

УДК 532.516

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СИММЕТРИЧНОМ ДЕФОРМИРОВАННОМ КАНАЛЕ

ТИМОШИН С. Н.

Рассматривается периодическое по времени течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском симметричном канале со слабдеформированными стенками. Решение уравнений Навье — Стокса строится с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений [1] при больших характерных числах Рейнольдса. Показано, что в нестационарном течении линию нулевой скорости внутри жидкости окружает область нелинейных возмущений. Рассмотрен процесс формирования и развития по времени таких нелинейных зон. Обнаружен эффект чередования топологических особенностей картины линий тока в зоне нелинейных возмущений.

В рамках асимптотического подхода к задачам динамики вязкой жидкости в каналах и трубах с деформированными стенками значительные успехи достигнуты в исследовании стационарных режимов течения [2, 3]. Большой интерес представляет также изучение пульсирующих течений как специального вида нестационарных движений жидкости. Помимо сугубо теоретических проблем, связанных с влиянием нестационарности на поле течения при больших числах Рейнольдса, изучение периодических по времени процессов необходимо для понимания динамики кровообращения в крупных кровеносных сосудах млекопитающих, где с хорошим приближением движущуюся жидкость можно считать однородной ньютоновской средой [3]. При этом особого внимания заслуживают области с локальными деформациями границ потока, где напряжения давления и трения могут иметь аномально высокие или низкие значения.

Задачи асимптотической теории пульсирующих внутренних течений рассматриваются в [4–6]. В [4] амплитуда и частота пульсационной составляющей вектора скорости подбирались с таким расчетом, чтобы движение жидкости в вязких пристеночных слоях описывалось полной системой уравнений нестационарного пограничного слоя. Дальнейший анализ задачи проводился с помощью асимптотических и численных методов (см. также [5]). Работа [6] посвящена главным образом исследованию зависимости характера течения от частоты пульсаций. Большое внимание уделено движению в критических слоях, которые возникают при изменении направления невозмущенного потока. В настоящей работе рассмотрен вопрос об эволюции мгновенной картины линий тока в критическом слое для простейшего режима течения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение несжимаемой вязкой жидкости в бесконечном симметричном плоском канале шириной d_0 с деформированным участком протяженности bd_0 (фиг. 1). Характерный размер деформации стенок в поперечном направлении обозначим через hd_0 . Течение предполагается ламинарным и периодическим по времени с периодом T . Относя все линейные размеры к невозмущенной ширине канала, введем безразмерную декартову систему координат xu с началом, расположенным на линии невозмущенной нижней стенки канала в окрестности деформированного участка; ось ординат направим вглубь канала. Отнесенные к характерной скорости U_0 составляющие вектора скорости в этой системе обозначим через u и v . Давление запишем в виде $\rho U_0^2 p$, считая плотность жидкости ρ постоянной величиной. Время, отнесенное к периоду T , обозначим через t . Уравнения Навье — Стокса в безразмерных переменных можно записать в виде

$$\alpha^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{Re}[(\nabla \nabla) \mathbf{V} + \nabla p] = \Delta \mathbf{V}, \quad \nabla \mathbf{V} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь V — вектор скорости, $Re = U_0 d_0 \nu^{-1}$ — число Рейнольдса, $\nu = \text{const}$ — кинематический коэффициент вязкости. Параметр Уомерсли $\alpha = d_0 \nu^{-1/2} T^{-1/2}$ характеризует соотношение между шириной канала и толщиной слоя Стокса в периодическом течении.

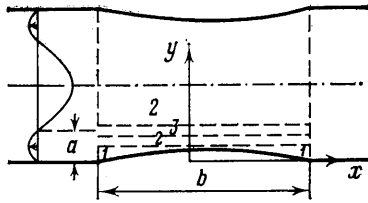
В дальнейшем будем считать, что поле течения симметрично относительно оси симметрии канала, и ограничимся рассмотрением его нижней половины. Форму твердой поверхности зададим соотношениями

$$y = hf(x/b), \quad f \geq 0, \quad f(\pm\infty) = 0$$

Предположим, что в отсутствие деформации в канале происходит нестационарное одномерное течение вида

$$\begin{aligned} u &= u_0(y, t), \quad v = 0, \quad p = x \operatorname{Re}^{-1} g_0(t) \\ u_0(y, t+1) &= u_0(y, t), \quad g_0(t+1) = g_0(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Нестационарное течение (1.2) характерно тем, что при значениях параметра α порядка единицы уменьшение расхода жидкости может при-



Фиг. 1

вести к обращению знака скорости u_0 вблизи твердых границ потока прежде, чем изменится направление течения в центральной части канала. При этом формируется профиль скорости, показанный на фиг. 1 (см., например, [7]).

Если число Рейнольдса велико, то небольшая деформация стенок канала создает наиболее сильные относительные возмущения поля течения в тех областях, где скорости малы, т. е. вблизи твердых границ, с вероятным отрывом потока, и в окрестности линии нулевой скорости внутри жидкости (если такая существует).

Стационарный режим течения, соответствующий параболической зависимости $u_0(y)$, изучался при условиях $Re \gg b \gg 1$ в [8]. Оказалось, что в поле течения выделяется невязкое ядро потока, ограниченное пристеночными вязкими слоями. Отрыв потока появляется тогда, когда масштаб деформации h достигает величины

$$h = \varepsilon^{1/2} H, \quad \varepsilon = b \operatorname{Re}^{-1} \ll 1$$

где H — постоянная порядка единицы, зависящая от конкретной формы деформации.

В настоящей работе также предполагается, что характерные масштабы деформации удовлетворяют указанным выше условиям, однако невозмущенное течение считается нестационарным и периодическим по времени. Простым примером такого течения может служить суперпозиция течения Пуазейля и движения под действием гармонически меняющегося со временем перепада давления [7]. Для простоты будем считать, что на протяжении периода по оси канала изменяется по величине, но не по направлению. Кроме того, предполагается, что весь период можно разбить на три интервала: $0 \leq t < T_1$, $T_1 < t < T_2$ и $T_2 < t \leq 1$, причем если $0 \leq t < T_1$ или $T_2 < t \leq 1$, то $u_0(y, t) > 0$ при $0 < y \leq 1/2$. Если $T_1 < t < T_2$, то $u_0 < 0$ при $0 < y < a(t)$ и $u_0 > 0$ при $a(t) < y \leq 1/2$. Здесь через $a(t)$ обозначена ор-

дината линии внутри канала, на которой $u_0=0$. В общем случае

$$y \rightarrow a(t): \quad u_0(y, t) = \gamma(t)[y - a(t)] + O([y - a(t)]^2) \quad (1.3)$$

$y \rightarrow 0:$

$$\begin{aligned} u_0(y, t) &= \lambda(t)y + \frac{1}{2}\beta(t)y^2 + O(y^3) \\ \lambda(T_1) &= \lambda(T_2) = 0, \quad \beta(T_1) > 0, \quad \beta(T_2) > 0 \\ \lambda(t) &\neq 0 \quad ((t - T_1)(t - T_2) \neq 0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

В дальнейшем аргумент t у коэффициентов разложений (1.3) и (1.4) часто будем опускать.

2. Течение в моменты времени, отличные от T_1 и T_2 . Некоторые результаты, касающиеся данной задачи, были получены в [6], где в общих чертах рассмотрены два из трех указанных ниже характерных режимов течения. Так, можно показать, что если $(t - T_1)(t - T_2) \sim 1$, то возмущенное течение квазистационарно во всех характерных областях. Возмущение давления имеет порядок величины $p \sim \varepsilon^{2/3}$ и в главном приближении не меняется поперек канала. Распределение давления находится из рассмотрения движения в вязком пристеночном слое (область 1 на фиг. 1), где функции течения представляются в виде

$$\begin{aligned} x &= X_1 b \operatorname{sign} \lambda, \quad y = Y_1 \varepsilon^{1/3} |\lambda|^{-1/3} \\ u &= \varepsilon^{1/3} |\lambda|^{2/3} \operatorname{sign} \lambda U_1(X_1, Y_1, t) + \dots \\ v &= b^{-1} \varepsilon^{2/3} |\lambda|^{1/3} V_1(X_1, Y_1, t) + \dots \\ p &= \varepsilon^{2/3} |\lambda|^{1/3} P_1(X_1, t) + \dots \end{aligned}$$

Соответствующая краевая задача для коэффициентов разложений имеет вид

$$\begin{aligned} U_1 \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + V_1 \frac{\partial U_1}{\partial Y_1} + \frac{\partial P_1}{\partial X_1} &= \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y_1^2}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial V_1}{\partial Y_1} = 0 \\ U_1 = V_1 &= 0 \quad (Y_1 = \sigma f(X_1 \operatorname{sign} \lambda)) \\ U_1 \rightarrow Y_1, \quad V_1 &\rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow 0 \quad (X_1 \rightarrow \pm \infty) \\ U_1 &= Y_1 + o(1) \quad (Y_1 \rightarrow +\infty) \quad \sigma = H|\lambda|^{1/3} \end{aligned}$$

Данный режим течения известен под названием компенсационного [9]. Название отражает тот факт, что в главном приближении линии тока на внешней границе вязкого подслоя не испытывают смещения при изменении формы твердой поверхности. Примеры расчета подобных течений содержатся в [8, 10]. В настоящей работе форма деформации задавалась соотношением $f(x) = \exp(-x^2)$.

Численное решение строилось с помощью явной схемы первого порядка точности в направлении X_1 и второго порядка в направлении Y_1 в узлах прямоугольной сетки с размерами ячейки $\Delta X_1 = 0,05$, $\Delta Y_1 = 0,2$. Число узлов сетки полагалось равным 150 по оси абсцисс и 75 по оси ординат. На каждой итерации поле скоростей определялось маршевым методом в направлении увеличения абсциссы с начальным сечением при $X_1 = -2$. Значения функций из предыдущей итерации использовались как коэффициенты в нелинейных слагаемых на новой итерации. В области возвратных токов ($U_1 < 0$) производная $\partial U_1 / \partial X_1$ аппроксимировалась правосторонней разностью. Как правило, сходимость решения достигалась за 180–200 итераций с точностью до 10^{-5} .

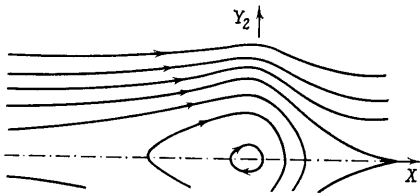
В результате расчета было получено распределение давления $P_1(X_1)$ при различных σ . В случае канала с сужением ($\sigma > 0$) оказалось, что $P_1 \leq 0$. Исследование напряжения трения на стенке показало, что при $\sigma \geq 2,5$ в вязком подслое существует локальная зона отрыва. Результаты расчета качественно согласуются с известными результатами для других видов деформаций и подтверждают хорошо известные свойства компенсационного режима течения: отсутствие возмущений вверх по потоку от препятствия и регулярность решения в точке отрыва.

Не останавливаясь на описании течения в основной части канала (область 2) [6], заметим, что в интервале времени $T_1' < t < T_2$ вблизи ли-

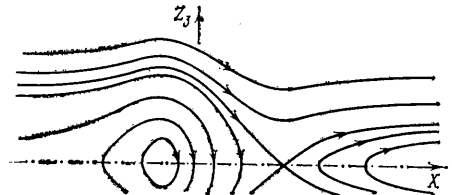
нии $y=a$ даже незначительные возмущения давления вызывают нелинейные изменения в картине линий тока. В рассматриваемом случае в нелинейной зоне (область 3 на фиг. 1) имеем

$$\begin{aligned}x &= bX, \quad y = a(t) + \varepsilon^{1/2} |\lambda|^{2/3} \gamma^{-1} Y_2 \\ u &= \varepsilon^{1/2} |\lambda|^{2/3} \frac{\partial \Psi_2}{\partial Y_2} + \dots \\ v &= -b^{-1} \varepsilon^{1/2} |\lambda|^{1/3} \gamma^{-1} \frac{\partial \Psi_2}{\partial X} + \dots \\ \Psi_2 &= 1/2 Y_2^2 + P_1(-X, t)\end{aligned}$$

Типичная картина линий тока для сужающегося канала показана на фиг. 2 для $\sigma=2$ (в силу симметрии решения относительно оси X изображена только верхняя часть течения). С топологической точки зрения линии тока имеют особенность типа центр. В канале с локальным рас-



Фиг. 2



Фиг. 3

ширением $P_1 \geq 0$, поэтому линии тока в критическом слое имеют седловую точку.

Нетрудно показать, что если $t \rightarrow T_i$, $i=1, 2$, то критический слой приближается к стенке канала, однако топология течения в нелинейной части критического слоя остается неизменной до тех пор, пока $|t - T_i| \gg \varepsilon^{1/4}$.

3. Течение при $|t - T_i| \sim \varepsilon^{1/4}$. Особенность режима течения в указанных временных интервалах заключается в том, что невозмущенный профиль скорости в вязком пристеночном слое теперь нельзя считать линейной функцией поперечной координаты. Расстояние от стенки канала до области нелинейных возмущений функции тока совпадает по порядку величины с толщиной вязкого подслоя (нелинейная зона при этом много тоньше, чем вязкий подслой). Однако свойство квазистационарности и компенсационный режим течения в вязком подслое сохраняются.

Рассматривая для определенности окрестность момента времени T_1 , представим переменные величины в вязком пристеночном слое в виде

$$\begin{aligned}Y_3 &= \varepsilon^{-1/4} \beta_1^{1/4} y, \quad \tau_1 = \varepsilon^{-1/4} \lambda_1 \beta_1^{-1/4} (t - T_1), \quad (X, Y_3, \tau_1) \sim 1 \\ u &= \varepsilon^{1/2} \beta_1^{1/2} \left(\frac{1}{2} Y_3^2 - \tau_1 Y_3 \right) + \varepsilon^{1/2} H \beta_1^{1/4} \frac{\partial \Psi_3(X, Y_3, \tau_1)}{\partial Y_3} + \dots \\ p &= \varepsilon X g_0(T_1) + \varepsilon^{13/12} H \beta_1^{5/4} P_3(X, \tau_1) + \dots\end{aligned}$$

$$\beta_1 = \beta(T_1), \quad \lambda_1 = -\frac{d\lambda}{dt}(T_1)$$

Тогда краевая задача для первых возмущенных членов имеет вид

$$\left(\frac{1}{2} Y_3^2 - \tau_1 Y_3 \right) \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial X \partial Y_3} - (Y_3 - \tau_1) \frac{\partial \Psi_3}{\partial X} = \frac{\partial^3 \Psi_3}{\partial Y_3^3} - \frac{\partial P_3}{\partial X} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial Y_3} \rightarrow 0 \quad (X \rightarrow \pm\infty, Y_3 \rightarrow +\infty)$$

$$\Psi_3 = 0, \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial Y_3} = \tau_1 f(X) \quad (Y_3 = 0)$$

Краевая задача (3.1) решалась численно. Для этого сначала было выполнено преобразование Фурье по переменной X , после чего задача решалась методом прогонки.

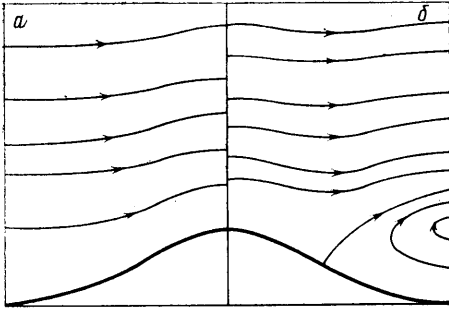
Если $\tau_1 > 0$, то в вязком подслое можно выделить область с нелинейно возмущенными линиями тока. Функция тока в нелинейной зоне описывается соотношениями вида

$$\psi = -\varepsilon^{3/2} / 3 \tau_1^3 \beta_1^{1/2} + \varepsilon^{5/2} H \beta_1^{1/2} \Psi_{31}$$

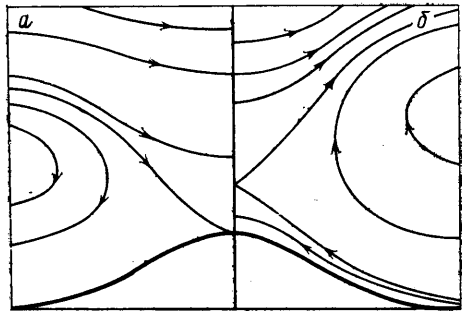
$$\Psi_{31} = 1/2 Z_3^2 + \Psi_3(X, 2\tau_1, \tau_1)$$

$$Z_3 = (Y_3 - 2\tau_1) \varepsilon^{-1/24} \beta_1^{-1/8} \tau_1^{1/2} H^{-1/2}$$

Картина линий тока в нелинейной части вязкого подслоя показана на фиг. 3 в момент времени $\tau_1 = 3$. По мере того как нелинейная зона проходит через вязкий подслой и приближается к твердой поверхности (что соответствует уменьшению τ_1), картина линий тока в нелинейной зоне



Фиг. 4



Фиг. 5

претерпевает существенные изменения. Наряду с особенностью типа центр в течении образуется седловая точка, интенсивность которой нарастает и при $\tau_1 \rightarrow +0$ центр пропадает. Можно показать, что для симметричной по X деформации картина линий тока в пределе $\tau_1 \rightarrow +0$ также становится симметричной.

Заметим, что в канале с локальным расширением при уменьшении τ_1 от $+\infty$ до 0 седловая точка сменяется особенностью типа седло — центр и в пределе малых положительных τ_1 седловая точка пропадает.

4. Течение при $|t - T_1| \sim \varepsilon^{1/2}$. В этом интервале времени толщина нелинейной зоны, амплитуда деформации стенки и расстояние от стенки до нелинейной зоны являются величинами одного порядка малости. Для описания возникающего здесь режима течения введем новую переменную

$$t = T_1 + \varepsilon^{1/2} t_2, \quad t_2 = O(1)$$

Тогда в основной части канала, где $X = b^{-1}x = O(1)$, $y = O(1)$, решение представляется в виде

$$u = \sum_{n=0}^3 \varepsilon^{n/3} t_2^n u_{0n}(y) + \varepsilon^{1/3} u_3(X, y, t_2) + \dots$$

$$v = b^{-1} \varepsilon^{1/3} v_3(X, y, t_2) + \dots$$

$$p = \varepsilon X g_0(T_1) + \varepsilon^{1/3} p_3(X, t_2) + \dots$$

Нетрудно показать, что система уравнений для первых возмущенных членов имеет следующее решение:

$$v_3 = \frac{\partial p_3}{\partial X} u_{00} \int_{1/2}^y u_{00}^{-2}(s) ds, \quad u_3 = - \left(p_3 / \frac{\partial p_3}{\partial X} \right) \frac{\partial v_3}{\partial y}$$

В пристеночном вязком слое справедливо представление решения в виде

$$\begin{aligned} X &= O(1), \quad y = \varepsilon^{1/4} \beta_1^{-1/4} Y_3, \quad Y_3 = O(1) \\ u &= \varepsilon^{1/2} \beta_1^{1/2} \frac{1}{2} Y_3^2 - \varepsilon^{7/12} \lambda_1 t_2 \beta_1^{-1/4} Y_3 + \varepsilon^{5/6} \frac{1}{2} \beta_1 H^2 U_4(X, Y_3, t_2) + \dots \\ v &= b^{-1} \varepsilon^{11/12} \frac{1}{2} \beta_1^{3/4} H^2 V_4(X, Y_3, t_2) + \dots \\ p &= \varepsilon X g_0(T_1) + \varepsilon^{7/6} \frac{1}{2} \beta_1^{3/4} H^2 P_4(X, t_2) + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подстановка разложений (4.1) в систему уравнений (1.1) приводит с учетом условий прилипания и сращивания с решением в основной части канала к следующей краевой задаче для первых возмущенных членов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Y_3^2 \frac{\partial U_4}{\partial X} + Y_3 V_4 + \frac{\partial P_4}{\partial X} &= \frac{\partial^2 U_4}{\partial Y_3^2}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial X} + \frac{\partial V_4}{\partial Y_3} = 0 \\ U_4 \rightarrow 0, \quad V_4 \rightarrow 0 \quad (X \rightarrow \pm\infty, Y_3 \rightarrow +\infty) \\ V_4 = 0, \quad U_4 &= -f^2(X) + \frac{2\lambda_1 t_2}{\beta_1 H} f(X) \quad (Y_3 = 0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Результаты работы [11] позволяют выписать решение задачи (4.2) в виде

$$P_4 = - \frac{2^{3/2}}{\pi} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(3/4)} \int_{-\infty}^x \left[f^2(s) - \frac{2\lambda_1 t_2}{\beta_1 H} f(s) \right] \frac{ds}{(X-s)^{1/2}} \quad (4.3)$$

Отметим некоторые особенности в распределении давления вдоль канала. Решение (4.3) является регулярной функцией времени и не обращается в нуль при $t_2=0$. Следовательно, более мелкие области по времени можно не рассматривать. Далее, если величина $|t_2|$ мала, то давление в канале в первом приближении отрицательно независимо от того, сужается канал или расширяется. Если $|t_2| \rightarrow \infty$, то решение (4.3) непрерывно переходит в решение для интервала $\tau_1 \sim 1$ при $\tau_1 \rightarrow 0$.

Остается рассмотреть картину течения в нелинейном слое. Будем считать, что канал имеет сужение ($H > 0$). Тогда, полагая $y = \varepsilon^{1/2} H z$, $\tau_2 = 3\lambda_1 \beta_1^{-1} H^{-1} t_2$ и считая, что $(X, z, \tau_2) = O(1)$, можно представить главный член разложения функции тока в нелинейной зоне в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \varepsilon \frac{1}{6} \beta_1 H^3 \Psi_4(X, z, \tau_2) + \dots \\ \Psi_4 &= [z - f(X)]^2 [z + 2f(X) - \tau_2] \end{aligned}$$

Картина линий тока около деформации вида $f(X) = \exp(-X^2)$ в различные моменты времени показана на фиг. 4, а, б ($\tau_2=0; 1,5$) и 5, а, б ($\tau_2=3; 4$). Если $\tau_2 \leq 0$, то линии тока под влиянием деформации испытывают смещение в вертикальном направлении. В интервале времени $0 < \tau_2 < 3$ в поле течения существуют две области с разворачивающимися линиями тока, разделенные деформированным участком твердой границы. В момент времени $\tau_2=3$ эти области смыкаются в вершине бугорка. На-

конец, если $\tau_2 > 3$, то в картине линий тока появляется особенность — седловая точка. Аналогичным образом может быть исследовано течение в канале с локальным расширением, и тогда в некоторый конечный момент времени τ_2 в потоке будет формироваться особенность типа центр. Можно рассматривать также деформации более сложного вида.

Подчеркнем, что для симметричных по X деформаций в диапазоне $|t - T_i| \ll \varepsilon^{1/4}$ форма линий тока в нелинейной зоне в главном приближении также симметрична.

Остановимся вкратце на основных особенностях рассмотренного выше течения.

Несмотря на то что невозмущенное течение в канале без деформации было выбрано существенно нестационарным, уравнения для возмущенных функций во всех выделенных областях не содержат производной по времени, т. е. зависимость возмущенного решения от времени по существу является квазистационарной. Это обстоятельство связано в первую очередь с тем, что на протяжении всего периода времени в вязком пристеночном слое сохраняется компенсационный режим течения. В данной задаче компенсационный режим является следствием симметрии поля течения относительно оси канала. Возможная несимметрия задачи, а также взаимодействие между ядром потока и пристеночными слоями приводят к новым, гораздо более сложным в динамическом отношении явлениям.

Если параметр Уомерсли $\alpha = O(1)$, то невозмущенный профиль скорости $u_0(y, t)$ может иметь свойства, отличные от тех, что были приняты в настоящей работе. Так, в некоторый момент времени скорость на оси канала может обратиться в нуль. Кроме того, на линии, лежащей ниже оси симметрии, могут одновременно обратиться в нуль скорость и завихренность. Анализ настоящей работы применим к таким течениям на всем периоде, исключая малые окрестности указанных моментов времени.

Изложенная выше теория течения в плоском канале очевидным образом может быть распространена на случай течения в круглой трубе с осесимметричной деформацией. Наиболее существенные различия возникают при описании движения в основной, невязкой части области течения, которая, как и в плоском случае, играет подчиненную роль по отношению к пристеночному вязкому слою.

Автор глубоко признателен В. В. Сычеву за постановку задачи и внимательное отношение к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
2. Smith F. T. On the high Reynolds number theory of laminar flows // IMA J. Appl. Math. 1982. V. 28. № 3. P. 207–281.
3. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
4. Duck P. W. Pulsatile flow through constricted or dilated channels // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1980. V. 33. Pt 1. P. 77–92.
5. Duck P. W. Pulsatile flow through constricted or dilated channels. II // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1985. V. 38. Pt 4. P. 621–653.
6. Cowley S. J. Pulsatile flow through distorted channels: Low-Strouhal-number and translating-critical-layer effects // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1985. V. 38. Pt 4. P. 589–619.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
8. Smith F. T. Flow through constricted or dilated pipes and channels. Pt 1 // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1976. V. 29. Pt 3. P. 343–364.
9. Боголенов В. В., Липатов И. И. Автономные решения уравнений пограничного слоя с взаимодействием // ПМТФ. 1982. № 4. С. 60–65.
10. Боголенов В. В. Расчет взаимодействия сверхзвукового пограничного слоя с тонким препятствием // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 6. С. 30–38.
11. Рубан А. И. Асимптотическая теория коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 42–51.