего действия верхнего диска. Величина параметра m менялась от 0 до 1. Для тестирования разработанной методики проводился расчет поля течения, вызванного тормозящим действием неподвижного верхнего диска ($m=1$), и сравнение с результатами, полученными для этого случая при численном решении нестационарных уравнений Навье — Стокса в [7]. Различия полученных результатов не превышало 8%. Для расчета одного варианта граничных условий на ЭВМ ЕС 1060 требовалось 20 мин процессорного времени.

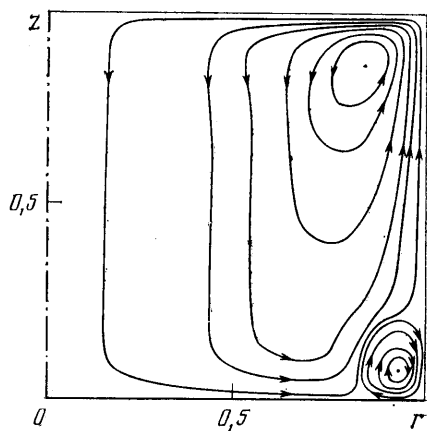
Для теплового возбуждения течения газа рассматривалось два вида граничных условий

$$T_{1,2}=1 \mp \theta, \quad \theta=\Delta T/T_\infty, \quad T_0=1 \quad (2.1)$$

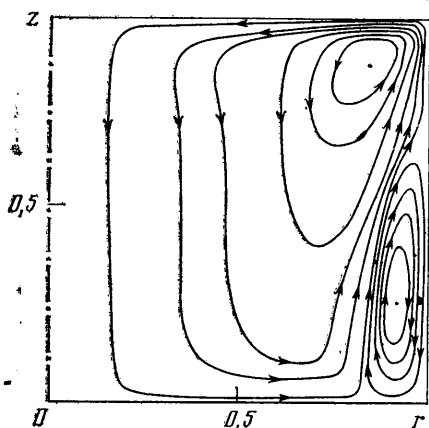
$$T_0(z)=1+\theta(1-2az/H), \quad T_1=T_0(H), \quad T_2=T_0(0) \quad (2.2)$$



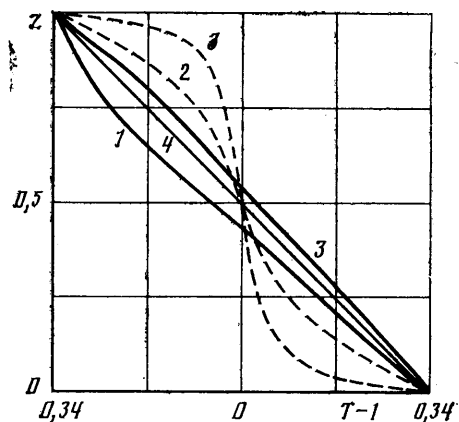
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Здесь T_0 — температура боковой поверхности цилиндра; $T_{1,2}$ — температура верхнего и нижнего торца соответственно. Для граничных условий в случае (2.1) происходит образование тепловых пограничных слоев на торцах цилиндра, толщина которых по порядку величины совпадает с толщиной газодинамических пограничных слоев. Нагрев одного из торцов приводит к уменьшению плотности газа вблизи него и, следовательно, к возникновению радиального течения по направлению к оси, так же как в случае, когда диск вращается медленнее, чем основной поток. И наоборот, охлаждение торца вызывает радиальное течение газа к периферии аналогично случаю, когда диск вращается быстрее, чем основной поток.

Граничные условия для случая (2.2) также приводят к образованию циркуляционного течения за счет тепловой конвекции. Однако в отличие от случая (2.1) при этом нет ярко выраженного теплового пограничного слоя и радиальное течение газа распространяется по всей высоте цилиндра. Случай, когда оба механизма возбуждения циркуляционного течения действуют в одном направлении, характеризуется лишь увеличением интенсивности циркуляции, создаваемой одним из способов. Значительно интереснее случай, когда циркуляционные течения, создаваемые механическим и тепловым способами, направлены навстречу друг другу.

На фиг. 1 приведены результаты расчетов в виде линий тока при параметрах $m=0,5$ и $\theta=0,15$ и граничных условиях для температуры, соответствующих случаю (2.2). Интенсивность циркуляционного течения составляет $\Psi_{\max}=2,1 \cdot 10^{-3}$. Линии тока соответствуют значениям нормированной функции тока $\Psi/\Psi_{\max}=0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0,1; 0,01$. Радиальное течение газа происходит в основном в торцевых пограничных слоях, имеющих переменную толщину вследствие сильного изменения плотности в радиальном направлении. Влияние тепловой конвекции на циркуляционное течение, восходящее вдоль стенки и нисходящее вдоль оси, в данном случае проявляется в уменьшении его интенсивности и искривлении линий тока в угловой зоне цилиндра вблизи нижнего торца. Картина линий тока при граничных условиях для температуры, соответствующих случаю (2.1), при тех же параметрах m и θ качественно не отличается от изображенной на фиг. 1 и поэтому здесь не приведена.

С увеличением параметра θ происходит пространственное изменение структуры течения и образование двух циркуляционных вихрей с противоположным направлением циркуляции. На фиг. 2, 3 представлены линии тока при значениях параметров $m=0,5$ и $\theta=0,33$ для случаев (2.1) и (2.2) соответственно. Для фиг. 2 интенсивности циркуляционных течений $\Psi_{\max}=1,5 \cdot 10^{-3}$ и $\Psi_{\min}=1,8 \cdot 10^{-4}$. Для фиг. 3 $\Psi_{\max}=1,6 \cdot 10^{-3}$, $\Psi_{\min}=1,6 \cdot 10^{-4}$. Тороидальный «тепловой» вихрь в обоих случаях зарождается в угловой зоне вблизи нагретого диска. Это связано с тем, что радиальное течение газа в пограничном слое в окрестности нижнего торца менее интенсивно.

На фиг. 4 представлены соответствующие распределения температуры в осевом направлении для случаев (2.1) (штриховая линия) и (2.2) (сплошная линия). Цифры соответствуют: $1-r=0,6$; $2-r=0,85$; $3-r=0,95$; $4-r=1,0$. Для случая (2.1) теплопередача происходит в основном в торцевых пограничных слоях. Для случая (2.2) распределение температуры в объеме цилиндра слабо отличается от линейного на боковой поверхности. Заметим, что при граничных условиях для температуры, соответствующих случаю (2.1) (фиг. 2), благодаря наличию теплового пограничного слоя «тепловой» тороидальный вихрь распространяется на меньшую часть высоты цилиндра, чем в случае (2.2), и течение в нем более интенсивно. Последнее приводит к увеличению влияния нелинейных эффектов в этой области. Расчеты показали, что уменьшение величины параметра m при фиксированном значении θ опять приводит к образованию одновихревого течения, качественно подобного изображенному на фиг. 1, но с противоположным направлением циркуляции.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что совместное влияние на течение газа механического и теплового способов возбуждения циркуляции проявляется как в качественном отношении (образование двухвихревой структуры течения, изменение направления циркуляции), так и в количественном (изменение интенсивности одновихревого течения).

Численные исследования течения сжимаемого газа во вращающемся цилиндре также показали, что с увеличением числа Маха ($M>3$) в районе оси начинают возникать осцилляции решения. Это связано, по-видимому, с образованием в этой области зоны разреженного газа. В этом случае задача должна включать в себя расчет в рамках модели сплошной среды области течения газа на периферии и исследование зоны разреженного газа вблизи оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Госмен А., Сполдинг Д. Расчет ламинарного циркуляционного течения между дисками, вращающимися в кожухе // Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 260–268.
2. Дорфман Л. А., Романенко Ю. Б. Течение вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде с вращающейся крышкой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 63–69.
3. Dijkstra D., van Heijst G. J. F. The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder // J. Fluid Mech. 1983. V. 128. P. 123–154.
4. Garrison P. W., Harvey D. W., Catton I. Laminar compressible flow between rotating disks // Trans. ASME. Ser. I. J. Fluid Engng. 1976. V. 98. № 3. P. 382–389.
5. Hashimoto K., Matsuda T. Meridional flow of compressible fluid in a rapidly rotating short cylinder // J. Phys. Soc. Japan. 1980. V. 49. № 2. P. 779–786.
6. Israeli M., Ungerish M. Laminar compressible flow between close rotating disks // Computers and Fluids. 1983. V. 11. № 2. P. 145–257.
7. Toren M., Solan A. Laminar compressible flow over a stationary disk in a rotating cylinder // Trans. ASME. J. Fluid Engng. 1979. V. 101. № 2. P. 173–180.
8. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
9. Борисевич В. Д., Лагунцов Н. И., Смаков Б. М. Об одном алгоритме решения больших систем нелинейных алгебраических уравнений в задачах математического моделирования химических процессов и установок // Теорет. основы хим. технологии. 1985. Т. 19. № 5. С. 134–135.

Москва

Поступила в редакцию
30.IX.1986