

УДК 532.5.014.4:536.46

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ФРОНТА ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ГАЗОВОЙ ФАЗЕ

БЕРМАН В. С., КУРДЮМОВ В. Н., РЯЗАНЦЕВ Ю. С.

В [1, 2] рассматривалась устойчивость стационарной волны экзотермической реакции в конденсированной фазе, причем аррениусовская зависимость скорости реакции от температуры заменялась кусочно-постоянной. Показано, что стационарная волна становится неустойчивой при уменьшении ширины фронта реакции [1], причем возмущения, которые теряют устойчивость, имеют определенную длину волны ( $k^2 \approx 0,28$ ) [2].

Влияние пространственных возмущений на устойчивость отмечалась и ранее (например [3, 4]). В этих работах использовалась аппроксимация температурной зависимости скорости химической реакции в виде  $\delta$ -функции. Но, как отмечалось в [2], такая аппроксимация существенно искажает истинную структуру спектра линеаризованной задачи и приводит к отсутствию непрерывной части спектра.

В настоящей работе в предположении, что зависимость скорости реакции от температуры является кусочно-постоянной, исследуется влияние коэффициента диффузии на устойчивость стационарного фронта.

Пусть стационарная волна распространяется вдоль оси  $x$ . Тогда уравнение для температуры и степени превращения в системе координат, движущейся с фронтом волны, в безразмерном виде имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \Delta \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu(1-a)f(\theta), \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{Le} \Delta a + \frac{\partial a}{\partial x} + \mu(1-a)f(\theta) \quad (1) \\ \theta &= \frac{\rho c_p(T-T_0)}{QC_0}, \quad a = 1 - \frac{C}{C_0}, \quad t = \frac{\tau U^2}{\chi} \\ x &= \frac{UX}{\chi}, \quad \mu = \frac{K\chi}{U^2}, \quad Le = \frac{\chi}{D}, \quad f(\theta) = h(\theta - \theta_*) \end{aligned}$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\chi$ ,  $D$  — коэффициенты температуропроводности и диффузии,  $\rho$ ,  $c_p$  — плотность и теплоемкость вещества,  $T_0$ ,  $C_0$  — температура и концентрация до начала реакции,  $Q$ ,  $K$  — тепловой эффект и скорость реакции,  $X$  — координата,  $\tau$  — время,  $U$  — скорость стационарного фронта в неподвижной системе координат,  $T$  и  $C$  — температура и концентрация. Здесь  $h$  — функция Хэвисайда,  $\theta_* < 1$ .

Условия на бесконечности для системы (1) зададим в виде

$$\theta = a = 0, \quad x = +\infty; \quad \theta = a = 1, \quad x = -\infty \quad (2)$$

Стационарное решение задачи (1)–(2) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_s &= \begin{cases} \theta_* \exp(-x), & x > 0 \\ 1 - \mu Le \exp(\gamma x) / (\gamma^2 + \gamma)(Le + \gamma), & x < 0 \end{cases} \\ a_s &= \begin{cases} \gamma \exp(-Le x) / (Le + \gamma), & x > 0 \\ 1 - Le \exp(\gamma x) / (Le + \gamma), & x < 0 \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

где  $\gamma = \theta_*/(1-\theta_*)$ , а  $\mu$  связано с  $\gamma$  соотношением  $\mu = (\gamma^2 + Le \gamma) / Le$ . Пара-

метр  $\gamma$  характеризует ширину фронта реакции  $l \sim \gamma^{-1}$ . Чем ближе  $\theta_*$  к единице, тем уже фронт реакции.

Исследуем устойчивость стационарного решения (3) в рамках линейной теории. Выберем возмущения в виде

$$\begin{aligned}\delta\theta &= u(x) \exp(\lambda t + ik_y y + ik_z z) \\ \delta a &= v(x) \exp(\lambda t + ik_y y + ik_z z)\end{aligned}$$

Уравнения для  $u$  и  $v$ , условия на бесконечности и условия сшивки при  $x=0$  получим аналогично [2]

$$\begin{aligned}u'' + u' - (\lambda + k^2)u - \mu h(-x)v(x) &= 0 \\ v''/\text{Le} + v' - (\lambda + k^2/\text{Le})v - \mu h(-x)v(x) &= 0 \\ u(\pm\infty) = v(\pm\infty) = 0, \quad [u] = [v] = 0 \\ [u'] + (1+\gamma)u(0) = 0, \quad [v']/\text{Le} + (1+\gamma)u(0) = 0 \\ [g] = g(x=0+) - g(x=0-), \quad k^2 = k_y^2 + k_z^2\end{aligned}\tag{4}$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $x$ .

Найдем общее решение (4) для всех  $\lambda$ , за исключением конечного числа точек

$$\begin{aligned}v(x) &= C_1 \exp(\beta_+ x) + C_2 \exp(\beta_- x) \\ u(x) &= C_3 \exp(\alpha_+ x) + C_4 \exp(\alpha_- x), \quad x > 0 \\ u(x) &= A_+ C_5 \exp(\delta_+ x) + A_- C_6 \exp(\delta_- x) + \\ &\quad + C_7 \exp(\alpha_+ x) + C_8 \exp(\alpha_- x) \\ v(x) &= C_5 \exp(\delta_+ x) + C_6 \exp(\delta_- x), \quad x < 0 \\ \alpha_{\pm} &= \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4(\lambda+k^2)}), \quad \beta_{\pm} = \frac{1}{2}(-\text{Le} \pm \sqrt{\text{Le}^2 + 4(\text{Le}\lambda + k^2)}) \\ \delta_{\pm} &= \frac{1}{2}(-\text{Le} \pm \sqrt{\text{Le}^2 + 4\text{Le}(\lambda + \mu) + 4k^2}), \quad A_{\pm} = \mu / (\delta_{\pm}^2 + \delta_{\pm} - \lambda - k^2)\end{aligned}$$

Условия сшивки при  $x=0$  и условия при  $x=\pm\infty$  дают систему линейных однородных уравнений на  $C_i$ ,  $i=1, \dots, 8$ . Существование нетривиального решения этой системы при некотором  $\lambda$  говорит о принадлежности этой точки к спектру.

Особый интерес представляет зона  $\text{Re } \lambda \geq 0$ . Появление спектра на оси  $\text{Re } \lambda = 0$  и переход его в правую полуплоскость говорят о рождении неустойчивости.

При  $\text{Re } \lambda \geq 0$  условием на спектр будет

$$A_+(\alpha_+ - \delta_+) (1+\gamma) + (\beta_- - \delta_+) (\alpha_+ - \alpha_- - 1 - \gamma) / \text{Le} = 0\tag{5}$$

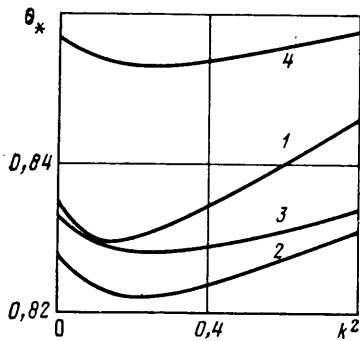
Дисперсионное уравнение (5) имеет сложную структуру и не допускает, подобно [1, 2], сведения к полиномиальному виду. Поиск решений дисперсионного уравнения проводился численными методами.

Рассмотрим появление спектра на мнимой оси, т. е. положим в уравнении (5)  $\text{Re } \lambda = 0$ . При фиксированном  $\text{Le}$  уравнение (5) разрешалось относительно  $\theta_*$  и  $\text{Im } \lambda$  для всех  $k^2$ . Кривые  $\theta_*(k^2)$  представлены на фиг. 1. Цифрами 1–4 обозначены нейтральные кривые, соответствующие числам  $\text{Le} = 5, 10, 20$  и  $\infty$  (последняя кривая взята из [2]). Видно, что качественное поведение кривых остается схожим для различных чисел  $\text{Le}$ . Все кривые имеют минимум при некотором  $k^2$ , соответствующий максимально неустойчивой моде. Стационарная волна устойчива для точек, лежащих ниже данных кривых и теряет устойчивость на кривой.

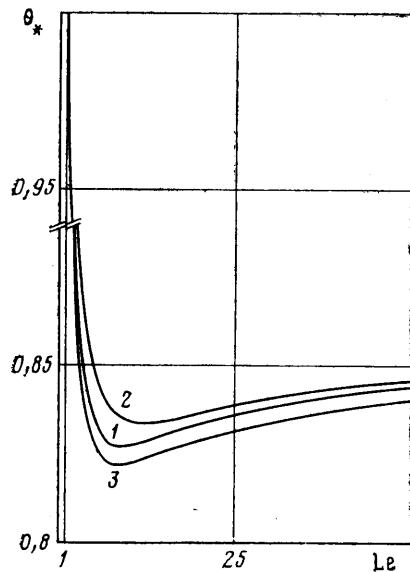
При фиксированном  $k^2$  уравнение (5) разрешалось относительно  $\theta_*$  и  $\text{Im } \lambda$  для всех  $\text{Le}$ . Нейтральные кривые  $\theta_*(\text{Le})$  представлены на фиг. 2. Цифрами 1 и 2 обозначены кривые, соответствующие  $k^2 = 0$  и 1. Интересно, что эти кривые немонотонны относительно  $\text{Le}$  и имеют минимум при  $\text{Le} = 9$  для  $k^2 = 0$  и  $\text{Le} = 12,5$  для  $k^2 = 1$ . Для точек, лежащих ниже этих кри-

вых, соответствующие моды устойчивы, выше — неустойчивы. Кривая 3 на фиг. 2 является кривой потери устойчивости для стационарной волны. Ниже этой кривой стационарная волна устойчива, а при переходе кривой одна из мод с некоторой длиной волны становится неустойчивой. Эта кривая — положение минимумов кривых на фиг. 1 в зависимости от  $Le$ .

Подробное рассмотрение точек, в которых уравнение (5) не справедливо, показало, что данные точки не являются точками спектра при  $Re \lambda \geq 0$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Таким образом, для диапазона  $1 < \chi/D < \infty$  полностью исследована устойчивость стационарного фронта волны горения относительно малых возмущений для кусочно-постоянной зависимости скорости реакции от температуры. Построены нейтральные кривые как для отдельных мод (фиксированное  $k^2$ ), так и общая кривая потери устойчивости (кривая 3 на фиг. 2). Интересно, что эти кривые немонотонны относительно  $k^2$  и имеют минимум при определенных числах  $Le$ . Показано, что при фиксированном  $Le$  нейтральные кривые в зависимости от  $k^2$  сохраняют качественное поведение аналогично безгазовому горению ( $Le = \infty$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеев П. А. Исследование устойчивости стационарного фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 115–118.
2. Берман В. С., Курдюмов В. Н. Об устойчивости стационарного фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986, № 4. С. 164–166.
3. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973. 176 с.
4. Matkovsky B. J., Sivashinsky G. I. Propagation of a pulsating front in solid fuel combustion // SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 35. № 3. P. 465–478.

Москва

Поступила в редакцию  
5.XI.1986г.