

3. Яненко Н. Н., Алхимов А. П., Несторович Н. И. Изменение волновой структуры при обтекании тел сверхзвуковым двухфазным потоком // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 4. С. 821–825.
4. Стронгин М. П. Математическое моделирование течений, характерных для плазменного напыления // Тепло- и массообмен в плазмохимических процессах: Матер. междунар. школы-семинара. Минск: Ин-т тепломассообмена АН БССР, 1982. Т. 2. С. 47–56.
5. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.

Барнаул

Поступила в редакцию  
8.IV.1985

УДК 533.69

## ОПТИМАЛЬНЫЕ НЕСУЩИЕ КРЫЛЬЯ С ТРЕБУЕМЫМИ ПРОДОЛЬНО БАЛАНСИРОВОЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

ПРОХОРОВ Е. М.

Рассматриваются бесконечно тонкие крылья, слабо возмущающие сверхзвуковой поток идеального газа. Форма в плане и число Маха набегающего потока  $M_\infty$  задаются. Оптимальная поверхность крыла  $y=g(x, z)$  определяется в результате нахождения ограниченной функции местных углов атаки  $\alpha_M=\partial g(x, z)/\partial x$ , обеспечивающей минимум коэффициента сопротивления  $c_x$  при заданных значениях коэффициентов подъемной силы  $c_y$  и момента тангажа  $m_z$ . Задача решается в классе кусочно-постоянных функций для крыльев сложной геометрии [1]. Особенностью используемого при этом численного метода [2] является организация оптимизационного поиска, приводящая к последовательному получению крыльев с уменьшающимся значением  $c_x$  и неизменными величинами  $c_y^*$ ,  $m_z^*$  заданных характеристик. На начальном этапе поиска возникает проблема, связанная с нахождением, вообще говоря, неплоского исходного крыла с  $c_y=c_y^*$  и  $m_z=m_z^*$ . В [1] значения заданных характеристик специально выбираются так, чтобы в качестве исходного крыла можно было рассмотреть пластину под углом атаки. Для нахождения исходного крыла в общем случае предлагается эффективная оптимизационная процедура определения неплоской слaboизогнутой поверхности крыла с требуемыми характеристиками  $c_y=c_y^*$  и  $m_z=m_z^*$ , оставляющими его в пределах линейной теории.

В дальнейшем считается, что поверхность крыла симметрична относительно по-точной оси  $x$ . Момент  $m_z$  вычисляется относительно центра тяжести крыла. За координату центра тяжести  $x_t$  принимается носок средней аэродинамической хорды крыла, если не оговорено противное.

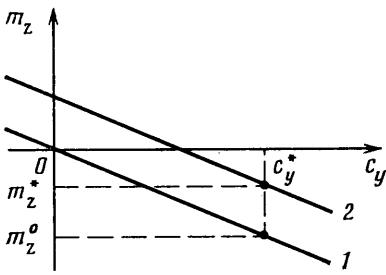
В линейной теории крыла зависимость  $m_z(c_y)$  линейна [3]

$$m_z = m_{z_0} + m_z c_y c_{y_0}, \quad m_{z_0} = m_z|_{c_y=0} \quad (1)$$

Считается, что речь идет об устойчивых крыльях, имеющих запас продольной статической устойчивости  $m_z c_y < 0$ . Величина  $m_z c_y$  зависит от числа  $M_\infty$  и формы крыла в плане [3], т. е. не меняется при оптимизации его поверхности. Тогда из (1) следует, что оптимальное крыло, соответствующее решению изопериметрической задачи минимизации  $c_x$  при  $c_y=c_y^*$ ,  $m_z=m_z^*$ , расчетном числе  $M_\infty$  и заданной форме в плане, отвечает той же прямой  $m_z(c_y)$ , что и исходное крыло. Более того, все крылья, последовательно получающиеся в процессе оптимизационного поиска, характеризуются одной прямой  $m_z(c_y)$ .

При выборе исходного крыла в виде пластины с  $c_y=c_y^*$  полученное оптимальное крыло соответствует прямой  $m_z(c_y)$ , проходящей через начало координат (прямая 1 на фиг. 1). Требование лучшей балансировочной характеристики оптимального крыла на расчетном режиме обтекания заставляет выбирать исходное крыло на другой прямой  $m_z(c_y)$ , имеющей  $m_{z_0}>0$  (прямая 2). Таким образом, первым шагом для получения оптимального по  $c_x$  крыла с заданными характеристиками  $c_y^*$  и  $m_z^*$  является переход при  $c_y=c_y^*$  с прямой 1 на параллельную ей прямую 2 с точкой  $m_z^*=m_z(c_y^*)$ , отвечающей неплоскому крылу.

Для достижения указанной цели предлагается решить следующую задачу оптимизации (2): найти функцию  $\alpha_M(x, z)$ , соответствующую минимуму функционала  $F=(m_z-m_z^*)^2$  при изопериметрическом условии на  $c_y$  и ограничении на значения



Фиг. 1

искомой функции (условие малости). В краткой записи

$$\begin{aligned} F &= (m_z - m_z^*)^2 \rightarrow \min \\ c_y &= c_y^*; \quad |\alpha_M(x, z)| \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый параметр линейной теории; пусть, как и в [1],  $\varepsilon \leq 0.2$ . Функционалы  $m_z$ ,  $c_y$  являются линейными относительно функции  $\alpha_M$ . Это дает возможность применить к вариационной задаче (2) численный метод оптимизации поверхности крыла в классе кусочно-постоянных функций, созданный для решения однотипной задачи условной минимизации квадратичного функционала  $c_x$  [2].

В этом случае при переходе к дискретной задаче оптимизации функционалы  $m_z$ ,  $c_y$  становятся линейными функциями относительно значений функций  $\alpha_M$  в  $N$  выбранных точках формы крыла в плане. Будем считать функции  $m_z(t)$ ,  $c_y(t)$  линейными относительно переменных  $t = (t_1, \dots, t_N)$ . Задача (2) сводится к задаче квадратичного программирования (3) размерности  $N$

$$\begin{aligned} F(t) &= (m_z - m_z^*)^2 \rightarrow \min \\ c_y(t) &= c_y^*, \quad |t_i| \leq \varepsilon \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (3)$$

Для статически устойчивого плоского крыла  $m_z^o = m_z(c_y^*) < 0$  при  $c_y^* > 0$ . Поскольку практический интерес представляют крылья с небольшими по величине значениями  $m_z^*$  (в том числе и  $m_z^* = 0$ ), можно ограничиться рассмотрением интервала  $m_z^o \leq m_z \leq m_z^*$ . В таком диапазоне изменения  $m_z$  задача (3) становится эквивалентной задаче линейного программирования (4)

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= m_z - m_z^* \rightarrow \max \quad (\Phi \leq 0) \\ c_y(t) &= c_y^*, \quad -\varepsilon \leq t_i \leq \varepsilon \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнения  $c_y = c_y^*$  можно получить линейную зависимость  $t_N = f(t_1, \dots, t_{N-1})$ , которая после подстановки в функцию  $\Phi(t)$  приводит к задаче линейного программирования (5) размерности  $N-1$  с однотипными ограничениями

$$\begin{aligned} \Phi'(t') &\rightarrow \max \quad (\Phi' \leq 0) \\ \sum_{i=1}^{N-1} a_{ji} t_i &\leq \varepsilon \quad (j=1, \dots, 2(N-1)) \\ \Phi'(t') &= \Phi(t_1, \dots, t_{N-1}, f(t_1, \dots, t_{N-1})) \\ a_{ji} &= \delta_j^i \quad (j=1, \dots, N-1), \quad a_{ji} = -\delta_{j-N+1}^i \quad (j=N, \dots, 2(N-1)) \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\delta_j^i$  — символ Кронекера.

Согласно теории линейного программирования [4], единственное решение задачи (5) достигается на одной из вершин  $|t_i| = \varepsilon$  гиперкуба:  $-\varepsilon \leq t_i \leq \varepsilon$  ( $i=1, \dots, N-1$ ). Это означает, что задание определенного значения  $\varepsilon$  в задаче (4) может приводить к решению  $\Phi^{\max} \neq 0$ , т. е. в пределах линейной теории получение крыльев с требуемой величиной  $m_z = m_z^*$  при расчетном режиме обтекания может оказаться невозможным.

Решение задачи (4) при  $m_z^* = 0$  определяет верхнюю границу  $m_z^{\max} \leq 0$  функции  $m_z$ , достижимую в рамках поставленных условий. Только задание величины  $m_z^*$ , удовлетворяющей соотношению

$$m_z^o \leq m_z^* \leq m_z^{\max} \quad (6)$$

может приводить к получению слабоизогнутой поверхности крыла с  $m_z = m_z^*$  в результате решения задачи (4). Понятно, что при  $m_z^* < m_z^{\max}$  решение, соответствующее  $\Phi^{\max} = 0$ , не является вершиной допустимого гиперкуба задачи (5).

Указанное обстоятельство необходимо учитывать при постановке задачи минимизации  $c_x$  крыла в режиме его самобалансировки ( $m_z^* = 0$ ) при заданных параметрах обтекания в отсутствие условия малости, решаемой в линейном приближении

в классе полиномиальных функций [5–7]. Если самобалансирующееся оптимальное крыло получено в случае  $m_z^{\max} < 0$ , отвечающем предельному по величине значению  $\varepsilon$ , то заявляемый при этом выигрыш в  $c_x$  нельзя считать достоверным.

Положение можно исправить, уменьшив величину  $|m_z^\circ|$  за счет смещения центра тяжести крыла к его фокусу, что приведет к уменьшению угла наклона прямой  $m_z(c_y)$  для пластины к оси  $m_z=0$ . Это дает возможность получить при расчетном режиме обтекания оптимальную слaboизогнутую самобалансирующуюся поверхность крыла с малым запасом продольной статической устойчивости [6]. Такой путь оказывается непригодным при заданной величине  $x_t$ .

На практике ситуация облегчается требованием самобалансировки летательного аппарата в целом, а не изолированного крыла. При этом соответствующее значение  $m_z^*$  крыла не будет равно нулю [7], что может оказаться достаточным для получения оптимальной поверхности с желаемыми характеристиками в случае выполнения (6).

В связи со сказанным задачу нахождения слaboизогнутой поверхности крыла минимального индуктивно-волнового сопротивления с требуемыми значениями  $c_y^*$  и  $m_z^*$  предлагается решать в классе кусочно-постоянных функций с помощью численного метода оптимизации крыла [2] в два этапа (центр тяжести крыла считается заданным).

*Этап 1.* В качестве исходного крыла выбирается пластина под углом атаки  $\alpha^*$ , отвечающим требуемому значению  $c_y^*$  ( $\alpha_M(x, z) = \alpha^*$ ). Далее ведется оптимизационный поиск крыла с требуемым значением  $m_z^*$  путем решения задачи (2). При  $F=0$  искомая поверхность крыла считается найденной и осуществляется переход к этапу 2. При  $F \neq 0$  полученное решение соответствует поверхности, на большей части которой функция  $\alpha_M$  достигает своих предельных значений, обусловленных выбранным  $\varepsilon$ . Если  $\varepsilon$  не может быть увеличено, то поставленная задача считается неразрешимой в пределах линейной теории. При этом решением задачи (2) указана верхняя граница  $m_z^{\max} < 0$ , которая в данной ситуации может быть достигнута.

*Этап 2.* В качестве исходного выбирается крыло, полученное решением задачи (2) на этапе 1. Оно обладает требуемыми значениями  $c_y^*$ ,  $m_z^*$  и удовлетворяет условию малости. Далее ведется оптимизационный поиск крыла с условно минимальным значением  $c_x$  путем решения вариационной задачи, поставленной в [2]

$$c_x \rightarrow \min, \quad c_y = c_y^*, \quad m_z = m_z^*, \quad |\alpha_M(x, z)| \leq \varepsilon$$

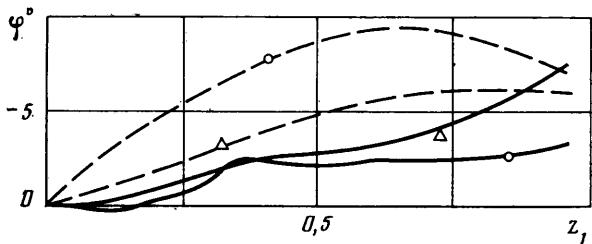
Дополнительное задание запаса устойчивости  $m_z^{cv} = x_t - x_F$  соответствует заданию координаты центра тяжести крыла  $x_t$ , поскольку положение его фокуса  $x_F$  однозначно определяется числом  $M_\infty$  и выбранной формой в плане [3] (величины  $x_t$ ,  $x_F$  отнесены к длине средней аэродинамической хорды крыла).

Иногда в ограничении-равенстве вместо характеристики  $m_z$  задается величина  $m_{z_0}$ . В этом случае, используя соотношение  $m_z^* = m_z^\circ + m_{z_0}^*$  (см. фиг. 1) и зная значение  $m_z^\circ$  при  $c_y = c_y^*$ , легко возвращаемся к ограничению  $m_z = m_z^*$ .

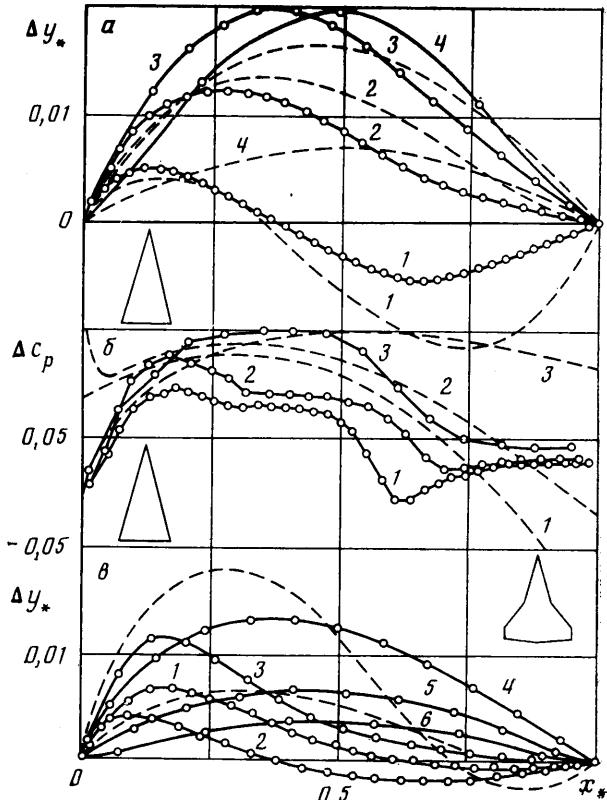
На фиг. 2 и 3 приведены сравнения характеристик оптимальных поверхностей для двух форм крыла в плане, полученных при их полиномиальном задании [6, 7] (отмечены штриховыми линиями) и с помощью описанной выше процедуры оптимизационного поиска. На фиг. 2 показаны графики углов круги  $\Phi$  (в градусах) (координата  $z_1$  отнесена к длине полуразмаха крыла) для треугольного крыла в плане (обозначено треугольниками) и крыла, форма которого дана на фиг. 3, в (кружки). Безразмерные эпюры профилей поверхностей  $\Delta y^*(x_*)$  и перепад давления  $\Delta c_p(x_*)$  в сечениях крыла  $z_1 = \text{const}$  представлены на фиг. 3 расчетными точками, число которых убывает вместе с длиной его местных хорд [2] (координата  $x_*$  и значения  $\Delta y^*$  определены в долях местной хорды).

Оптимальные решения на треугольной форме в плане с углом стреловидности  $\chi = 75^\circ$  найдены при  $M_\infty = 1,8$ ,  $c_y^* = 0,075$ ,  $m_z^* = 0$  и малом запасе устойчивости  $m_z^{cv} = -0,05$ . Поиск проводился при  $\varepsilon = 0,1$  и числе переменных около 1200, обеспечивающем приемлемое совпадение результатов расчета с точными решениями линейной теории. В этом случае выигрыш в  $c_x$  составил  $\delta = 0,322$  по сравнению с исходной пластиной. Здесь  $\delta = (c_x^* - c_x^{\text{opt}})/c_x^*$ , значения  $c_x^*$ ,  $c_x^{\text{opt}}$  соответствуют плоскому и оптимальному крыльям. Выбор параметра  $\varepsilon = 0,1$  обусловлен необходимостью получения слaboизогнутой поверхности при расчетном режиме обтекания и осуществлялся указанным в [1] образом.

Сравнение характеристик крыльев, представленных на фиг. 2 и 3, а, б, показывает их существенное различие, особенно проявляющееся в поведении коэффициента давления  $c_p = \Delta c_p/2$  на их поверхностях (кривые 1–4 получены при  $z_1 = 0; 0,3; 0,6$  и  $0,9$ ). Поверхность из [6] характеризуется бесконечными значениями  $c_p$  на передней кромке крыла и отрицательными значениями  $c_p$  в хвостовой части корневых сечений, не позволяющими считать такое распределение нагрузки по крылу удачным. Согласно [8], оптимальная поверхность обладает пенагруженной дозвуковой передней кромкой ( $c_p = 0$ ) на расчетном режиме обтекания и потому полиномиальное решение из [6] заведомо не оптимально с точки зрения линейной теории.



Фиг. 2



Фиг. 3

Напротив, поверхность, отвечающая решению в классе кусочно-постоянных функций, обладая безударной кромкой, характеризуется более умеренным и благоприятным распределением давления на крыле как вдоль его размаха, так и по потоку. Незначительная осцилляция расчетных значений  $\Delta c_p$  вызвана возмущениями, идущими с передней кромки крыла по линиям Маха вследствие ее приближенного численного представления, наиболее ощутимого при оптимизации на треугольной форме в плане. Отмеченная в [1, 2] особенность оптимальных крыльев, связанная с образованием в окрестности большей части дозвуковой передней кромки на расчетном режиме обтекания силы, направленной навстречу набегающему потоку, в полной мере реализуется и здесь.

Оптимальные решения на крыле сложной формы в плане, схематично представленной на фиг. 3, *a*, найдены при  $M_\infty=2$ ,  $c_y^*=0,1$  и  $m_{z_0}^*=0,005$ . Оптимизационный поиск на этой форме проводился в [1] при  $M_\infty=2$ ,  $c_y^*=0,093$  и  $m_{z_0}^*=0$ , что позволяет проследить некоторые изменения в кусочно-постоянном решении, обусловленные увеличением значения  $m_{z_0}^*$ . При  $\epsilon=0,09$  и принятом в [1] числе переменных около 900 выигрыш в  $c_L$  составляет  $\delta=0,190$  по сравнению с величиной  $\delta=0,157$  при  $\epsilon=0,07$  в [1]. Выбор значения  $\epsilon=0,09$  обеспечивает получение слабоизогнутой оптимальной поверхности при расчетных параметрах обтекания (при  $\epsilon=0,2$  ряд переменных достигает своих предельных значений, что приводит к поверхности, дающей  $\delta=0,202$  и не удовлетворяющей требованиям линейной теории).

Геометрические характеристики полученного оптимального крыла представлены на фиг. 2 и 3, в в сечениях  $z_1=0; 0,125; 0,250; 0,375; 0,500$  и  $0,750$  (кривые 1–6). Они совершенно отличны от соответствующих характеристик поверхности, определенной в классе полиномов и дающей в эксперименте величину  $\delta < 0$  при расчетном значении  $c_y$  [7] (на фиг. 3, в кривая с наибольшей деформацией отвечает сечению  $z_1=0$ , а с меньшей – сечению  $z_1=0,3$  этой поверхности). С другой стороны, график функции  $\varphi$ , соответствующий решению с  $\varepsilon=0,09$ , качественно сравним с графиком крутки, полученным в [1] при оптимизации с  $\varepsilon=0,07$ . Распределение давления на рассматриваемой поверхности отличается от представленного в [1] главным образом большим смещением точки максимума функции  $c_p(x_1)$  к дозвуковой передней кромке в соответствующих сечениях крыла  $z_1=\text{const}$ , что приводит к большим значениям производной  $dc_p/dx_1$  в этой области (координата  $x_1$  отнесена к длине корневой хорды крыла). Такое перераспределение практически неизменной подъемной силы обусловлено наличием кабрирующего момента при  $c_y=0$ , требующего увеличения нагрузки в головной части крыла. Указанное поведение функции  $c_p$  является причиной сужения области его дозвуковой передней кромки, где реализуется сила, направленная навстречу набегающему потоку, при одновременном понижении отрицательных значений функции  $c_{p\alpha M}$  в этой области.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прохоров Е. М. Оптимальные несущие поверхности крыльев сложной геометрии при сверхзвуковых скоростях полета // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 154–160.
2. Прохоров Е. М. Изопериметрическая оптимизация поверхности крыльев простых форм в плане с учетом толщины // Задачи аэродинамики тел пространственной конфигурации. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1982. С. 104–119.
3. Аржаников Н. С., Садекова Г. С. Аэродинамика летательных аппаратов. М.: Высп. шк., 1983. 359 с.
4. Мусеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978. 351 с.
5. Логинов И. П., Якимов Л. Г. Расчетные исследования распределения давления по неплоским крыльям различной формы в плане при сверхзвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. 1970. Вып. 1198. С. 16–50.
6. Логинов И. П., Якимов Г. Л. Расчетные исследования распределения давления по неплоским треугольным крыльям при сверхзвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. 1970. Вып. 1198. С. 51–73.
7. Бродецкий М. Д., Кощеев А. Е., Черемухин Г. А. Экспериментальные исследования неплоских крыльев при сверхзвуковых скоростях // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1974. Вып. 3. № 13. С. 33–39.
8. Жигулев В. Н. О тонких крыльях минимального сопротивления // Аэромеханика. М.: Наука, 1976. С. 24–31.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
7.III.1986